**CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**

1. Xét các hình chóp  – giác  (  là số tự nhiên tùy ý lớn hơn ) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a/ Đáy có tất cả các cạnh đều bằng .

b/ 

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất độ dài đường cao của hình chóp nêu trên.

**Hướng dẫn giải**

Chứng minh nếu hình chóp  tồn tại thì khi đó hình chóp là đều:

Chứng minh rằng các cạnh bên bằng nhau

Đặt : ; ; ..... ; .

Dùng định lý cosin trong các tam giác ; ; ...; ta có:





.......................................................



.

Đặt , ta có hệ:  với

Trên  đồng biến.

Do đó: thì vô lý.

Thật vậy: nếu . Ta có ( vô lý)

Tương tự nếu cũng suy ra điều vô lý: . Vậy .

Do ta được . Từ đó ta được: .

Chứng minh đáy là đa giác đều. Từ  suy ra hình vuông góc  của lên đáy cách đều các đỉnh của đáy. Đa giác có các cạnh bằng nhau và nội tiếp trong một đường tròn nên là đa giác đều.

a) Tìm lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Chứng minh .Ta có các mặt bên của hònh chóp là các tam giác đều cạnh .

Ngoài ra:  ;  ; ...; .

Do đó: .

* Tính  và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của :

Xét tam giác vuông : .

.

 ; ; .

* Do đó giá trị lớn nhất của  là , giá trị nhỏ nhất của  là .

1. Cho hình lập phương  cạnh .Gọilần lượt là trung điểm của các cạnh và.  là tâm của hình vuông.  là hai điểm lần lượt ở trên hai đường thẳng và  sao cho vuông góc với  và cắt .Tính độ dài đoạn  theo .

**Hướng dẫn giải**

A

B

C

D

G1

E1

M

H1

I1

N1

C

C’

A

B

D

E1

A’

B’

D’

E

G

H

H1

N1

I1

I

M

G1

Xác định đoạn 

Gọi là hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng .

Do (gt) và Ksuy ra  , suy ra  tại .

Mà theo giả thiết  cắt  tại  suy ra  mà  là trung điểm của đoạn  nên  phải là trung điểm của .

Từ đó suy ra cách dựng hai điểm .

Tính độ dài 

Đặt .

Xét tam giác vuông, ta có: .

Xét tam giác vuông , ta có: ..

(Cách khác: Gọi  là trung điểm của , suy ra được  ở trên , suy ra .)

.

**Cách khác:** Dùng phương pháp tọa độ trong không gian....

1. Cho hình chóp tứ giác đềucó cạnh đáy ,các cạnh bên nghiên với đáy một góc . Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp .

**Hướng dẫn giải**

Chiều cao của hình chóp: 

Thể tích của hình chóp:

Trung đoạn của hình chóp



Diện tích xung quanh của hình chóp:

1. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy , ,các cạnh bên nghiên với đáy một góc.

***a)***  Tính thể tích hình cầu  nội tiếp hình chóp.

***b)*** Tính diện tích của hình tròn thiết diện của hình cầu  cắt bởi mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của mặt cầu  với các mặt bên của hình chóp .

**Hướng dẫn giải**

 (bán kính mặt cầu nội tiếp)

Thể tích hình chóp : 





Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của  với các mặt bên của hình chóp:



Bán kính đường tròn giao tuyến:

Diện tích hình tròn giao tuyến:

1. Một thùng hình trụ có đường kính đáy ( bên trong) bằng đựng nước cao lên  so với mặt trong của đáy. Một viên bi hình cầu được thả vào trong thùng thì mực nước dâng lên sát với điểm cao nhất của viên bi (nghĩa là mặt nước là tiếp diện của mặt cầu). Hãy tính bán kính của viên bi.

**Hướng dẫn giải**

Ta có phương trình : 

Với  lần lượt là bán kính đáy của hình trụ, hình cầu và chiều cao ban đầu của cột nước.

Bấm máy giải phương trình: 

Ta có: 



B. Xét hai độ dài khác nhau . Tìm điều kiện của  để tồn tại tứ diện  có một cạnh bằng  và các cạnh còn lại đều bằng  .Với tứ diện  này, hãy xác định mặt phẳng  sao cho thiết diện của mặt phẳng  và tứ diện  là một hình vuông  .Tính diện tích của hình vuông  theo  và .

Điều kiện độ dài  :

+ Giả sử tứ diện  tồn tại. Gọi  là cạnh bằng , các cạnh đều cùng bằng  . Gọi  là trung điểm cạnh .Tam giác là tam giác cân:

. Từ  Suy ra: 

+Ngược lại với:  .Dựng tam giác đều  cạnh  với chiều cao .

Dựng tam giác cân có , nằm trong mặt phẳng chứa  và vuông góc với mặt phẳng .Ta có:  mp. Tứ diện  thỏa điều kiện bài toán.



Xác định mặt phẳng :

+ Giả sử thiết diện  là hình vuông . Các mặt của tứ diện lần lượt chứa các đoạn giao tuyếnđược gọi tên là mặt  , mặt , mặt , mặt .

Do nên cạnh chung của mặt  và mặt ; cạnh chung của mặt  và mặt nằm trên hai đường thẳng song song với mp .

Ngoài ra hai đường thẳng này vuông góc với nhau, vì  vuông góc .

+ Do  khác  nên tứ diện  chỉ có một cặp cạnh đối vuông góc , đó là  và  .

Vì vậy mặt phẳng  phải song song với và .

+ Gọi giao điểm của mp  với , lần lượt là .Đặt:  .

Ta có: ;. Từ  ta có : .

+ Diện tích của hình vuông  là :

........................................................................................................................................

1. Cho hình chóp tứ giác , có đáy là một hình bình hành. Gọi  là trọng tâm tam giác .  là một điểm thay đổi trong miền hình bình hành .Tia  cắt mặt bên của hình chóp tại điểm  .Đặt 

1/ Tìm tất cả các vị trí của điểm  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

2/ Tìm giá trị lớn nhất của  .

**Hướng dẫn giải**

**1/** 

+  .Dấu bằng khi và chỉ khi  .

+  cắt mp tại tâm  của hình bình hành . Gọi  là trung điểm của  . Từ  dựng mặt phẳng song song với mp cắt  lần lượt tại . Từ  dựng mặt phẳng song song với mp cắt  tại .

Ta có :  trùng  thuộc cạnh hình bình hành 

Nối  cắt cạnh hình bình hành  tại , ta có : .

+ Từ đó  khi và chỉ khi  thuộc cạnh hình bình hành 

 là hình chiếu song song của hình bình hành  lên mp

theo phương .

**2/**

+ Miền hình bình hành hợp bởi các miền tam giác 

 thuộc miền hình bình hành  nên  thuộc một trong bốn miền tam giác này. Chẳng hạn  thuộc miền . ; ; .

Do đó  thuộc miền  và  thuộc đoạn  , với  và  lần lượt là trung điểm của  và .

Do đó:  . Vì vậy:  hay .

+Đặt :  Ta có :  với .

 vàø  . .

+Giá trị lớn nhất của  là :  . Đạt khi  trùng với  hoặc các đỉnh .

1. Cho tứ diện có diện tích các tam giác  và  là và. Mặt phẳng phân giác của nhị diện tạo bởi hai mặt  và cắt  tại .  là góc giữa hai mặt  và .

Chứng minh:

a/ 

b/ Diện tíchcủa tam giác  là: .

**Hướng dẫn giải**

Câu a:

+ Do  ở trên mặt phẳng phân giác của góc nhị

diện cạnh  nên khoảng cách từđến hai mặt phẳng

,  bằng nhau và kí hiệu là .

+ Do đó:



Câu b:

+ Tính công thức thể tích tứ diện:







K

A

D

S

M

C

+ , áp dụng công thức tính thể tích trên ta suy ra:



Rút gọn, được: .

1. Với hai đường thẳng  chéo nhau trong không gian, kí hiệuvà lần lượt là khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng .

a/ Chứng minh rằng nếu tứ diện  thỏa điều kiện: 

thì trong ba số: có một số bằng tổng hai số còn lại.

b/ Chứng minh rằng nếu tứ diện  thỏa điều kiện:và  thì nó là hình chóp tam giác đều.

**Hướng dẫn giải**

C1

A

C

D

B1

D1

a /

* Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện.

A1

* Giả thiết 

suy ra các mặt của hình hộp cùng diện tích .

Đặt 

.

* Từ hình bình hành  ta có:



B



* Chú ý: . Do đó: 

Tương tự: 

* Nếuthì .
* Các trường hợp khác cũng có kết quả như thế.

b/

* Từ các kết quả câu a/ nếu thêm 

thì .

* Suy ra các cặp cạnh đối của tứ diện  vuông góc đôi một.
* Lúc này ta cũng có: 
* Suy ra . Vì vậy phải có ít nhất một mặt của tứ diện  là một tam giác đều. Từ đólà hình chóp tam giác đều.

1. Trong không gian cho ba tia không đồng phẳng và ba điểm( khác điểm ) lần lượt trên .Dãy số (an) là một cấp số cộng có và công sai . Với mỗi số nguyên dương, trên các tia theo thứ tự lấy các điểmsao cho .Chứng minh các mặt phẳngluôn luôn đi qua một đường thẳng cố định.

**Hướng dẫn giải**

+ Phát biểu và chứng minh mệnh đề:

Nếu hai điểm  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để điểm  thuộc đường thẳng  là tồn tại cặp số thực  thỏa:

 , với điểm  tùy ý.

+Từ giả thiết:  là cấp số cộng công sai  nên: .

+ áp dụng nhận xét trên, ta có:

 thì .

và 

Thế vào trên ta được: suy ra  cố định, nên đường thẳngluôn đi qua một điểm cố định .

+ Tương tự, chứng minh được:

*  luôn đi qua một điểm cố định xác định bởi: .
*  luôn đi qua một điểm cố định  xác định bởi: 

Vậy các đường thẳng lần lượt đi qua ba điểm  cố định.

+Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

Ta có: , , .

Do đó: 

Vậy thẳng hàng. Điều này chứng tỏ mặt phẳng luôn đi qua một đường thẳng cố định.

1. Trong không gian cho ba mặt phẳng cố định có một điểm chung duy nhất.  là một điểm của không gian, các đường thẳng đi qua  song song với hai mặt phẳng cắt mặt phẳng còn lại lần lượt tại . Biết .Tìm tập hợp các trọng tâm của tam giác.

**Hướng dẫn giải**

+ Gọi  là giao điểm của 3 mặt phẳng. là 3 giao tuyến . Dùng tính chất hình hộp và tính chất trọng tâm, ta có: , với là trọng tâm của.

\_

U

\_

C

\_

V

**\_**

**M**

**'**

\_

O

**\_**

**M**

\_

A

\_

C

\_

B

+ Tìm tập hợp các điểm :

Ba mặt phẳng chia không gian làm 8 miền. Ta chỉ cần xét một miền: Gọi thuộc : .

Chứng minh được: M thuộc miền trong tam giác  khi và chỉ khi: với .

Mà .

Do đó: Tập các điểm  là miền trong của tam giác .

Suy ra các điểm  ( trọng tâm của tam giác ) là ảnh của miền trong tam giác  qua phép vị tựtâm  tỉ

1. Cho hình chóp , đáy là hình chữ nhật có ,.  là hình chiếu vuông góc của  xuống .

a/ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của  và .

b/ Gọilần lượt là trung điểm của đoạn thẳng  và . Chứng minh: Các đường thẳng  và  vuông góc nhau.

**Hướng dẫn giải**

\_

D

\_

C

\_

B

\_

A

\_

S

\_

O

\_

K

\_

M

\_

N

a) + Theo giả thiết ta được: .

Mà và B.

+ Gọi  là hình chiếu của  xuống 

 và  ( vì )

⇒ là đoạn vuông góc chung của  và .

Suy ra được:  và vuông tại .

+ Do vuông đỉnh  nên: .

+ cân đỉnh , là đường cao nên 

+ Do vuông tại  nên:





b) +  ( vì là trung điểm của )

+ 

+ .

+ Do đó:



Vậy: .

( Có thể tính và áp dụng định lý Pythagor).

1. Cho tứ diện cóhai cạnh đối bằng  và các cạnh còn lại bằng .

a/ Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm tùy ý trong không gian đến các đỉnh của tứ diện.

b/ Giả sử tứ diện  thay đổi vị trí trong không gian nhưng có ba đỉnh lần lượt ở trên mặt cầu cố định và đồng tâm.Chứng minh rằng đỉnh  luôn ở trong một hình cầu cố định khi độ dài thay đổi thỏa các giả đã cho.

**Hướng dẫn giải**

I

J

A

B

C

D

D’

A’

K0

a)

* Ta có thể giả sử và các cạnh còn lại

bằng . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh

. Ta dễ dàng suy ra  vuông góc với  và

 và  chính là trục đối xứng của tứ diện.

* Lấy  tùy ý trong không gian,  là điểm đối xứng

của  qua suy ra trung điểm  của  chính là

hình chiếu của  trên đường thẳng và ta có:

* 



.

( Do tính chất: trung tuyến của một tam giác thì bé hơn nữa tổng

của hai cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của nó).

* Do đó: 
* Bài toán trở thành tìm điểm  trên  sao cho bé nhất.
* Trong mặt phẳng dựng hình thang  sao cho  là trung điểm của hai đáy và . Ta thấy rằng: với  tùy ý trên  thì  và. Do đó:

.

* Vậy  nhỏ nhất khi chính là giao điểm của hai đường chéo và.
* Tính .
* Tính .
* Tổng các khoảng cách nhỏ nhất là:.

b)

* Gọi là bán kính các mặt cầu tâm  và lần lượt đi qua các đỉnh . Ta có:
* . Do đó  ở trong hình cầu cố định tâm , bán kính .

1. Cho tam giác có góc  nhọn.  là điểm di động trên . lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên .Tìm tập hợp các điểm  không phụ thuộc mặt phẳngsao cho:

.

( ký hiệu là góc giữa hai đường thẳng )

**Hướng dẫn giải**

+ Với tứ diệnta chứng minh:

và .

Thật vậy ta có đẳng thức: . Từ đó nếu:

thì 

Với nhận giá trị hay. Mặt khác ta có bất đẳng thức đối với các cạnh của tứ diện là:

, nên .

+khi và chỉ khi hình chiếu  lên  là trực tâm tam giác .

+ Đặt . Gọi  là hình chiếu của  và  lên . Ta có:

 mà ta có:



+Suy ra: . Tập hợp các điểm  là đoạn .

Vậy tập hợp các điểm  là dải mặt phẳng ở giữa hai đường thẳng  lần lượt đi qua  và vuông góc mặt phẳng .

1. Cho tứ diện đều . Mặt phẳng  chứa cạnh  và cắt cạnh  của tứ diện tại . Gọi lần lượt là góc tạo bởi  với các mặt phẳng  và   
   a, cm   
   b, Cho . Tính tỉ số thể tích 2 tứ diện  và
2. Cho hình chóp  đáy  là hình thang  và . Gọilần lượt là trung điểm của . Mặt phẳng  cắt  tại . Tính tỉ số .
3. Cho tam giác đều :
4. M là điểm nằm trong tam giác sao cho . Hãy tính góc 
5. Một điểm  nằm ngoài mặt phẳng  sao cho tứ diện  đều, gọi  là trung điểm của các cạnh  và . Trên đường thấng  và  ta chọn các điểm  sao cho . Tính độ dài  biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng .
6. Trong mặt phẳng  cho đường tròn  Đường kính  cố định và điểm  di động trên . Gọi  là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với mp tại . Hạ các đường  lần lượt vuông góc với  và .

2.1 Chứng minh rằng .

2.2 Tìm quỹ tích của điểm  khi di động trên .

1. Cho hình lập phương  cạnh .
2. Tính góc giữa hai đường thẳng  và **.**
3. Gọi , ,  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh , ,  sao cho . Chứng minh rằng trọng tâm tam giác  luôn thuộc một đường thẳng cố định khi , ,  thay đổi.
4. Cho hình lăng trụ  có đáy  là hình thoi  lần lượt là trung điểm của  và . Mặt phẳng  cắt  tại *.*
5. Chứng minh tam giác  là tam giác vuông.
6. Mặt phẳng  cắt  tại . Tính tỉ số .
7. Cho lăng trụ đứng  có đáy là tam giác vuông cân tại , , . Gọi  là trung điểm của .
8. Xác định thiết diện giữa lăng trụ và mặt phẳng  đi qua , vuông góc với .
9. Tính diện tích thiết diện vừa tìm được theo .
10. Cho tứ diện  có  vuông góc với  và chân đường vuông góc hạ từ  đến mặt phẳng  là trực tâm của tam giác . Chứng minh rằng .
11. Cho tứ diện **.** Gọi  lần lượt là trung điểm **.**
12. Chứng minh tứ giác  là hình bình hành. Tìm điều kiện của tứ diện để  là hình thoi.
13. Mặt phẳng  đi qua N và song song với **.** Xác định thiết diện của và tứ diện . Thiết diện là hình gì?

**Hướng dẫn giải**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1/ (1,5 điểm) | \*  \* Tương tự MQ // NP  Kết luận: Tứ giác MNPQ là hình bình hành  \* MNPQ là hình thoi khi AC = BD | 0,5  0,5  0,25  0,25  0,5 |
| 2 / (1 điểm) | Thiết diện là tứ giác NEQF  \* Tứ giác NEQF là hình bình hành | 0,25  0,25  0,25  0,25 |

1. Cho hình chóp  có đáy là nửa lục giác đều với cạnh  (). Cạnh  vuông góc với đáy và .  là một điểm khác  trên  sao cho **.** Tính tỉ số .

**Hướng dẫn giải**



Đặt hình chóp vào hệ trục toạ độ như hình vẽ. Suy ra ta có:, ,  và . Suy ra phương trình của  là



Gọi  thuộc cạnh , ta có:

.

Mặt khác ⇔ 



 hay 

1. Cho hình chóp tứ giác  có đáy  là hình bình hành tâm  và các cạnh bên có độ dài bằng nhau. Một mặt phẳng  thay đổi và luôn cắt các cạnh bên của chóp, gọi giao điểm của  với các cạnh bên  lần lượt là . Đặt *, , , *. Chứng minh rằng: .
2. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm , cạnh bằng , mặt bên  là tam giác đều và mp  vuông góc với mp.
   1. Tính các khoảng cách: , , .
   2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**.**
   3. Mặt phẳng  chứa  và vuông góc với mặt phẳng  cắt hình chóp đã cho theo thiết diện hình gì? Tính diện tích thiết diện theo .
3. Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  vuông góc với mặt phẳng  và . Gọi  là trọng tâm của tam giác ,  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên mặt phẳng.

1/. Chứng minh rằng :  là trực tâm của tam giác.

2/. Tính góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng .

**Hướng dẫn giải**

**S**

**A**

**K**

**O**

**B**

**C**

**H**

**2a**

**3a**

**M**

1/. Gọi  là trung điểm của cạnh  .

Do  đều,  là trọng tâm của  nên ta có .

Do  nên  là hình chiếu vuông góc của  lên .

Theo Định lí ba đường vuông góc ta có .

Mặt khác do  là hình chiếu vuông góc của  lên nên  và  Suy ra.

Suy ra  (1)

\* Do  đều nên ta có 

Do  nên.

Từ đó suy ra.

Suy ra .

Mặt khác 

Từ đó ta có .

Suy ra  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  là trực tâm của  .

2/. Gọi  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên .

Do đó ta có.

Ta có đường thẳng  là hình chiếu vuông góc của đường thẳng  lên.

Vì vậy góc giữa đường thẳng  và  bằng góc giữa đường thẳng  và  bằng góc giữa hai đường thẳng  bằng góc .

Do  và  nên 

Xét  vuông tại  có , .

Suy ra 

Từ đó ta có góc .

Kết luận: .

1. Cho tứ diện  có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Chứng minh với mọi điểm  trong không gian ta đều có:

****

1. Cho hai đường thẳng  chéo nhau và vuông góc với nhau nhận  làm đường vuông góc chung ( thuộc  và  thuộc  ). Trên  lấy điểm  cố định, trên lấy hai điểm  di động sao cho mặt phẳng  vuông góc với mặt phẳng  .

a/. Chứng minh trực tâm tam giác  cố định.

b/. Xác định  để diện tích tam giác  là nhỏ nhất.

1. Cho tứ diện  có , mặt phẳng  đi qua trọng tâm  của tứ diện, cắt cạnh  lần lượt tại  (khác).

Chứng minh rằng: .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : .

1. Cho hình chóp , có đáy  là hình chữ nhật với  và . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên  và  là hình chiếu vuông góc của  trên .

1/. Chứng minh rằng .

2/. Tính góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  .

1. Cho góc tam diện thỏa mãn góc . Trên tia  lấy điểm  sao cho  cho trước. Trên tia phân giác của góc lấy điểm  thỏa mãn .

Tính các góc của tam giác.

1. Cho hình thang vuông  có,  và  là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng.

1/. Xác định vị trí của điểm  để hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.

2/. Lấy điểm  thuộc đường thẳng vuông góc với  tại  sao cho , xét mặt phẳng  qua điểm  và vuông góc với . Mặt phẳng cắt hình chóp  theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của thiết diện theo  biết  và?.

1. Cho tứ diện  có các đường cao  đồng qui tại một điểm thuộc miền trong của tứ diện. Các đường thẳng  lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  theo thứ tự tại .  Chứng minh:

****

1. Cho hình chóp có đáy là hình bình hành. lần lượt là trung điểm của,.

a/. Tìm giao tuyến của  và.

b/. Tìm giao điểm  của  và , tính tỷ số .

**Hướng dẫn giải**

S

A

B

C

D

M

N

K

I

J

a/. Trªn  gäi  lµ giao ®iÓm cña  vµ.

Ta cã:  lµ ®iÓm chung thø nhÊt cña 2 mp  vµ .

MÆt kh¸c:

-  nªn 

-  nªn  do ®ã .

-  nªn 

  lµ ®iÓm chung thø 2 cña 2 mp vµ .

VËy: giao tuyÕn cña vµ lµ.

b/. Trªn  gäi  lµ giao ®iÓm cña  vµ.

Ta cã: , mµ  nªn .

VËy  lµ giao ®iÓm cña  vµ .

Gäi  lµ trung ®iÓm cña  th×  lµ ®­êng trung b×nh cña tam gi¸c  nªn  .

MÆt kh¸c dÔ thÊy  lµ träng t©m tam gi¸c  nªn . Do ®ã:  .

Suy ra:  nªn : .

1. Cho hình thoi  có  Gọi  là trung điểm. Trên đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  tại lấy điểm  thay đổi khác . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho 

a/. Khi  Chứng minh đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng .

b/. Tính theo  độ dài của  để góc giữa  và  có số đo lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

A

S

B

C

D

H

M

K

I

N

a/. Ta có 

vuông tại.



Gọi  là giao của  và.

Ta có: vuông tại  .



Kết hợp với 

b/. Gọilà góc giữa  và ;  là hình chiếu vuông góc của  lên  ;  là giao của  với . Lấy  đối xứng với  qua .

Vì . Kết hợp với .

Mà  là đường trung bình của tam giác  nên .

Suy ra tại . Suy ra vuông tại  và  là hình chiếu của  trên. Ta có .

Đặt . Tam giác  vuông tại  và  là đường cao nên

.



Tam giác  vuông tại  nên .

.



Dấu đẳng thức xảy ra khi .

Vậy lớn nhất khi và chỉ khi  lớn nhất khi và chỉ khi 

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi. Hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng  là trung điểm  của cạnh  .  Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho 

a/. Tính côsin của góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng.

b/. Chứng minh rằng đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng.

A

S

B

C

D

H

M

N

**Hướng dẫn giải**

a/. Vì  là hình chiếu của  trên nên

góc giữa  và là 

( vì tam giác  vuông tại  nên  nhọn)

Tam giác  đều cạnh  nên 

Ta có 

Trong tam giác  ta có: 

b/. Ta có



vuông tại.



Gọi  là giao của  và . Suy ra vuông tại .



Kết hợp với 

1. Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông tại , cạnh bên  vuông góc với đáy.  Gọi  là hình chiếu của  trên  .

a/. Chứng minh rằng đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng.

b/. Tính độ dài đoạn thẳng  theo  .

**Hướng dẫn giải**

S

A

B

C

H

a/. Ta có  (Vì  vuông tại  ) (1)

 (Vì ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra .

b/. Ta có  (theo giả thiết) (3)



Từ (3) và (4) suy ra  hay tam giác  vuông tại .

Tam giác  vuông tại  có  là đường cao nên 

Tam giác  vuông tại  nên 

Do đó, 

1. Cho hình chóp,  là điểm nằm trong hình chóp. Kéo dài cắt mặt phẳng tại. Chứng minh:
2. 



1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của  

a) Tính góc giữa  và  biết , .

b) Giả sử . Chứng minh rằng:



1. Cho hình lập phương . Một mặt phẳng  bất kì đi qua  và cắt cạnh  ở , cắt cạnh  ở .

a) Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành và .

b) Tìm  để diện tích tứ giác  đạt GTNN.

1. Cho đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng tam giác  tại . Trên  lấy điểm  và điểm  sao cho  vuông góc với .

a) Chứng minh rằng .

b) Tìm điều kiện cần và đủ để  nằm cùng phía đối với  trên đường thẳng .

1. Cho hình chóp đáy là đa giác đều .  cố định trên . Mặt phẳng quay quanh trục  cắt  tại 
2. Xác định mặt phẳng  để diện tích tứ giác  nhỏ nhất.
3. Cho ; . Tính diện tích tứ giác .
4. Cho tứ diện  có  Gọi ,  lần lượt là trọng tâm của các mặt đối diện với đỉnh  và đỉnh .
5. Chứng minh rằng: .
6. Gọi  là đường cao của tứ diện,  thuộc mặt phẳng  là trực tâm . Kéo dài  cắt  tại . Chứng minh .
7. Cho 2 đường thẳng  chéo nhau và vuông góc với nhau. Gọi  là đường vuông góc chung   và  là 2 điểm di động trên  sao cho không đổi.  là điểm cố định trên .
8. Chứng minh rằng trực tâm  của tam giác  cố định.
9. Tìm tập hợp hình chiếu  của  trên .
10. Cho góc tam diện vuông , tia  bất kì nằm trong góc tam diện. Gọi  theo thứ tự là góc hợp bởi tia  với các tia 

Chứng minh rằng: 

1. Chứng minh rằng nếu một tứ diện  thỏa mãn điều kiện  vuông góc với  và  vuông góc với  thì  vuông góc với .
2. Cho hình chóp . đáy  là hình bình hành,  cắt  tại  và:. Chứng minh:  vuông góc với mặt phẳng 

a)Cho tứ diện  và  là Một điểm nằm trong . Chứng minh:



b)Gọi  và  là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Hỏi tứ diện nào có tỉ số  lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Gọi  là giao điểmcủa  và , ta có :

 Hay : (1)

A

D

B M K

C

tương tự :  (2)

 (3)

Cộng (1), (2), (3) theo từng vế ta có đpcm. 

b) Gọi  và  lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  ta có :



Mặt khác ta có :



Từ (1) và (2)  hay . đẳng thức xảy ra   là tứ diện đều.

Và khi đó 

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh ,  và độ dài . Một mặt phẳng đi qua  cắt cạnh  lần lượt ở . Đặt .

a)Tính diện tích tứ giác  theo .

b) Xác định  để thể tích hình chóp  bằng  lần thể tích hình chóp .

**Hướng dẫn giải**

a) Gọi  là giao điểm của  và  ;  là giao điểmcủa  và . Áp dụng định lý cosin trong tam giác  ta có : .



Theo Tính chất đường phân giác  trong  ta có : .

S

L

N

D C

H

A

B Hình 2

M

K

P

.

b) Gọi hình chóp đều đó là , vì thiết diện cắt tất cả các mặt bên nên các đỉnh  của ngũ giác đều nằm trên các cạnh  tương ứng

Không mất tính tổng quát, hình chiếu trên mặt phẳng vuông góc với cạnh .(xem hình 3)

S’

N’

M’

P’

A’

B’ K’

Hình 3

Giả sử 

VÌ  nên





(vì  )

  .

Giả sử Ta có :  và  ()

 (Do  )

⇔ . Vậy mặt bên của hình chóplà tam giác đều.

1. a) Cho hình chóp tứ giác đều . Trên cạnh  lấy điểm . Thiết diện tạo thành do mặt phẳng đi qua  và song song với  cắt  lần lượt tại 

Tính diện tích thiết diện đó khi cho cạnh đáy bằng , cạnh bên bằng  và .

b) Giả sử thiết diện của hình chóp tứ giác đều là một ngũ giác đều. Hãy chứng minh rằng mặt bên của hình chóp này là các tam giác đều.

1. Cho hình chóptam giác đều , cạnh đáy bằng  và mỗi mặt của góc tam diện đỉnh  bằng .
2. Hỏi phải cắt hình chóp bằng một mặt phẳng đi qua  như thế nào để thiết diện tam giác   thu được có chu vi nhỏ nhất.
3. Tính giá trị chu vi nhỏ nhất đó theo .
4. Cho lăng trụ . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Gọi  là trung điểm .

a)Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng .

b) Gọi . Tính tỉ số  và.

**Hướng dẫn giải**

+) Xác định được điểm  và suy ra hai giao tuyến  và 

+) Xác định được điểm  ; suy rađược đoạn giao tuyến  và

+) Kết luận thiết diện là tứ giác 

b,(1,25)

+) Xét tam giác  có 

+) Trong  Dựng , khi đó 

+) Xét tam giác  có: 

Suy ra  là trung điểm . Vậy 

1. Cho hình chóp  có đáy là hình thang  và . Gọi  lần lượt là trung điểm của .

a)Chứng minh rằng: .

b) Chứng minh:  và  không song song với .

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi . Thiết diện là hình gì?

1. Trong mặt phẳng  cho đường tròn tâm  bán kính  và  điểm  cố định trên  Tứ giác  biến thiên nội tiếp trong sao cho  đường chéo luôn vuông góc với nhau. Trên đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng tại  lấy điểm . Nối  với 
2. Chứng minh  cạnh  vuông góc với nhau.
3. Nêu cách xác định điểm  cách đều  điểm 
4. Tứ giác  là hình gì để diện tích của nó lớn nhất. Tìm GTLN đó theo 

**Hướng dẫn giải**

H

A

B

C

D

d

S

O

d’

I

K

P

a, Vì nên  là hình chiếu của  trên mp

Theo gt nên theo định lí  đường vuông góc ta có .

b, Cách dựng:

Qua  kẻ đường thẳng  vuông góc với mp.

Dựng mp là mp trung trực của .

Giao của mpvà đường thẳng  là điểm  cần xác định

CM:

Vì  nên  cách đều .

Vì nên  cách đều  và .

Vậy điểm  vừa dựng cách đều  điểm .

c, . Kẻ  tại . Kẻ tại 

Ta có 



Để tứ giác  có diện tích lớn nhất thì độ dài  và  lớn nhất khi và chỉ khi  

Vậy tứ giác  là hình vuông. Khi đó 

1. Cho hình vuông cạnh  tâm . gọi  là điểm nằm ngoài mặt phẳng  sao cho ,  là điểm tùy ý trên với . Mặt phẳng  qua  và song song  và  cắt  lân lượt tại .

a)Tứ giác  là hình gì?

b). Tính diện tích  theo  và . Tìm  để diện tích lớn nhất.

1. Cho hình lập phương  cạnh .

a) Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

b) Gọi  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  sao cho . Chứng minh rằng trọng tâm tam giác  luôn thuộc một đường thẳng cố định khi  thay đổi.

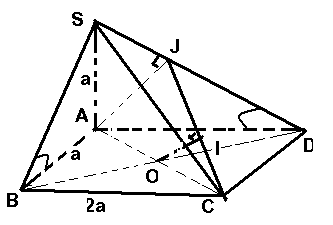
1. Cho hình chóp cố định  có các góc tam diện đỉnh  ba mặt vuông. Hình lăng trụ  thay đổi sao cho  ; các điểm  lần lượt thuộc . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ theo thể tích khối chóp 
2. Cho hính chóp có ,diện tích tam giác  là .Gọi  là điểm di động trên ,  là trung điểm của . Biết  vuông góc với mặt phẳng . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác theo  và .
3. Cho hình chóp . Xét các điểm  theo thứ tự thuộc các cạnh  sao cho . Chứng minh rằng khi các điểm  thay đổi thì mặt phẳng  đi qua một điểm cố định.
4. Cho hình hộp . Hãy xác định các điểm  theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng  và  sao cho  song song với .
5. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật. Biết  cạnh bên  vuông góc với 

a)Tính góc giữa các mặt phẳng  và  với .

b) Gọi  là giao điểm của hai đường chéo  và .Tính khoảng cách từ  đến 

**Hướng dẫn giải**

Hình vẽ ;



a).

Góc giữa  với chính là góc 

Góc giữa  với là góc 

Ta có 



b). Từ  kẻ . Nối  và từ  kẻ 

Vậy  chính là khoảng cách cần tìm

Ta có ;

Từ đó ta có kết quả ;

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , cạnh bên  vuông góc với mặt đáy .

a) Gọi  là trung điểm . Tính góc giữa  và .

b) Xác định thiết diện của hình chóp  cắt bởi mpđi qua  và vuông góc với . Tính diện tích của thiết diện đó.

1. Cho hình tứ diện  có đáy  là tam giác đều cạnh , mặt bên  là tam giác cân đỉnh , cạnh bên  tạo với mặt đáy một góc bằng .

a) Chứng minh rằng  vuông góc với .

b) Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng .Chứng minh  nằm trên

trung tuyến  của tam giác . Tính , biết tam giác  vuông.

c) Gọi  là trung điểm . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi  đi qua  và

vuông góc với .

1. Cho tứ diện  có , , .  là điểm tùy ý trên cạnh ,  là mặt phẳng qua  và song song với  và  cắt  lần lượt tại  Tìm vị trí của  và điều kiện của  để thiết diện  là hình vuông, tính diện tích thiết diện trong trường hợp đó.
2. Cho tứ diện . Tìm  trong không gian sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Cho hình chóp có đáy là hình bình hành tâm . Gọi  là trung điểm .

1) Tìm giao điểm  của đường thẳng  và mặt phẳng 

2) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng

3) Tính tỉ số 



1) Trong mp dựng đường thẳng qua  song song với  cắt  tại , suy ra  là trung điểm của 

Do  Suy ra  thuộc mp

2) Ta có  là giao tuyến của  và mp

Mặt khácsuy ra  nằm trên giao tuyến của mp và mp 

Vậy  thẳng hàng.

3) Xét tam giác  có  là trọng tâm nên .

1. Cho hình chóp , có đáy  là hình chữ nhật với  và . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên  và  là hình chiếu vuông góc của  trên .

a)Tính độ dài  theo .

b)Gọi  lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng . CMR các đoạn thẳng  và  vuông góc với nhau.

1. **(HSG Nghệ An 2016)** Cho hình thoi  có  Gọi  là trung điểm. Trên đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  tại  lấy điểm  thay đổi khác. Trên tia đối của tia lấy điểm  sao cho .
2. Khi  . Chứng minh đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng.
3. Tính theo  độ dài của để góc giữa và  có số đo lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

1. **(HSG Hà Tĩnh 2008)** Cho hình thang cân  có đáy lớn, đáy nhỏ, các cạnh bên. Trên nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  lấy điểm (không trùng với A). Mặt phẳng  đi qua điểm và vuông góc với  cắt các cạnh  tại .

a. Chứng minh rằng:  là tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Khi điểm  chạy trên nửa đường thẳng, chứng minh đường thẳng  đi qua một điểm cố định.

**Hướng dẫn giải**

1. **(HSG Nghệ An Bảng B 2016)** Cho hình chóp tam giác  có đáy là tam giác đều cạnh . Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Gọi là trung điểm của đoạn,  là hình chiếu vuông góc của lên.
2. Chứng minh đường thẳng  vuông góc với mp.
3. Biết góc tạo bởi đường thẳng  và mp  bằng 300. Tính diện tích tam giác .
4. **(HSG Quảng Bình 2011)** Cho tứ diện đều  cạnh . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và. Mặt phẳng  qua  cắt các cạnh  lần lượt tại các điểm  với *AM = , AN = * ().

*a) Chứng minh  đồng qui hoặc song song và  là hình thang cân.*

*b) Chứng minh rằng: . Suy ra: .*

*c) Tính diện tích tứ giác  theo  và .*

1. **(HSG Vĩnh Phúc 2011)** Cho hình hộp  có tất cả các mặt đều hình vuông cạnh 
2. Chứng minh rằng  vuông góc với mặt phẳng  và đường thẳng  đi qua trọng tâm của tam giác.
3. Hãy xác định các điểm  lần lượt nằm trên các cạnh sao cho  vuông góc với mặt phẳng. Tính độ dài đoạn  theo.
4. **(HSG Vĩnh Phúc 2016)** Cho hình chóp  có đáy là hình chữ nhật và  vuông góc với mặt phẳng . Biết và

a) Đường thẳng qua  vuông góc với  cắt các đường thẳng  lần lượt tại . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên . Hãy xác định các giao điểm  của  với  và chứng minh rằng 

b) Tính diện tích tứ giác 

**Hướng dẫn giải**



Trong  gọi 

Trong  gọi 

Ta có , mà . Suy ra 

Suy ra . Mà .Vậy 

b) Ta có; ; 

Do , do đó .

Tương tự phần (a) thì . Từ đó tính được



Suy ra 

1. **(Bình Sơn Vĩnh Phúc)** Cho hình chóp tứ giác đều  có đường cao. Mặt phẳng 

đi qua  và vuông góc với, cắt  tại sao cho:  và cắt các cạnh

bên  lần lượt tại .

a) Tính tỷ số diện tích thiết diện  và diện tích đáy hình chóp.

b) Cho biết cạnh đáy của hình chóp là *a* . Tính .

1. **(HSG Vĩnh Phúc 2012)** 1. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng , các cạnh bên bằng nhau và bằng  (). Hãy xác định điểm *O* sao cho *O* cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp *S.ABCD* và tính độ dài *SO* theo .

2. Cho hình chóp *S.ABC* có đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng (*SBC*). Gọi *H*  là hình chiếu của *S* lên mặt phẳng *(ABC)*. Chứng minh rằng đường thẳng *SB* vuông góc với đường thẳng *SC*, biết rằng .

3. Cho tứ diện *ABCD* thỏa mãn điều kiện  và một điểm *X* thay đổi trong không gian. Tìm vị trí của điểm *X* sao cho tổng  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**



Gọi . Do  nên các tam giác *SAC, SBD* cân tại đỉnh *S* nên *SI* vuông góc với *AC*, *BD* suy ra *SI* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Dễ thấy mọi điểm nằm trên đường thẳng *SI* cách đều các đỉnh *A, B, C, D*.

Trong tam giác *SIC*, dựng trung trực của cạnh *SC* cắt đường thẳng *SI* tại *O* suy ra .

Ta có .

Vậy .

Gọi *K* là giao điểm của đường thẳng *AH* và *BC*; trong mặt phẳng (*SBC*) gọi *D* là giao điểm của đường thẳng qua *S*, vuông góc với *SC*. Ta có *BC* vuông góc với *SH* và *SA* nên *BC* vuông góc với mặt phẳng (*SAH*) suy ra *BC* vuông góc với *SK*.

Trong tam giác vuông *SAK* ta có , kết hợp với giả thiết ta được  (1)

Trong tam giác vuông *SDC* ta có  (2)

Từ (1) và (2) ta được , từ đó suy ra  hay suy ra *SB* vuông góc với *SC*.



Gọi *G* là trọng tâm của tứ diện; *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, CD, BC, AD*. Ta có tam giác *ACD* bằng tam giác *BCD* nên  suy ra , tương tự ta chứng minh được  và đường thẳng *PQ* vuông góc với cả hai đường thẳng *BC, AD*. Từ đó suy .

Ta có 



. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *X* trùng với điểm *G*. Vậy  nhỏ nhất khi và chỉ khi *X* là trọng tâm của tứ diện *ABCD*.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh *a*, tất cả các cạnh bên đều bằng *a*. Gọi điểm  thuộc cạnh  sao cho , điểm  là trọng tâm tam giác.
2. Chứng minh rằng  song song với mp
3. Gọi () là mặt phẳng chứa  và song với . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mp()
4. Xác định điểm  thuộc  và điểm  thuộc  sao cho  song song với. Tính  theo .

**Hướng dẫn giải**



a) Gọi  là trung điểm của 

Ta có  mà  nên 

b) Qua  kẻ đường thẳng song song với  cắt  và  lần lượt tại  và. Qua  kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại  . Thiết diện của hình chóp với mp() là tứ giác .

Ta có  vì cùng song song với 

 nên tam giác  bằng tam giác  suy ra   do đó  là hình thang cân

Ta có 

 .Gọi h là độ dài đường cao của hình thang ta có 

Diện tích thiết diện là 



c) Qua  dựng đường thẳng song song với  cắt  tại N. Nối A với N cắt BD tại Q. Trong mp (AMN) từ Q dựng đường thẳng song song với MN cắt AM tại P.

Ta có PQ//MN, MN//SC nên PQ//MN

Suy ra hai điểm P, Q thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta có , 



Suy ra 

1. Cho tứ diện đều  cạnh . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và. Mặt phẳng  qua  cắt các cạnh  lần lượt tại các điểm  với ** ().

*a) Chứng minh  đồng qui hoặc song song và  là hình thang cân.*

*b) Chứng minh rằng: . Suy ra: .*

*c) Tính diện tích tứ giác  theo  và .*

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: ,, ,  phân biệt nên  song song hoặc đồng qui.

Gọi  là trung điểm, ta có:  nên , do đó 

Các mặt phẳng  đi qua  cắt theo các giao tuyến lần lượt là  nên :  . Suy ra :  hay  là hình thang.

Ta có:  là các tam giác đều, 

Nên. Suy ra : , hay  là hình thang cân.

b) Ta có: 

Vì :  nên ; 

Mặt khác:  

. Vậy : *.*

c)Ta có: *,* *,* 

Gọi h là chiều cao hình thang cân MNPQ, ta có:



Vậy: 

1. **(HSG Hà Tĩnh 2013)** Cho hình chóp *SABC* có  và tam giác  vuông tại. Biết  và góc giữa hai mặt phẳng  bằng  với . Tính độ dài theo a.

Gọi  là hình chiếu của  lên.

Ta chứng minh được

. Suy ra  vuông tại *K* và . Do đó 

Đặt . Trong tam giác vuông  ta có

*C*

*A*

*B*

*S*

*H*

*K*

*x*

*a*



Tương tự, trong tam giác vuông *SBC* ta có 

Ta có  , vì *x* > 0. Vậy 

1. **(HSG Quảng Bình 2013)** Cho hình chóp, có đáy  là hình thang cân  và,. Mặt bên  là tam giác đều. Gọi  là giao điểm của  và. Biết  vuông góc với.

*a) Tính.*

*b) Mặt phẳng () qua điểm  thuộc đoạn  ( khác) và song song với hai đường thẳng  và.*

*Xác định thiết diện của hình chóp  cắt bởi mặt phẳng (). Biết. Tìm* x *để diện tích thiết diện lớn nhất.*

1. Dễ thấy đáy  là nữa hình lục giác đều cạnh.

Kẻ ( thuộc). Suy ra  và  vuông góc.

Ta có: .

Xét tam giác  có  

Xét tam giác vuông  có  , 

1. Qua  kẻ đường thẳng song song với  cắt lần lượt tại 

Qua  kẻ các đường thẳng song song với  cắt  lần lượt tại . Thiết diện là ngũ giác.

Ta có:  cùng vuông góc với.

  =

 .

Ta có: .





Suy ra:  



Diện tích  lớn nhất bằng  khi 

1. **(HSG Đà Nẵng 2011)** 1) Cho hình hộp  Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* khác *A* và *B*. Gọi (*P*) là mặt phẳng đi qua *M* và song song với mặt phẳng 

a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (*P*).

b) Xác định vị trí của *M* để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

2) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành và *M* là trung điểm của *SC*. Một mặt phẳng (*P*) chứa *AM* và lần lượt cắt các cạnh *SB*, *SD* tại các điểm *B'*, *D'* khác *S*. Chứng minh rằng: .



Trong mp(*ABCD*), qua *M* vẽ đường thẳng song song với *AC* cắt *DB, BC* lần lượt tại *E, N*.

Trong mp(*BDD’B’*), qua *E* vẽ đường thẳng song song với *D’O* (*O=AC*∩*BD*) cắt *B’D’* tại *F*.

Trong mp(*A’B’C’D’*), qua *F* vẽ đường thẳng song song với *AC* cắt *A’D’, D’C’* lần lượt tại *R, Q*.

Trong mp(*AA’D’D*), qua *R* vẽ đường thẳng song song với *AD’* cắt *AA’* tại *S*.

Trong mp(*CC’D’D*), qua *Q* vẽ đường thẳng song song với *CD’* cắt *CC’* tại *P*.

Thiết diện là lục giác *MNPQRS*

Do các mặt đối diên của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diên *MNPQRS* song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác *ACD’*.

⇒ Các tam giác *JKI*, *ACD’*, *RQI*, *JMS*, *NKP* đồng dạng

⇒  ⇒ *MJ=NK* và *PK=QI*

⇒ Các tam giác *RQI*, *JMS*, *NKP* bằng nhau (gọi diện tích của chúng là *S*1 và gọi diện tích các tam giác *JKI*, *ACD’* lần lượt là *S*2, *S*)

Đặt  ta có điều kiện  và có:

 ⇒ *S*1 *= k*2*S*

 ⇒ *S*2 *=*( *k*2 + *2k* +1)*S*⇒ Diện tích thiết diện: 

 (dấu bằng xảy ra ⇔ )

Lấy *I* = *AM*∩*B'D'* và *O* = *AC*∩*BD*,

ta có: *S, O, I* là các điểm chung của 2 mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*)

⇒ *S*, *O*, *I* thẳng hàng.

Và *I*  là trọng tâm các mặt chéo *SAC*

⇒ 

Vẽ *BP // B'I* và *DN // D'I* ⇒ . Đặt 

⇒  ⇒  (\*)

Suy ra:  Suy ra: 

1. Cho tứ diện đều  có độ dài cạnh bằng 1. Gọi  lần lượt là hai điểm thuộc các cạnh  sao cho mặt phẳng  vuông góc với mặt phẳng. Đặt . Tìm  để diện tích toàn phần của tứ diện nhỏ nhất.

Kẻ , do  suy ra .

Mà  là tứ diện đều, nên suy ra  là tâm của tam giác đều.

Ta có:  . =; 

=  .

Suy ra =(x+y) 

Diện tích toàn phần của tứ diện :

+  + . =  +.

Từ 

Suy ra  khi 

1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi C’ là trung điểm của SC, M là điểm thuộc cạnh SA. Mặt phẳng  chứa C’M cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B’, D’.
2. Khi  song song với BC. Xác định vị trí của M để tứ giác B’C’D’M là hình bình hành.
3. Khi  thay đổi. Xác định vị trí của M để .

**Hướng dẫn giải**



1. **(2.5 điểm)** Khi  song song với BC. Xác định vị trí của M để tứ giác B’C’D’M là hình bình hành.

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Gọi   .

Ta có:



Mặt khác, vì C’ là trung điểm SC nên .

Khi đó tứ giác B’C’D’M là hình bình hành khi .

Vậy M là trung điểm của SA.

b,

****

b) Khi  thay đổi. Xác định vị trí của M để .

Xét ta giác SAC:

Qua A, C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với C’M, cắt SO tại E, F. Ta có:

** .**

Tương tự, xét ta, giác SBD, ta có:

** .**

**Vậy .**

1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, góc BAD=600; SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD);. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của DE.

1/ Chứng minh (SOF)(SAD).

2/ Tính khoảng cách từ O và C đến mặt phẳng (SAD).

3/ Gọi là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng . Tính diện tích của thiết diện này.

**Hướng dẫn giải**

****

1/ Tam giác ABD đều nên ; OF//BE  (1).

(2).

Từ (1) và (2) .

2/ Kẻ  tại H.

.

O là trung điểm của AC nên .

3/ Gọi K là hình chiếu của C trên mp(SAD) H là trung điểm của AK.

; BC//AD nên mp(BCK) cắt mp(SAD) theo giao tuyến song song với AD. Từ K kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD, SA tại M và N. Thiết diện tạo thành là hình thang BCMN.



MN cắt SF tại trung điểm I MN là đường trung bình của tam giác SAD.



1. [**VĨNH PHÚC -2010-2011**] Cho hình hộp  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh .

a) Chứng minh rằng  vuông góc với mặt phẳng  và đường thẳng  đi qua trọng tâm của tam giác .

b) Hãy xác định các điểm  lần lượt nằm trên các cạnh  sao cho  vuông góc với mặt phẳng  . Tính độ dài đoạn  theo .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có  và  nên .

Tương tự ta chứng minh được . Từ đó ta suy ra .

Gọi  là giao điểm của  và . Khi đó chính là giao điểm của  và mặt phẳng .

Do  suy ra  là trọng tâm của tam giác .

b) Đặt 

và 

Ta có 

Do đường thẳng *MN* vuông góc với mặt phẳng *(CB’D’)* nên ta có



Vậy *M, N* là các điểm sao cho 

Do đó ta có .



1. [**Cao Văn Bá – THPT Diễn Châu 3 – 2009-2010**] Cho hình chóp , có đáy là hình thang với  là một điểm di động bên trong tứ giác  . Qua  vẽ những đường thẳng lần lượt song song với  cắt các mặt phẳng  và  theo thứ tự tại  và .

a) Nêu cách dựng các điểm  .

b) Chứng minh:  không đổi.

c) Tìm tập hợp điểm  sao cho diện tích của tam giác  có giá trị lớn nhất.

1. **[TRƯỜNG THPT CẨM THUỶ I 2008-2009]** Cho tam giác  đáy là hình thang, đáy lớn  , đáy bé  . Mặt bên  là tam giác đều.  là một điểm di động trên  , mp qua điểm  và song song với  .

a) Tìm thiết diện của  với mặt phẳng mp. Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo  và  . Tìm giá trị của x để diện tích thiết diện lớn nhất

**Hướng dẫn giải**

a) Từ  kẻ đường thẳng song song  và  , lần lượt cắt  tại ,  tại  .

Từ  kẻ đường thẳng song song với cắt tại  suy ra được  là thiết diện. Dễ dàng chứng minh được là hình thang cân.



**b)**  \* Tính diện tích thiết diện 

Sử dụng định lý Talets ta suy ra được  ; 

Từ đó tính ra được 

Áp dụng công thức 



\*Tìm  để  đạt giá trị lớn nhất



Dấu "=" xảy ra khi .

1. **[THPT Quảng Xương 2 THANH HOÁ 2009- 2010]** Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh đáy bằng  và đường cao  .

a) Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng  và .

b) Gọi  là trọng tâm tam giác  , xác định hình chiếu  của  lên  và tính độ dài  theo .

**Hướng dẫn giải**

a) Gọi  là trung điểm  suy ra góc giữa  và  là góc  ,

Tam giác  vuông tại ,  suy ra  hay .

b) Kẻ  là đường cao tam giác  suy ra  vuông góc , từ  kẻ đường thẳng song song với  trong cắt  tại  thì là điểm cần tìm.

Ta có 



1. Cho tứ diện  có các đường cao    đồng qui tại một điểm thuộc miền trong của tứ diện. Các đường thẳng  lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  theo thứ tự tại . Chứng minh:  .

a. Cho tứ diện . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Trên cạnh  lấy điểm  sao cho  . Tìm giao điểm  của đường thẳng  với mặt phẳng . Chứng minh rằng  .

b. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Hai điểm  và  lần lượt thay đổi trên các đoạn thẳng  sao cho , Gọi  là trọng tâm tam giác  . Chứng minh rằng  luôn song song với một mặt phẳng cố định khi  thay đổi và tìm  để .

1. [**ÔN THI ĐỘI TUYỂN FESTIVAL – ĐỀ SỐ 3**] Cho hình chóp  đều cạnh  , cạnh bên bằng . Gọi  là mặt phẳng qua  song song với  và vuông góc với mặt phẳng . Gọi  là trung điểm của .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với (P).Tính khoảng cách từ điểm  đến .

b) Tính sin với  là góc giữa  và .

1. [**ÔN THI ĐỘI TUYỂN FESTIVAL – ĐỀ SỐ 2**] Cho hình lăng trụ  có  và góc  . Gọi  là trung điểm của  .

a) CMR:  .

b) Tính khoảng cách từ  đến mặt phẳng .

1. [**HỌC SINH GIỎI TỈNH NAM ĐỊNH, LỚP 11, 2005**] Cho tứ diện  có  đôi một vuông góc với nhau tại . Gọi  thứ tự là trung điểm của các cạnh  .

a) Chứng minh tam giác  là tam giác nhọn.

b) Biết số đo 3 góc của tam giác  là  . Gọi  là số đo của góc nhị diện  , tìm theo  và .

c) Gọi  là độ dài lớn nhất trong độ dài 3 cạnh  và gọi  là độ dài lớn nhất trong độ dài 3 đường cao của tam giác . Chứng minh rằng: 

1. [**HỌC SINH GIỎI TỈNH NAM ĐỊNH, LỚP 11, 2004**] Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng .

a) Ta coi hình chóp đã cho là tứ diện  có trọng tâm , gọi  là góc giữa mp và mp. Hãy tính  để  cách đều tất cả các mặt của .

b) Biết  . Xét mặt phẳng  thay đổi đi qua , sao cho mp cắt các đoạn thẳng  thứ tự tại  . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác  theo .

1. [**HỌC SINH GIỎI LỚP 11 TỈNH QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2011-2012**] Cho tứ diện đều . Gọi  là mặt phẳng đi qua đường cao  của tứ diện; mặt phẳng  cắt các mặt phẳng  và  lần lượt theo các giao tuyến  . Các giao tuyến này lần lượt tạo với mặt phẳng  các góc . Chứng minh: 
2. [**NGHỆ AN 2015-2016**] Cho hình thoi  có góc  ,  . Gọi  là trung điểm  . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  tại  lấy điểm  thay đổi khác . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho  .

a) Khi  , chứng minh rằng đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  .

b) Tính  theo  để góc giữa  và  có số đo lớn nhất.

1. [**TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG - BÌNH ĐỊNH**] Trong không gian cho khối đa diện có số cạnh qua mỗi đỉnh là một số chẵn .Một thiết diện tạo bởi mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của khối đa diện với khối đa diện .Chứng minh số cạnh của thiết diện là một số chẵn.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử số đỉnh của thiết diện là  ;Ta xét một tron.

Tổng các cạnh đi qua m đỉnh mới là .

Vậy số cạnh của khối đa diện này bằng  là số chẵn

1. [**VĨNH PHÚC 2009-2010**] Cho hình chóp , có đáy  là hình chữ nhật với  và  . Gọi  là hình chiếu vuông góc của **** trên  và  là hình chiếu vuông góc của  trên .

a) Tính độ dài  theo .

b) Gọi  lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng  . Chứng minh rằng các đoạn thẳng  và  vuông góc với nhau.

1. [**TRƯỜNG THPT QUỲNH LƯU NGHỆ AN 2016 - 2017**] Cho tứ diện  đều, gọi  là trung điểm của các cạnh  và . Trên đường thẳng  và ta chọn các điểm  sao cho . Tính độ dài  biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng 1.

**Hướng dẫn giải**



Ta có  là giao tuyến của hai mặt phẳng : Mặt phẳng chứa  và song song với  và mặt phẳng chứa  và song song với .

Trong mặt phẳng  kẻ  cắt  ở  .

Qua  kẻ  ( thuộc  ) ,  cắt  tại  . Vậy  .

Ta có  là các trung điểm của  và  

Mà 

Ta có . Vậy .

1. [**TRƯỜNG THPT QUỲNH LƯU NGHỆ AN 2016 - 2017**] Cho hình chóp , đáy  là hình vuông và . Mặt phẳng  thay đổi nhưng luôn cắt các cạnh  lần lượt tại  ( không trùng với đầu mút các đoạn thẳng . Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là tâm đáy , . Ta có thẳng hàng (do chúng thuộc giao tuyến hai mặt phẳng và ).



Đặt  Trong tam giác , ta có:





Tương tự với tam giác  ta được 

Từ (1) và (2) ta suy Ta có ĐPCM.

1. [THPT QUỲNH LƯU – HOÀNG MAI NGHỆ AN 2016 - 2017] Cho hình chóp , đáy  là nửa lục giác đều với ,  Mặt bên  là tam giác đều. Gọi  là giao điểm của  và . Cho biết  vuông góc với .

a) Tính .

b) Mặt phẳng  qua điểm  thuộc đoạn  (** không trùng với ), song song với  và . Xác định thiết diện của hình chóp  với mặt phẳng  Tính diện tích thiết diện theo  và  biết . Tìm  ** để diện tích thiết diện đó lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

a) Tính 

+) Dựng  song song  (thuộc cạnh ); 

Ta có: 

+) Mặt khác: 

+) Áp dụng định lý cosin trong tam giác  , tính được 

+) Do  và  nên .

Trong tam giác vuông  , tính được .

b) Xác định thiết diện của hình chóp *S*.*ABCD* với mặt phẳng 

+) Xác định được thiết diện là tam giác *NPQ* (với *N*, *P*, *Q* lần lượt nằm trên các cạnh *BA*, *BC*, *BS*)

+) Ta có: 

Diện tích thiết diện: 

+) Trong tam giác  , tính được 

+) Trong tam giác  , tính được 

+) Diện tích thiết diện: 

+) Vì  thuộc đoạn  ( ) nên 

Do đó, . Vậy, .

1. Cho tứ diện *SABC*. Hai điểm *I*, *J* thứ tự chuyển động trên *AB*, *AC* sao cho . Chứng minh rằng mặt phẳng (*SIJ*) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

**Hướng dẫn giải**

Đặt  Gọi *M* là trung điểm *BC*, gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Gỉa sử.

Ta có:  Ta thấy  Vậy *G, I, J* thẳng hàng. Hay *IJ* luôn đi qua điểm *G* cố định, hay mặt phẳng (*SIJ*) luôn đi qua đường thẳng cố định *SG.*

1. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi *A, B, C* là ba góc của tam giác *ABC* và  lần lượt là góc tạo bởi *OA, OB, OC* với mặt phẳng *(ABC).* Chứng minh rằng:

.

**Hướng dẫn giải**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC)

 H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi AK là đường cao của tam giác ABC. Ta có: 

Mặt khác: 

Tương tự:  nên tam giác ABC nhọn.

- Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có:

  R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

- Trong tam giác ABH: 

Nên: 

Từ (1) và (2) ta có: 

Chứng minh tương tự ta cũng có: 

Vậy ta có ĐPCM.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB=c, AC=b.Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông

góc với mặt phẳng (ABC) ; S là một điểm di động trên (P) sao cho S.ABC là hình chóp có hai mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là và . Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.

a. Chứng minh rằng .

b. Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của .

**Hướng dẫn giải**

1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, tất cả các cạnh bên đều bằng *a*. Gọi điểm *M* thuộc cạnh *SD* sao cho *SD = 3SM*, điểm *G* là trọng tâm tam giác *BCD*.

a) Chứng minh rằng *MG* song song với mp*(SBC)*

b) Gọi () là mặt phẳng chứa *MG* và song với *CD*. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mp()

c) Xác định điểm *P* thuộc *MA* và điểm *Q* thuộc *BD* sao cho *PQ* song song với *SC*. Tính *PQ* theo *a*.

**Hướng dẫn giải**



Gọi I là trung điểm của BC

Ta có 

Mà  nên MG //(SBC)

Qua G kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại H

Thiết diện của hình chóp với mp() là tứ giác EFHM

Ta có HM//EF vì cùng song song với CD

 nên tam giác DME bằng tam giác CHF suy ra ME = HF do đó EFHM là hình thang cân

Ta có: 



Gọi h là độ dài đường cao của hình thang ta có 

Diện tích thiết diện là 



Qua M dựng đường thẳng song song với SC cắt CD tại N. Nối A với N cắt BD tại Q. Trong mp (AMN) từ Q dựng đường thẳng song song với MN cắt AM tại P.

Ta có PQ//MN, MN//SC nên PQ//MN

Suy ra hai điểm P, Q thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta có , 



Suy ra .

1. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và B’C’. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của AN và DM.

A

B

C

D

A’

B’

C’

D’

M

N

I

K

H

Gọi I là trung điểm của BC.

NI  mp(ABCD) (1đ)

Chứng minh được:



Gọi H là giao điểm của AI và DM, từ H hạ ,HK là đoạn vuông góc chung của AN và DM,

Tính được 



🛆AKH đồng dạng 🛆AIN





Vậy khoảng cách AN và DM là:

1. Cho tứ diện ABCD, Chứng minh rằng 6 mặt phẳng ,mỗi mặt phẳng đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại một điểm.
2. Cho hình chóp *SABC* có  và tam giác *ABC* vuông tại *B*. Biết  và góc giữa hai mặt phẳng *(SAB), (SAC)* bằng  với . Tính độ dài *SC* theo a.

**Hướng dẫn giải**

|  |  |
| --- | --- |
| Xét hai trường hợp:  +) B và C không tù. Khi đó  Suy ra | *A*  *B*  *C*  *B’*  *C’*  *H* |

.

+) B hoặc C tù.

Do  nên  và C tù .

Còn  (giống trường hợp 1)  Suy ra .

1. Cho tứ diện ,  là điểm bất kì nằm trong miền tam giác . Từ  kẻ các đường thẳng song song với  cắt các mặt phẳng  lần lượt tai . Chứng minh rằng:  không đổi.
2. Cho hình hộp  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh .
3. Chứng minh rằng  vuông góc với mặt phẳng  và đường thẳng  đi qua trọng tâm tam giác .
4. Hãyxác định các điểm  lần lượt nằm trên các cạnh  sao cho  vuông góc với mặt phẳng  Tính độ dài đoạn  theo .
5. Cho hình chóp . Tứ giác đáy có  và  cắt nhau tại .  và  cắt nhau tại .  và  cắt nhau tại . là mặt phẳng cắt  lần lượt tại .
6. Tìm giao điểm  của  và .
7. Với điều kiện nào của  thì  là hình bình hành.
8. Cho tứ diện , mặt phẳng () song song với hai đường thẳng  và . Gọi  tương ứng là giao điểm của () với các đường thẳng . Xác định tất cả các vị trí của () để:
9. Tứ giác  là hình thoi.
10. Diện tích thiết diện giữa () và tứ diện  là lớn nhất.
11. Cho tam giác  vuông tại  có  .Gọi  là mặt phẳng qua  và vuông góc với mặt phẳng ; là một điểm di động trên sao cho là hình chóp có hai mặt bên ,  hợp với đáy  hai góc có số đo lần lượt là  và . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên .
12. Chứng minh rằng .
13. Tìm giá trị lớn nhất của  và khi đó hãy tìm giá trị của .
14. Cho hình lăng trụ tứ giác . Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với hai đáy của lăng trụ, cắt các đoạn thẳng AB’, BC’, CD’, DA’ tương ứng lần lượt tại các điểm M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (P) sao cho tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất.
15. Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình vuông và SAB là tam giác đều, mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác SAB. Gọi M là một điểm di động trên đoạn AB và P là hình chiếu vuông góc của S lên CM.
16. Tìm quỹ tích của điểm P khi M di động.
17. Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng nối M với trung điểm của đoạn SC đạt giá trị lớn nhất.
18. Gọi O là một điểm trên cạnh AB của tứ diện ABCD (O không trùng với A và B). Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AOCD cắt các cạnh BC và BD của tứ diện ABCD lần lượt tại M và N (MC, ND). Mặt cầu ngọai tiếp tứ diện BOCD cắt các cạnh AC và AD của tứ diện ABCD lần lượt tại P và Q (PC, QD). Chứng minh rằng tam giác OMN đồng dạng với tam giác OQP.
19. Cho P là một điểm cố định nằm bên trong một hình cầu cho trước. Ba đoạn thẳng PA, PB, PC đôi một vuông góc với nhau, có ba đầu mút A, B, C nằm trên mặt cầu. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
20. Tính PG theo PA, PB, PC.
21. Tìm quỹ tích điểm G khi A, B, C thay đổi.
22. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đỉnh S, cạnh đáy của hình chóp có độ dài bằng 2, chiều cao bằng h. Gọi là hình cầu tâm O bán kính r nội tiếp hình chóp; gọi (K;R) là hình cầu tâm K bán kính R tiếp xúc với 8 cạnh của hình chóp. Biết rằng khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABCD) bằng khoảng cách từ K đến mặt phẳng (ABCD).
23. Chứng minh rằng: 
24. Tính giá trị của h, từ đó suy ra thể tích hình chóp.
25. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, có các cạnh bằng a. Xét các đoạn thẳng MN có hai đầu mút M, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng BC’, CA’ và song song với mặt phẳng(ABB’A’). Tìm theo a độ dài của đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng ấy. Khi MN ngắn nhất hỏi MN có vuông góc với BC’ và CA’ hay không? Chứng minh.
26. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân được vuông góc hạ từ O đến (ABC).
27. Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác ABC.
28. Chứng minh rằng .
29. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB=2CD=2AD, SA vuông góc với đáy tại A. Gọi M là trung điểm của SC, K là điểm di động trên AB. Tìm tập hợp hình chiếu của H của M lên CK.
30. Cho tứ diện  có trọng tâm . Tìm điểm  sao cho tổng:

 đạt giá trị bé nhất.