# **Phương pháp tọa độ trong không gian**

**I. Hệ tọa độ trong không gian**

**1. Hệ trục tọa độ trong không gian**

**Vấn đề cần nắm:**

**Chủ đề I**

Trong không gian, cho ba trục  vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục .

**Định nghĩa**

I. Lí thuyết về hệ tọa độ trong không gian

II. Phương trình mặt phẳng

III. Phương trình đường thẳng

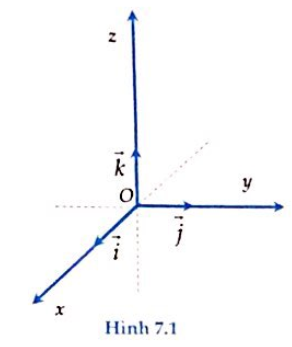
IV. Các dạng toán mặt cầu

|  |  |
| --- | --- |
|  | Hệ gồm ba trục đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ Đề các (Descartes) vuông góc *Oxyz* trong không gian (hình 7.1). |

Điểm *O* được gọi là **gốc tọa độ***.*

Các mặt phẳng  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các **mặt phẳng tọa độ**.

Không gian với hệ tọa độ *Oxyz* được gọi là **không gian *Oxyz***

**Nhận xét: ** và 

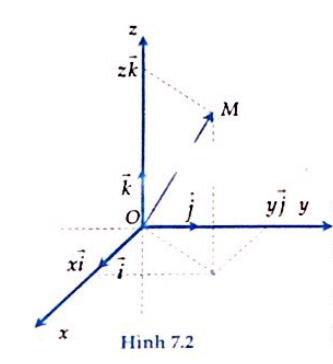
**2. Tọa độ của vectơ**

Trong không gian *Oxyz* với các vectơ đơn vị  trên các trục *Ox, Oy, Oz,* cho một vectơ . Khi đó tồn tại duy nhất bộ ba số thực  sao cho



Bộ ba số thực  thỏa mãn hệ thức trên được gọi là tọa độ của vectơ  đối với hệ trục *Oxyz*.

Kí hiệu  hoặc , trong đó *x* là hoành độ, *y* là tung độ, *z* là cao độ của vectơ .

**Tính chất**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho các vectơ . Khi đó  **a.**  **b.** .  **c.**  với mọi số thực *k*.  **d.**  **e.**  **f.** Hai vectơ  có phương trình vuông góc với nhau khi và chỉ khi  **g.** Hai vectơ  cùng phương với nhau khi và chỉ khi có một số thực *k* sao cho |

**3. Tọa độ của một điểm**

Nếu  là tọa độ của vectơ  thì ta cũng nói  là tọa độ của điểm *M* với hệ tọa độ *Oxyz* (hình 7.2).

Kí hiệu  hay 

Trong đó *x* là hoành độ, *y* là tung độ, *z* là cao độ của điểm *M*.

**4. Liên hệ giữa tọa độ của vectơ và tọa độ của hai điểm đầu mút**

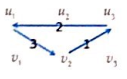
Trong không gian *Oxyz*  cho hai điểm  và  thì khi đó tọa độ của vectơ  và độ dài của nó là:



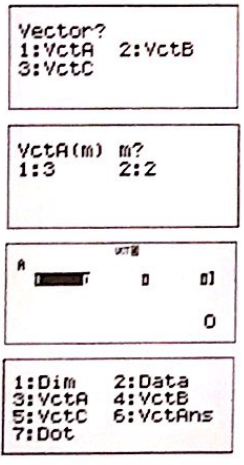
**5. Tích có hướng của hai vectơ**

**Định nghĩa**

**STUDY TIP**



|  |  |
| --- | --- |
|  | Tích có hướng của hai vectơ  và , kí hiệu  là vectơ  xách định bởi  **i.**  có phương vuông góc với  và  **ii.** Bộ ba  là bộ ba vectơ thuần (đọc thêm vì trong SGK cơ bản không giải thích vấn đề này)  **iii.** , tỏng đó  là góc giữa hai vectơ  và |

**Định lý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Trong không gian *Oxyz* cho hai vectơ  và . Khi đó |

Một vài mẹo để tính nhanh tích có hướng cảu hai vectơ.

**Cách 1:** Viết hai tọa độ của hai vectơ song song sau đó nhớ nhanh như sau:

Ví dụ hai vectơ  và  ta viết tọa độ của hai vectơ song song và ghép các định thức theo chiều tam giác mũi tên từ giữa sang phải rồi trái như ở STUDY TIPS. Cách nhớ mẹo này để độc giả dùng khi không nhớ công thức.

Đến đây ta tìm được công thức tính tích có hướng



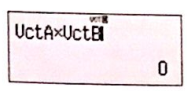
**Cách 2:** Sử dụng máy tính cầm tay.

Tôi xin nhắc lại cách tính tích có hướng bằng máy tính 570 VN Plus mà tôi đã giới thiệu trong cuốn “Bộ đề tinh túy môn toán” như sau:

1. Vào MODE  8:VECTƠ (để chuyển máy tính sang chế độ tính toán với vectơ).

2. Khi máy hiện như ở góc trái chọn 1: VctA để nhập tọa độ vectơ thứ nhất, tiếp theo máy hiện VctA(m), ta chọn 1:3 để nhập tọa độ vectơ có hoành độ, tung độ, cao độ.

3. Tiếp theo, máy hiện như bên, ta sẽ nhập tọa độ vectơ thứ nhất vào.

4. Sau khi đã nhập tọa độ vectơ thứ nhất, ấn AC để xóa màn hình. Tiếp tục thực hiện nhập vectơ thứ hai như các bước trên, tuy nhiên ở bước 2, ta không chọn 1 nữa bởi 1: VctA đã có tọa độ, nên ta chọm 2: VctB và tiếp tục thực hiện gán tọa độ vectơ thứ hai.

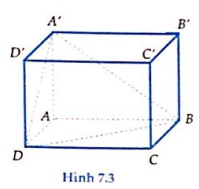
5. Tiếp tục ấn AC để xóa màn hình.

6. Ấn SHIFT 5 máy hiện như bên, chọn 3 để hiện VctA, ấn nút nhân tiếp tục lần nữa chọn 4 để hiện VctB. Máy hiện như bên.

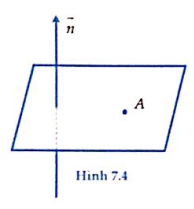
7. Ấn = để nhận kết quả.

**Tính chất**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **1.**  **2.**  **3.**  **4.** |

**Hệ quả**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **1.** Ba vectơ  và  đồng phẳng khi và chỉ khi  (tích hỗn tạp).  **2.** Diện tích hình bình hành *ABCD* là  và  **3.** Nếu  là hình hộp có thể tích *V* thì  và do đó |

Từ hệ quả trên, ta có thể tính nhanh các thể tích, diện tích mà không cần tìm các độ dài.

**II. Phương trình mặt phẳng**

**1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Vectơ  được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  nếu giá của  vuông góc với mặt phẳng  (hình 7.4). |

**Chú ý**

Nếu  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng   cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng .

Cho mặt phẳng  đi qua điểm  và có vectơ pháp tuyến  Khi đó phương trình mặt phẳng  có dạng



**Định nghĩa**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Phương trình có dạng , trong đó *A, B, C* không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng. |

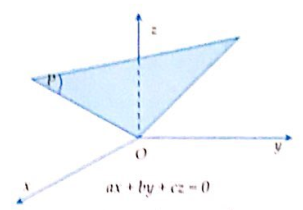
**Nhận xét**

|  |  |
| --- | --- |
|  | i. Nếu mặt phẳng  có phương trình tổng quát là  thì nó có vectơ pháp tuyến .  ii. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm  nhận vectơ  khác  làm vectơ pháp tuyến có dạng |

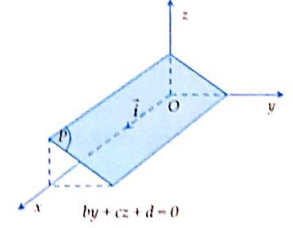
**Các trường hợp đặc biệt**

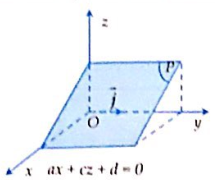
Trong không gian *Oxyz*, xét mặt phẳng  với 

**1.** Trường hợp  thì mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ.

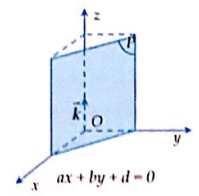


**2.** Trường hợp  thì mặt phẳng  có vtpt  khi đó mặt phẳng  song song hoặc chứa trục *Ox*. Khi đó mặt phẳng  chứa trục *Ox* khi và chỉ khi  đi qua gốc tọa độ *O*, hay 

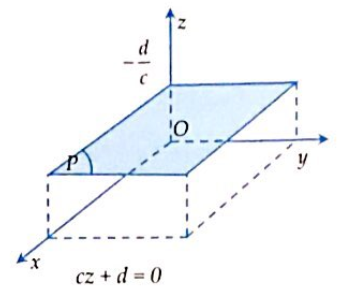


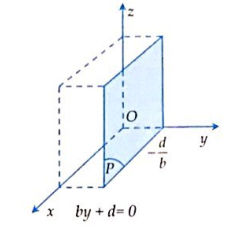
**3.** Trường hợp , mặt phẳng  song song hoặc chứa trục *Oy*.

**4.** Trường hợp , mặt phẳng  song song hoặc chứa trục *Oz*.

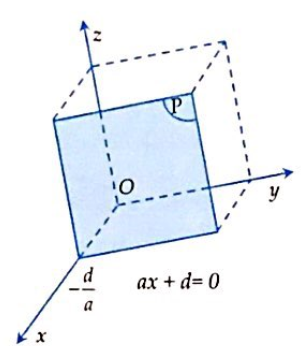


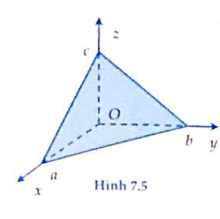
**5.** Trường hợp  Khi đó mặt phẳng  có vtpt . Trong trường hợp này, mặt phẳng  song song hoặc trùng với mặt phẳng . Khi đó  khi và chỉ khi  đi qua gốc tọa độ *O*, hay 



**6.** Trường hợp  , mặt phẳng  song song hoặc trùng với mặt phẳng .

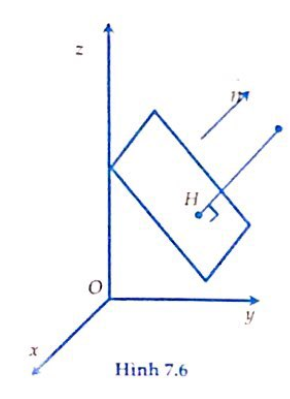
**7.** Trường hợp , mặt phẳng  song song hoặc trùng với mặt phẳng 



**8.** Trường hợp . Đặt , phương tình mặt phẳng được đưa về dạng . Mặt phẳng lần lượt cắt các trục tọa độ  tại các điểm  và phương trình mặt phẳng viết dưới dạng này được gọi phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đến đây ta có bài toán tổng quát:

Mặt phẳng  (hình 7.5) đi qua ba điểm  có phương trình 

**2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Trong không gian *Oxyz* cho hai mặt phẳng  lần lượt có phương trình ,  với . Khi đó      cắt |

**3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng**

Trong không gian *Oxyz* cho mặt phẳng , với  và điểm . Khi đó khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng  là độ dài đoạn *MH*, với *MH* là đoạn thẳng vuông góc với  tại *H* (hình 7.6).

Độ dài *MH* được tính bằng công thức 

**Hệ quả**

Với  và

 là hai mặt phẳng song song thì khoảng cách giữa  và được tính bằng công thức: 

**4. Góc giữa hai mặt phẳng.**

Góc giữa hai mặt phẳng  và , kí hiệu  là góc giữa hai đường thẳng *a* và *b* mà  và .

Từ đó suy ra 

Từ đây ta có 

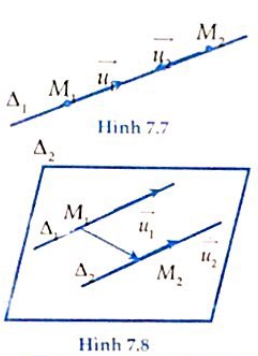
**Dạng toán viết phương trình mặt phẳng**

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Dạng 1:** Cho mặt phẳng  đi qua  và chứa hai đường thẳng phân biệt (không cùng phương) có vectơ chỉ phương lần lượt là  và | là vectơ pháp tuyến của . |
| **Dạng 2:** Cho mặt phẳng  đi qua  và song song với mặt phẳng | . |
| **Dạng 3:** Cho mặt phẳng đi qua ba điểm *A; B; C* không thẳng hàng. | là vectơ pháp tuyến của . |
| **Dạng 4:** Cho mặt phẳng  đi qua điểm *M* và một đường thẳng *d* không chứa *M*. | Trên *d* lấy điểm *A* và tìm vectơ chỉ phương của *d* là  là một vectơ pháp tuyến của |
| **Dạng 5:** Cho mặt phẳng  đi qua *M* và vuông góc với đường thẳng *d*. | vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* là vectơ pháp tuyến của . |
| **Dạng 6:** Cho mặt phẳng  đi qua 2 đường thẳng cắt nhau . | - Xác định các vtcp  của .  - vtpt của  là  - Lấy một điểm *M* thuộc một trong hai đường thẳng trên từ đó viết phương trình mặt phẳng |
| **Dạng 7:** Cho mặt phẳng  chứa  và song song với (hai đường thẳng này chéo nhau). | - Xác định các vtcp  của .  - vtpt của  là .  - Lấy một điểm  (Vì  không nằm trong ). |
| **Dạng 8:** Cho mặt phẳng song song với hai đường thẳng  chéo nhau và đi qua điểm *M*. | - Xác định các vtcp  của .  - vtpt của  là .  - Viết phương trình  đi qua *M* và có vtpt . |
| **Dạng 9:** Cho mặt phẳng  song song với hai đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng . | - Xác định vtcp  của *d* và vtpt  của .  - Một vtpt của là  - Lấy  và viết phương trình mặt phẳng . |
| **Dạng 10:** Cho mặt phẳng  đi qua *M* và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau . | - Xác định ctpt của  và  lần lượt là .  - Một vtpt của  là . |
| **Dạng 11:** Cho mặt phẳng  đi qua đường thẳng *d* cho trước và cách điểm *M* cho trước một khoảng *k.* | - Giả sử  có phương trình  - Lấy hai điểm  ta được hai phương trình (1);(2).  - Từ điều kiện khoảng cách ta được phương trình (3).  - Giải hệ phương trình ta được *a; b; c; d*. |
| **Dạng 12:** Cho mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  tại điểm *A*. | Vtpt của |

**III. Phương trình đường thẳng**

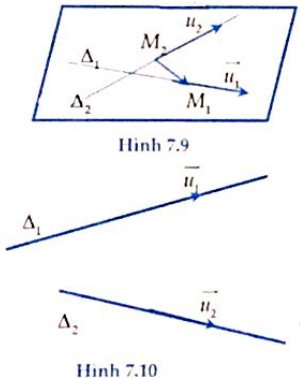
**1. Hai dạng biểu diễn của phương tình đường thẳng trong không gian**

Trong không gian *Oxyz* cho đường thẳng  đi qua điểm  và có vectơ chỉ phương  (do  nên ), Khi đó phương trình tham số của đường thẳng  có dạng  với t là tham số.

Khi , khử *t* từ hệ ta được :

Phương trình trên được gọi là **phương trình chính tắc** của đường thẳng .

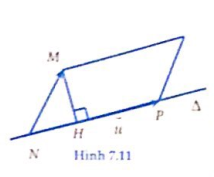
**2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**

Trong không gian *Oxyz* cho đường thẳng  đi qua  có vectơ chỉ phương  và đường thẳng  đi qua  có vectơ chỉ phương .

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.  khi và chỉ khi ba vectơ  đôi một cùng phương, tức là =0 (hình 7.7).  **2.**  khi và chỉ khi  nhưng không cùng phương với , tức là  (hình 7.8)  **3.**  và  cắt nhau khi và chỉ khi  không cùng phương với , đồng thời ba vectơ  và đồng phẳng, tức là  (hình 7.9)  **4.**  và  chéo nhau khi và chỉ khi ba vectơ  và  không đồng phẳng, tức là  (hình 7.10) |

Ta cũng có thể xét tính tương đối của hai đường thẳng dựa trên hệ phương trình hai ẩn như sau:  (1)

|  |  |
| --- | --- |
|  | **1.** Hai đường thẳng  và  cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình *(1)* có đúng một nghiệm.  **2.** Hai đường thẳng  và  chéo nhau khi và chỉ khi hệ phương trình *(1)* vô nghiệm và  không cùng phương với .  **3.** Hai đường thẳng  và  song song khi hệ phương trình *(l)* vô nghiệm và  cùng phương với .  **4.** Hai đường thẳng  và  trùng nhau khi hệ *(l)* có vô số nghiệm. |

**3. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

**a. Khoảng cách từ mọi điểm đến một đường thẳng**

Trong không gian cho điểm *M* và đường thẳng  đi qua điểm *N*, với vectơ chỉ phương . Khoảng cách từ *M* đến  là độ dài đoạn vuông góc *MH* kẻ từ *M* đến  (hình 7.11)

**Cách 1:** Lấy điểm *P* trên  sao cho . Khi đó *MH* là độ dài đường cao kẻ từ *M* của tam giác *MNP*. Vì  nên 

**STUDY TIP**

Khoảng cách giữa điểm *M* đến đường thẳng  trong không gian được tính bằng công thức



Trong đó *N* là một điểm thuộc 

**Cách 2:** Để tính khoảng cách từ *M* đến đường thẳng , ta có thể xác định tọa độ hình chiếu *H* của *M* trên  rồi tính độ dài *MH*.

***Chú ý:*** Ở cách 2, để tính được tọa độ điểm *H* ta phải đưa phương trình đường thẳng  về dạng tham số, từ đó tham số hóa tọa độ điểm *H*.

Dựa vào dữ kiện  ta sẽ tìm được tọa độ điểm *H*.

**Ví dụ:** Tính khoảng cách từ điểm  đến đường thẳng



**Lời giải**

**Cách 1:** Lấy điểm  trên . Khi đó khoảng cách từ điểm *A* đến đường thẳng  được tính bằng công thức: 

**STUDY TIP**

Cả hai cách làm đều khá là nhanh, tùy theo lựa chọn của độc giả mà áp dụng, tuy nhiên để nhớ công thức nhanh, cần nắm vững cách để suy luận ra công thức đó.

Ta có . Khi đó 

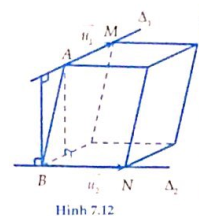


**Cách 2:** Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên . Khi đó 



Mà , do vậy



Khi đó 

**b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  và  là độ dài đoạn vuông góc chung của chúng.

Lấy điểm *A* thuộc , điểm *B* thuộc .

Gọi  lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng  và .

Trên  và  lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho . Khi đó khoảng cách giữa  và là khoảng cách giữa hai đáy của hình hộp đựng trên ba cạnh *MA, AB, BN* (hình 7.12).

**STUDY TIP**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  và  trong không gian được tính bằng công thức

trong đó *A, B* là hai điểm lần lượt thuộc  và .

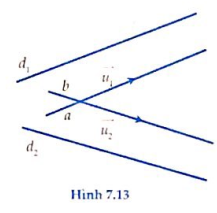
Mặt khác ở phần hệ quả của bài hệ tọa độ trong không gian ta có công thức của hình hộp bằng  Do vậy 

**4. Góc giữa hai đường thẳng. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng**

**a. Góc giữa hai đường thẳng**

Góc giữa hai đường thẳng  được kí hiệu là , được xác định bởi các trường hợp:

- Nếu  cùng phương với thì 

- Nếu và  cắt nhau tại *I* thì  bằng **số đo góc nhỏ nhất** tròn bốn góc tạo thành.

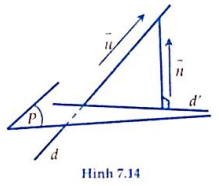
- Nếu và  chéo nhua thì  trong đó  và  (Hình 7.13)

Do góc giữa hai đường thằng là số đo góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo được.

Do vậy  Do vạy nếu đặt  thì ta có



**b. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng**

Góc giữa hai đường thẳng *d* và mặt phẳng , kí hiệu là , xác định bởi:

- Nếu  thì .

- Nếu *d* không vuông góc với  thì  bằng góc giữa *d* và hình chiếu của *d* trên  (hình 7.14).

Ta có 

Gọi  lần lượt là vectơ chỉ phương của *d* và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng . Khi đó nếu đặt  thì



**Dạng toán viết phương trình đường thẳng**

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Dạng 1:** Cho đường thẳng *d* đi qua hai điểm *A; B*. | - Vtcp của *d* là |
| **Dạng 2:** Cho đường thẳng *d* đi qua  và song song với | - Vì  nên vtco của  cũng là vtcp của *d*. |
| **Dạng 3:** Cho đường thẳng *d* đi qua  và vuông góc với mặt phẳng cho trước. | - Vì  nên vtpt của  cũng là vtcp của *d*. |
| **Dạng 4:** Cho đường thẳng *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng | - **Cách 1:** Tìm 1 điểm và 1 vtcp  + Tìm một điểm *A* trên *d* bằng cách giải hệ phương trình  + Tìm 1 vtcp của *d*:  - **Cách 2:** Tìm hai điểm , rồi viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm đó. |
| **Dạng 5:** Cho đường thẳng *d* đi qua điểm  và vuông góc với 2 đường thẳng | - Vì  nên một vtcp của *d* là |
| **Dạng 6:** Cho đường thẳng *d* đi qua điểm , vuông góc và cắt đường thẳng | - Gọi *H* là hình chiếu của *M* trên  Khi đó *d* là đường thẳng đi qua *M; H*. |
| **Dạng 7:** Cho đường thẳng *d* đi qua điểm  và cắt 2 đường thẳng | - **Cách 1:** Gọi  Từ điều kiện  thẳng hàng ta tìm được  phương trình *d*.  - **Cách 2:** Gọi . Khi đó  Do đó |
| **Dạng 8:** Cho đường thẳng *d* nằm trong mặt phẳng  và cắt hai đường thẳng | đi qua *A;B*. |
| **Dạng 9:** Cho đường thẳng  và cắt hai đường thẳng  (Biết  luôn cắt ) | Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và , mặt phẳng  chứa  và . Khi đó |
| **Dạng 10:** Cho đường thẳng *d* là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau | **Cách 1:** Gọi . Từ điều kiện  ta tìm được  Khi đó *d* là đường thẳng  **Cách 2:** - Vì  nên có một vtcp là  - Lập phương trình mặt phẳng  chứa *d* và :  + Lấy một điểm *A* trên .  +Một vtcp của  là  - Lập phương trình mặt phẳng  và chứa  - Khi đó |
| **Dạng 11:** Cho đường thẳng *d* là hình chiếu của đường thẳng  lên mặt phẳng . | - Lập phương trình mặt phẳng  chứa  và vuông góc với .  + Lấy  + Vì  chứa  và vuông góc với  nên  - Khi đó |
| **Dạng 12:** Cho đường thẳng *d* đi qua *M*, vuông góc với  và cắt . | - **Cách 1:** Gọi *N* là giao điểm của *d* và . Từ điều kiện , ta tìm được *N*. Khi đó *d* là đường thẳng *MN*.  - **Cách 2:**  + Viết phương trình mặt phẳng đi qua *M* và vuông góc với  + Viết phương trình mặt phẳng  chứa *M* và . Khi đó . |

**Đọc thêm: Bài toán cực trị trong không gian**

**1. Bài toán cực trị về mặt phẳng, đường thẳng quanh xung quanh một điểm cố định**

**Bài toán 1:** Cho hai điểm phân biệt *A* và *B*. Tìm vị trí của mặt phẳng  chứa *B* và cách *A* một khoảng lớn nhất.

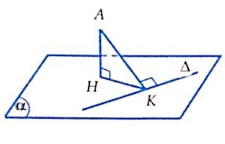
**Lời giải**

Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên mặt phẳng . Khi đó tam giác *ABH* vuông tại *H* và  Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi *H* trùng *B*, khi đó  là mặt phẳng đi qua *B* và vuông góc với *AB*.

Bài toán tương tự là tìm đường thẳng qua *B* và cách *A* một khoảng lớn nhất.

**2. Bài toán cực trị về mặt phẳng quay xung quanh một đường thẳng cố định**

**Bài toán 2:** Cho điểm *A* và đường thẳng  không đi qua *A*. Tìm vị trí của mặt phẳng  chứa  sao cho khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng đó là lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của *A* trên , *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên đường thẳng .

Ta thấy  (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Vậy  lớn nhất khi và chỉ khi , hay vị trí mặt phẳng  cần tìm là  chứa  và vuông góc với *AK.*

Lúc này mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến  trong đó .

**Ví dụ 1:** Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  chứa đường thẳng  và cách  một khoảng lớn nhất là

**A.  B.  C.  D. **

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta có  Vậy áp dụng công thức vừa chứng minh ta có 

**Bài tập áp dụng**

**1.** Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng  cách  một khoảng lớn nhất.

**A.**  **B.** 

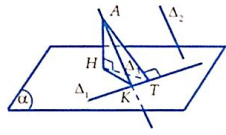
**C.**  **D.** 

**2.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**A.  B. **

**C.  D. **

Đáp án: 1.**A**; 2.**B**

**Bài toán 3\*:** Cho hai đường thẳng  phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với một góc lớn nhất.

**Lời giải**

Vẽ một đường thẳng bất kì  song song với  và cắt  tại *K*. Gọi *A* là điểm cố định trên  và *H* là hình chiếu của *A* trên mặt phẳng . Ta có góc giữa  và  chính là góc  kẻ .

Khi đó  vuông tại *T*, nên:  (không đổi).

Vậy góc  lớn nhất khi và chỉ khi  hay .

Góc lớn nhất đó chính bằng góc 

Khi đó mặt phẳng  cần tìm chứa  và vuông góc với mặt phẳng  hay nó có một vectơ chỉ phương là 

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  là 

**Ví dụ 2:** Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với đường thẳng  một góc lớn nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta có 

**3. Bài toán cực trị về họ đường thẳng quay xung quanh một điểm cố định trong mặt phẳng cố định**

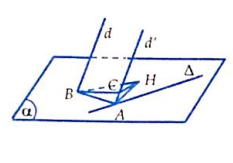
**Bài toán 4\*:** Cho mặt phẳng  và điểm *A* thuộc , điểm *B* khác *A*. Tìm đường thẳng  nằm trong  đi qua *A* và cách *B* một khoảng nhỏ nhất, lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *B* trên .

Ta thấy 

Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi và chỉ khi .

Khi đó  là đường thẳng qua *A* và có một vectơ chỉ phương là .

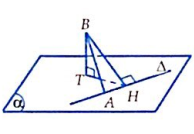
Gọi *T* là hình chiếu của *B* trên . Ta thấy 

Vậy khoảng cách *BH* nhỏ nhất bằng *BT* khi và chỉ khi  hay đường thẳng  đi qua *A* và *T*.

Để viết phương trình đường thẳng  ta có 2 cách:

- Tìm hình chiếu vuông góc *T* của *B* trên , từ đó viết phương trình đường thẳng  đi qua *A* và *T*.

- Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng 

**Bài toán 5\*:** Cho mặt phẳng  và điểm *A* thuộc , đường thẳng *d* không song song với , khồn nằm trên , không đi qua *A*. Tìm đường thẳng  nằm trong mặt phẳng  đi qua *A* sao cho khoảng cách giữa  và đường thẳng *d* là lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi  là đường thẳng qua *A* và song song với *d* và *B* là giao điểm của *d* với mặt phẳng . Gọi *H* là hình chiếu vuông góc vủa *B* trên mặt phẳn . Khoảng cách giữa *d* và  bằng *BH*. Gọi *C* là hình chiếu vuông góc của *B* trên .

Ta thấy , nên *BH* lớn nhất khi và chỉ khi 

Khi đó đường thẳng  có một vectơ chỉ phương 

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* , cho hai điểm  và mặt phẳng  Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu của *A* và *B* trên  Độ dài đoạn thẳng *MN* là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 4

**Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và mặt phẳng



Gọi *B* là điểm đối xứng với *A* qua . Độ dài đoạn thẳng *AB* là

**A.** 2 **B.**  **C.**  **D.** 4

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho , ,  và . Biết . Tổng  là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ, cho điểm  và đường thẳng . Phương trình mặt phẳng chứa *A* và vuông góc với *d* là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Khi đó giao tuyến của  và  có một vectơ chỉ phương là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  Mặt phẳng  thay đổi đi qua *M* lần lượt cắt các tia *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* khác *O*. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện *OABC* là

**A.** 54 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 18

**Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt cầu . Hai mặt phẳng  và  chứa *d* và tiếp xúc với . Gọi *M*  và *N* là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng *MN* là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 4

**Câu 8:** Cho hai điểm  và mặt phẳng  Đường thẳng *d* nằm trên  sao cho mọi điểm của *d* và cách đều hai điểm *A,B* có phương trình là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 9:** Cho bốn điểm   và thể tích của tứ diện *ABCD* bằng 30. Giá trị của *a* là:

**A.** 1 **B.** 2

**C.** 2 hoặc 32 **D.** 32

**Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng . Điểm nào dưới đây thuộc ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**

**Câu 11:** Cho hai đường thẳng  và . Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng  và  có phương trình là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 12:** Cho đường thẳng . Hình chiếu vuông góc của *d* lên mặt phẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 13:** Cho , điểm *D* nằm trên trục *Oy* và thể tích của tứ diện *ABCD* bằng 5. Tọa độ của *D* là

**A.** 

**B.**  hoặc 

**C.** 

**D.**  hoặc 

**Câu 14:** Cho , . Tọa độ của điểm *A* đối xứng với *A* qua mặt phẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và ba mặt phẳng   Trong các mệnh đề sau, mệnh đều sai là

**A.**  đi qua *M* **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho *d* là đường thẳng qua ** và vuông góc với . Phương trình tham số của *d* là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** Đáp số khác

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm . Phương trình mặt phẳng trung trực của *AB* là

**A.** 

**B.** 

**C.**

**D.** 

**Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và  Giá trị của *m* và *n* để hai mặt phẳng  và  song song với nhau là

**A.** 

**B.** Không có giá trị của *m* và *n*

**C.** 

**D.** 

**Câu 19:** Cho điểm  và đường thẳng  Gọi  là điểm đối xứng với *M* qua *d*. Giá trị của  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 3

**Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và . Góc giữa  và  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Câu 21:** Chođiểm , gọi *A, B, C* lần lượt là hình chiếu của *M* trên trục *Ox, Oy, Oz*. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua *A*, cắt và vuông góc với đường thẳng *d*.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm  và . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng  ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng  đi qua hai điểm  và vuông góc với mặt phẳng .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D. **

**Câu 25:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm  với *a, b, c* là những số dương thay đổi sao cho . Tính tổng  sao cho khoảng cách từ *O* đến mặt phẳng  là lớn nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Tính độ dài đoạn thẳng *OM*, biết rằng điểm *M* thuộc  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 27:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  và cắt các trục tọa độ tại các điểm *M, N, P* sao cho *H* là trực tâm của tam giác *MNP*.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba vectơ . Tìm tọa độ của vectơ .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 29:** Cho điểm . Mặt phẳng  đi qua điểm *M* và cắt trục tọa độ *Ox. Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho *M* là trực tâm tam giác *ABC*. Phương trình mặt phẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho  với *a, b, c* dương. Biết *A, B, C* di động trên các tia *Ox, Oy, Oz* sao cho . Biết rằng khi *a, b, c* thay đổi thì qũy tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện *OABC* thuộc mặt phẳng  cố định. Tính khoảng cách từ  tới mặt phẳng .

**A.** 2017 **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 31:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Giao điểm *M* của *d* và  có tọa độ là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 32:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, gọi  là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm. Phương trình của  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 33:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và ba điểm  **** . Tọa độ điểm *M* thuộc  sao cho  nhỏ nhất là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 34:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt cầu . Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để *d* cắt  tại hai điểm phân biệt?

**A.** 5 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

**Câu 35:** Viết phương trình đường thẳng *d* qua  và vuông góc với hai đường thẳng 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 36:** Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và vuông góc với mặt phẳng *Oyz*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 37:** Cho mặt phẳng  và đường thẳng . Phương trình đường thẳng  nằm trong mặt phẳng , cắt đường thẳng *d* và vuông góc với  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 38:** Cho mặt phẳng  đi qua các điểm . Mặt phẳng  vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 39:** Cho tam giác *ABC* có , . Trọng tâm của tam giác *ABC* thuộc trục *Ox* khi cặp  là

**A.  B. **

**C.  D. **

**Câu 40:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm  và vuông góc với đường thăng ?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 41:** Cho  có 3 đỉnh , . Để  thì

**A.**  **B.**  **C.**  `**D.** 

**Câu 42:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba vectơ . Giá trị của *m* để  đồng phẳng là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 1

**Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng  đi qua điểm  cắt các tia *Ox,Oy,Oz* tại *A,B,C* (*A,B,C* không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện *OABC* đạt giá trị nhỏ nhát là

**A.**  **B.**  **C.** 243 **D.** 

**Câu 44:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho ba mặt phẳng , , . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 45:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng , cắt trục tọa độ tại , . Phương trình mặt phẳng  là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 46:** Trong không gian hệ trục tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ *O* và vuông góc với hai mặt phẳng ; . Phương trình mặt phẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 47:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Mặt phẳng  chứa *A,B* và vuông góc với mặt phẳng  có phương trình là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm  và điểm *M* thay đổi trên mặt phẳng tọa độ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 49:** Cho ba điểm , , khi đó phương trình mặt phẳng  là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, vị trí tương đối của hai đường thẳng

 và  là:

**A.** Chéo nhau **B.** Cắt nhau

**C.** Song song **D.** Trùng nhau

**Câu 51:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Khi đó  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 52:** Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz* cho tứ diện *ABCD* có , . Độ dài đường cao kẻ từ *D* của tứ diện là

**A.** 11 **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 53:** Cho điểm . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ  và cách *M* một khoảng lớn nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 54:** Tìm điểm *M* trên đường thẳng  sao cho , với 

**A.**  hoặc 

**B.**  hoặc 

**C.**  hoặc 

**D.** Không có điểm *M* nào thỏa mãn.

**Câu 55:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng  có phương trình . Gọi  là góc nhỏ nhất mà mặt phẳng  đi qua hai điểm *A, B* tạo với mặt phẳng . Giá trị của  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 56:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm . Mặt phẳng  đi qua điểm *A* và vuông góc với đường thẳng *d* có phương trình là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 57:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Đường thẳng *d* nằm trong mặt phẳng  sao cho *d* cắt và vuông góc với  có phương trình là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 58:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  có phương trình  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với  một góc nhỏ nhất.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 59:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 60:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và vuông góc với mặt phẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 61:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  có phương trình . Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 62:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  và vuông góc với đường thẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 63:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng chứa 2 điểm  và  và song song với trục *Ox* có phương trình là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 64:** Trong không gian với hệ trục *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng  . Giao điểm *I* của *d* và  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 65:** Trong không gian với hệ trục *Oxyz*, mặt phẳng đi qua điểm  và song song với mặt phẳng  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 66:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho . Gọi *M* là điểm nằm trên đoạn *BC* sao cho . Độ dài đoạn *AM* là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 67:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* với , . Tính thể tích tứ diện *ABCD*.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 68:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng  song song và cách đều 2 đường thẳng

 và .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 69:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hình hộp  có ,  và . Giả sử tọa độ  thì giá trị của  là kết quả nào dưới đây?

**A.** 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 70:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và đường thẳng . Gọi *A* là giao điểm của  và ; gọi *M* là điểm thuộc  thỏa mãn điều kiện . Tính khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 71:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng  và . Mệnh đề nao sau đây là **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.** *d* và  cắt nhau **D.** *d* và  chéo nhau

**Câu 72:** Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm . Tìm số đo của .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 73:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và đường thẳng

 .

Tìm tọa độ điểm  đối xứng với *M* qua .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 74:** Trong không gian với hệ trục *Oxyz*, cho mặt cầu  và đường thẳng . Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau chứa *d* và tiếp xúc với mặt cầu .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 75:** Trogn không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và đường thẳng . Tìm vectơ chỉ phương  của đường thẳng  đi qua *M*, vuông góc với đường thẳng *d* đồng thời cách điểm *A* một khoảng bé nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 76:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng qua điểm  và chứa đường thẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 77:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng có phương trình:



Xét mặt phẳng , với *m* là tham số thực. Tìm *m* sao cho đường thẳng *d* song song với mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 78:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua trung điểm *I* của cạnh *AB* và vuông góc với đường thẳng *AB.*

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 79:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và hai đường thẳng:



Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm *A*, vuông góc với đường thẳng  và cắt đường thẳng 

**A.** 

**B.** 

**C.** ,

**D.** 

**Câu 81:** Cho tọa độ các điểm , . Chọn phát biểu đúng?

**A.** Tam giác *ABC* là tam giác đều

**B.** Tam giác *ABC* là tam giác vuông

**C.** Các điểm *A, B, C* thẳng hàng

**D.** Tam giác *ABC* là tam giác vuông cân

**Câu 82:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm *M* có các tọa độ âm thuộc *d* sao cho khoảng cách từ *M* đến  bằng 2.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 83:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Tìm trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 84:** Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm . Phương trình của mặt phẳng  đi qua *M* và  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 85:** Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm . Phương trình của mặt phẳng  đi qua *M* , song song với  và cách  một khoảng bằng 3 là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 86:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz* cho các điểm  và đường thẳng . Tìm tọa độ điểm  sao cho diện tích tam giác *ABN* nhỏ nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 87:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tam giác *BCD* có , . Tính diện tích tam giác *BCD.*

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 88:** Trong không gian *Oxyz*, cho 3 điểm . Phương trình mặt phẳng  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 89:** Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu



đường thẳng . Mặt phẳng  vuông góc với  và tiếp xúc với  có phương trình là

**A.**  và 

**B.**  và



**C.**  và



**D.**  và 

**Câu 90:** Trong không gian *Oxyz*, cho , , đường thẳng *d* đ qua *A* cắt và vuông góc  có vectơ chỉ phương là

**A.**  **B.** 

**C.**  **C.** 

**Câu 91:** Trong không gian *Oxyz*, cho 2 mặt phẳng  và . Góc giữa 2 mặt phẳng  và  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 92:** Trong không gian *Oxyz*, cho 2 điểm , đường thẳng . Tọa độ điểm *M* trên  sao cho  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 93:** Đường thẳng *d* đi qua  và vuông góc với  có phương trình là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 94:** Trong hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm . Tìm tọa độ của điểm *M* thuộc trục *Oy* sao cho  nhỏ nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 95:** Trong hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Tìm tọa độ điểm *D* để *ABCD* là hình bình hành.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 96:** Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 97:** Nếu mặt phẳng  song song với mặt phẳng  thì các giá trị của *m* và *n* là

**A.**  **B.** 

**C.  D. **

**Câu 98:** Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm  và vuông góc với mặt phẳng  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 99:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, tìm tọa độ điểm *N* thuộc trục *Oz* sao cho khoảng cách từ *N* đến  bằng khoảng cách từ *N* đến mặt phẳng ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** không tồn tại điểm *N*

**Câu 100:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và hai mặt phẳng . Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua *A*, song song với  và ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 101:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Tìm tọa độ trung bình *I* của đoạn thẳng *AB*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 102:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng . Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của *d*?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 103:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 104:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và đường thẳng . Phương trình đường thẳng *d* đi qua *A*, vuông góc với  và cắt  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 105:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Phương trình đường thẳng *d* nằm trong  sao cho *d* cắt và vuông góc với đường thẳng  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 106:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm và vuông góc với mặt phẳng ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 107:** Mặt phẳng  song song với mặt phẳng  và cách  một khoảng bằng  thì  có phương trình là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 108:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua hai điểm *A, B* và vuông góc với mặt phẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 109:** Trong không gian *Oxyz*, cho các điểm . Tọa độ điểm *D* trên trục *Ox* sao cho  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 110:** Trong không gian *Oxyz*, cho ,  và đường thẳng . Tìm điểm *M* thuộc *d* để thể tích tứ diện *MABC* bằng 3.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 111:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho  Viết phương trình mặt phẳng  đi qua *A, B* và  tạo với mặt phẳng  góc  thỏa mãn ?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 112:** Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng  và hai điểm ; . Phương trình mặt phẳng  qua *A,B* và vuông góc với  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 113:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và hai đường thẳng . Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua *M*, vuông góc với  và 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 114:** Cho hai đường thẳng

; 

và điểm . Đường thẳng  đi qua *A*, vuông góc với  và cắt  có phương trình là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 115:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng ,  và mặt phẳng . Phương trình nào dưới đây là phương tình mặt phẳng đi qua giao điểm của  và , đồng thời vuông góc với đường thẳng *d*?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 116:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho . Đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC* cắt mặt phẳng *Oyz* tại điểm nào trong các điểm sau đây?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 117:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho . Viết phương trình mặt phẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 118:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho . Tính diện tích *S* của tam giác *ABC*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 119:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho . Viết phương trình mặt phẳng  qua *M* cắt các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại *A, B, C* sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 120:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm *G* và cắt các trục tọa độ tại ba điểm phân biệt *A, B, C* sao cho *G* là trọng tâm tam giác *ABC*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 121:** Cho ba điểm , . Tìm điểm  sao cho  nhỏ nhất?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 122:** Cho mặt phẳng  và đường thẳng . Gọi  là mặt phẳng chứa *d* và song song với . Khoảng cách giữa  và  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 123:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng , điểm . Phương trình mặt phẳng  chứa *d* sao cho khoảng cách từ *A* đến  là lớn nhất là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 124:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Xét đường thẳng *d* thay đổi thuộc  và đi qua *B*, gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *d*. Biết rằng khi *d* thay đổi thì *H* thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính *R* của đường tròn đó.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 125:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*?

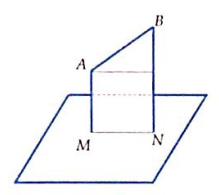
**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1: Đáp án B**

**Cách 1:** Ta có













Vậy đáp án đúng là **B.**

**Cách 2:** Gọi  là đường thẳng đi qua *A* và vuông góc với mặt phẳng . Lúc này .



Mà 

.

Tương tự ta tìm được .

. Chọn **B.**

**Câu 2: Đáp án B**

Ta có:

*B* là điểm đối xứng với *A* qua  nên:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 3: Đáp án A**



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 4: Đáp án C**

Ta có: . Đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  nên: . Dó đó  có dạng: . Vì  đi qua  nên: .

Do đó, đáp án đúng là **C**.

**Câu 5: Đáp án A**

**Cách 1:** Giao tuyến của  và  là nghiệm của hệ phương trình:



Do đó, đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** 

**Câu 6: Đáp án C**

Giả sử . Do cắt các tia nên: . Khi đó, phương trình mặt phẳng  là : .  đi qua  nên: . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:





Dấu  xảy ra khi: 

Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 7: Đáp án B**

Mặt cầu  có tâm là  và bán kính 

Gọi  là hình chiếu của *I* lên . Khi đó, ta có:



Gọi *K* là giao điểm của *IH* và *MN*. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *MIH* có:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 8: Đáp án A**

Gọi *K* là điểm bất kì trên . Theo giả thiết:  tức là tam giác *KAB* cân, điều này chỉ xảy ra khi  nằm trên mặt phẳng  là mặt phẳng trung trực của *AB*. Ta đi xác định :

Gọi *M* là trung điểm *AB* thì:



Mặt phẳng  đi qua *M* và vuông góc với *AB* tức là nhận  là vectơ pháp tuyến. Dó đó:



Do đó,  là giao tuyến của  và  nên là nghiệm của hệ:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 9: Đáp án C**





Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 10: Đáp án D**

Đặt .

*Với phương án A*: Ta có

 nên điểm  không thuộc mặt phẳng .

*Với phương án B*:

 nên điểm  không thuộc mặt phẳng .

*Với phương án C*:

 nên điểm  không thuộc mặt phẳng .

*Với phương án D*:  nên điểm  nằm trên mặt phẳng .

**Câu 11: Đáp án D**

Dễ dang nhận thấy hai đường thẳng  chéo nhau. Ý tưởng ở đây là tìm hai điểm ;  sao cho  là đường vuông góc chung của .



Mặt phẳng cần tìm  đi qua trung điểm *M* của  và vuông góc với  nên:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 12: Đáp án B**

Giao điểm  của  với mặt phẳng  là:



Dễ thấy điểm . Hình chiếu *B* của *M* lên mặt phẳng  là: . Phương trình đường thẳng cần tìm chính là phương trình đường thẳng *AB* và là: 

Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 13: Đáp án B**

****

Vậy đáp án đúng là **B.**

**Câu 14: Đáp án C**

Mặt phẳng  nên có:



Gọi  là hình chiếu của *A* lên , ta có:



Khi đó,  đối xứng với *A* qua  khi và chỉ khi *H* là trung điểm . Do đó ta có:



Vậy đáp án đúng là **C.**

**Câu 15: Đáp án C**

Khẳng định A, B, C hiển nhiên đúng. Khẳng định **C** sai vì mặt phẳng  giao với *Oz* tại điểm . Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 16: Đáp án B**

**Cách 1:**  vuông góc với  nên:



 đi qua điểm  nên:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Cách 2:** Từ  suy ra B đúng.

**Câu 17: Đáp án A**

**Cách 1:** Trung điểm *AB* là:



Phương trình mặt phẳng trung trực *AB* nhận  là vecto pháp tuyến và đi qua điểm *M* nên nó có dạng:





Vậy đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:**  loại C; D.

Thay tọa độ điểm *I* vào đáp án (*I* là trung điểm của *AB*) ta chọn A.

**Câu 18: Đáp án C**



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 19: Đáp án A**

Ta có: . Mặt phẳng  đi qua *M* và vuông góc với  hay nhận  là vecto pháp tuyến là



Giao điểm  của  và  chính là hình chiếu vuông góc của *M* lên , ta có:



 đối xứng với *M* qua  khi và chỉ khi *H* là trung điểm . Do đó, ta có:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 20: Đáp án D**

Góc giữa  và  là:  Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 21: Đáp án D**

Theo giả thiết ta có:; ; 

Phương trình mặt phẳng  là:



Do đó, mặt phẳng song song với  có dạng:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 22: Đáp án D**

Gọi  là giao điểm của  với . Khi đó, ta có:



Phương trình  chính là phương trình *AB* và là:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 23: Đáp án C**

Thực chất bài toán chỉ là kiểm tra kiến thức phương trình mặt phẳng dạng chắn:





Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 24: Đáp án A**

**Cách 1:** Gọi  là hình chiếu của *A* lên . Khi đó ta có:



Mặt phẳng  là mặt phẳng  có dạng: . Từ đó suy ra:





Vậy đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** Ta có . Nên ta loại C; D.

Thay tọa độ điểm *A* của đề bài vào hai đáp án còn lại.

Khi đó, đáp án A thỏa mãn.

**Câu 25: Đáp án A**

Phương trình mặt phẳng  là:

Dấu  xảy ra khi:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 26: Đáp án C**

Gọi  thì ta có:



Dấu  xảy ra khi:



Do đó, . Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 27: Đáp án A**

Bài toán này sử dụng tính chất quen thuộc của tứ diện vuông: *H* là trực tâm của tam giác *MNP* khi và chỉ khi: . Ta có:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 28: Đáp án B**



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 29: Đáp án C**

Ta có:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 30: Đáp án D**

Gọi  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *OABC*

Khi đó ta có: 



Do  nên *I* thay đổi trên mặt phẳng 



Vậy đáp án đúng là **D.**

**Câu 31: Đáp án A**

Vì  nên: 

 nên: 



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 32: Đáp án C**

Phương trình mặt phẳng  là:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 33: Đáp án B**

Gọi . Vì  nên: 

Ta có:

Dấu  xảy ra khi:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 34: Đáp án A**

****

*d* cắt  tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 35: Đáp án A**

**Cách 1.** 



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** Sau khi tìm được  ta chọn luôn A.

**Câu 36: Đáp án B**

Mặt phẳng vuông góc với *Oyz* có dạng:



Dễ thấy  nên ta có:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 37: Đáp án B**

Gọi *M* là giao điểm của  và *d*. Khi đó  Do  nên 



Giả sử  đi qua  khác *M*. Ta có:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 38: Đáp án B**

Ta có: 

Bằng cách kiểm tra  thì đáp án đúng là **B**.

**Câu 39: Đáp án D**

*G* thuộc *Ox* khi: . Theo công thức trọng tâm ta suy ra:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 40: Đáp án C**

Do  nên mặt phẳng  có vectơ pháp tuyến là 

Điểm  nên phương trình mặt phẳng  là:



**Câu 41: Đáp án C**

Ta có:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 42: Đáp án A**

**** đồng phẳng khi:



Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 43: Đáp án D**

Giả sử  Ta có:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 44: Đáp án C**

Dễ dàng nhìn thấy ngay ra điểu này.

**Câu 45: Đáp án A**

Ta có:



Vậy đáp án đúng là **A**

**Câu 46: Đáp án B**

**Cách 1: ** đi qua gốc tọa độ nên:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Cách 2:** Ta có 

 Chọn **B**.

**Câu 47: Đáp án D**

**Cách 1:** Gọi  là hình chiếu của *B* lên . Khi đó ta có:



Khi đó,  chính là 



**Cách 2:** 



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 48: Đáp án A**

Nhận xét: *A,B* nằm về hai phía so với mặt phẳng , gọi  là điểm đối xứng của *B* qua mặt phẳng .

Khi đó  và 

Gọi *I* là giao điểm của  với mặt phẳng .

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác  ta có . Dấu bằng xảy ra khi . Khi đó 



**Câu 49: Đáp án D**

**Cách 1:** 



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Cách 2: ** suy ra loại B; C.

Thay tọa độ điểm *A* ta tính được hệ số *d* bởi công thức:  chọn **D**.

**Câu 50: Đáp án A**

Xét hệ: 

Hệ vô nghiệm nên loại **B** và **D**. Dễ thấy chúng không song song với nhau. Vì thế đáp án đúng là **A**.

**Câu 51: Đáp án B**



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 52: Đáp án A**

**Cách 1:** Xác định 



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** Sử dụng công thức tích có hướng để tính  và  đáp án A.

**Câu 53: Đáp án A**

Do  đi qua gốc tọa độ nên 



Dấu  xảy ra khi:



Đáp án đúng là **A**.

**Câu 54: Đáp án B**

*M* thuộc *d* nên: 

Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 55: Đáp án D**

 đi qua *A* nên:



 đi qua *B* nên:

Ta cần tìm 



Dấu  xảy ra khi: 

Đáp án đúng là **D**.

**Câu 56: Đáp án C**



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 57: Đáp án D**

Giao điểm *A* của  và  là nghiệm của hệ:



Giả sử *d* đi qua . Khi đó, ta có:







Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 58: Đáp án C**

Dễ thấy 

Giả sử: 



Dấu  xảy ra khi:



Đáp án đúng là **C**.

**Câu 59: Đáp án D**



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 60: Đáp án B**

**Cách 1:** 



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Cách 2:**  từ đây ta chọn B.

**Câu 61: Đáp án C**

Kiểm tra ta thấy đáp án đúng là **C**.

**Câu 62: Đáp án D**

 vuông góc với *d* nên:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 63: Đáp án C.**

**Cách 1:** Mặt phẳng  song song với *Ox* nên:

Đáp án đúng là **C**.

**Cách 2:** Mặt phẳng song song với *Ox*  loại *A; D*.

Thay tọa độ điểm *A* vào đáp án  đáp án **B** đúng.

**Câu 64: Đáp án D**

Giao điểm *I* là nghiệm của hệ:



Đáp án đúng là **D**.

**Câu 65: Đáp án A**

Mặt phẳn  song song với  nên:



*A* thuộc  nên: 

Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 66: Đáp án B**

**** là điểm nằm trên đoạn *BC* sao cho  thì:





Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 67: Đáp án D**

****

Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 68: Đáp án B**

**Cách 1:** Gọi  sao cho *AB* là đường vuông góc chung của . Khi đó ta có:

 Mặt phẳng  đi qua trung điểm *M* của *AB* và vuông góc với *AB* nên:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Cách 2:** Ta có  loại *A; C*.

Lấy một điểm trên  rồi tính khoảng cách từ hai điểm đó đến các mặt phẳng đáp án, nếu bằng thì chọn.

Đáp án đúng là **B**.

**Câu 69: Đáp án B**

Gọi *M;N* là trung điểm  thì:

*O* là trung điểm *MN* sẽ đồng thời là trung điểm . Ta có:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 70: Đáp án C**

Giả sử  là góc giữa  và . Ta có:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 71: Đáp án A**

Ta có 

Lấy , nhận thấy . Do vậy 

**Câu 72: Đáp án A**

****

Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 73: Đáp án C**

Đường thẳng .

Gọi *d* là đường thẳng đi qua *M* và vuông góc với , , suy ra *N* là trung điểm của .

Khi đó 



Do *d* vuông góc với  nên



Khi đó 

**Câu 74: Đáp án C**



Dễ thấy  nên:



 tiếp xúc với  khi:

 Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 75: Đáp án B**

Giả sử đường thẳng cần tìm là  đi qua *M*:



Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên .







Dấu  xảy ra khi . Do đó, ta có:



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 76: Đáp án B**

Chọn  là hai điểm nằm trên đường thẳng *d*, suy ra hai điểm *A, B* cũng nằm trong mặt phẳng  cần tìm.

Bài toán trở thành viết phương trình mặt phẳng  đi qua ba điểm .

Mặt phẳng  có vtpt



Mà mặt phẳng  chứa điểm  nên



**Câu 77: Đáp án A**

*D* song song với mặt phẳng  khi:



Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 78: Đáp án D**

**Cách 1:** 



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Cách 2:** Ta có  chọn D (do cùng phương với .

**Câu 79: Đáp án C**

Gọi  là mặt phẳng đi qua *A* và vuông góc với . Khi đó, có:



Gọi giao điểm  và  là .

 Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 81: Đáp án A**



 nên  đều

**Câu 82: Đáp án B**

 với 



**Câu 83: Đáp án D**

Theo công thức tọa độ trọng tâm ta có



**Câu 84: Đáp án A**

Gọi 

Ta có: 

Từ đó: 



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 85: Đáp án A**

Gọi . Khi đó, ta có:



Nếu  thì 

Nếu  thì chọn . Giải hệ hai ẩn trên được: 

Do đó, đáp án đúng là **A**.

**Câu 86: Đáp án D**

Dấu  xảy ra khi: 

Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 87: Đáp án B**



Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 88: Đáp án B**

****

Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 89: Đáp án A**

****

**** tiếp xúc  khi: 



Do đó, đáp án đúng là **A**.

**Câu 90: Đáp án C**

Mặt phẳng  đi qua *A* và vuông góc với :



Giao điểm *B* của  và  là:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 91: Đáp án A**

****

Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 92: Đáp án A**

****

Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 93: Đáp án B**

Hiển nhiên nhìn ra ngay vì nó vuông góc với 

**Câu 94: Đáp án C**

****

Dấu  xảy ra khi: 

Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 95: Đáp án C**

*M* là trung điểm *AC* cũng là trung điểm *BD* nên:



Vậy đáp án đúng là **C**

**Câu 96: Đáp án A**



Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 97: Đáp án A**

****

Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 98: Đáp án A**

Ta có: 



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 99: Đáp án A**





**Câu 100: Đáp án D**

Mặt phẳng  có vec-tơ pháp tuyến .

Mặt phẳng  có vectơ pháp tuyến là .

Khi đó 

Gọi *d* là đường thẳng cần tìm. Ta có:

.

Phương trình đường thẳng *d* đi qua  là:



**Câu 101: Đáp án B**

****

**Câu 102: Đáp án C**

**Câu 103: Đáp án A**

****

Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 104: Đáp án C**

Gọi  khi đó:







Vậy đáp án đúng là **C**

**Câu 105: Đáp án C**



Chọn **C**.

**Câu 106: Đáp án B**

Do  nên đường thẳng *d* có vec-tơ chỉ phương là 

Ta loại được hai đáp án A và D.

*Với phương án B*: Với  thì  nên đường thẳng  đi qua điểm .

**Câu 107: Đáp án D**

Do 

Lại có: 



Vậy đáp án đúng là **D**

**Câu 108: Đáp án A**

Có 



Vậy đáp án đúng là **A** do cùng phương với 

**Câu 109: Đáp án A**

****

****

Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 110: Đáp án A**

**** Vậy đáp án đúng là **A.**

**Câu 111: Đáp án C**

Gọi 

Ta có:

 Chọn:



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 112: Đáp án A**

**Cách 1:** Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên .



Đáp án đúng là **A.**

**Cách 2:** Ta có 

 loại B và D.

Thay tọa độ điểm *A* vào phương án chỉ thấy A thỏa mãn. Từ đấy ta chọn A.

**Câu 113: Đáp án D**

Đường thẳng  có vec-tơ chỉ phương là ;

Đường thẳng  có vec-tơ chỉ phương là .

Ta có .

Đường thẳng *d* cần tìm có vec-tơ chỉ phương là .

Từ giả thiết:  Loại đáp án A, C.

Đường thẳng *d* đi qua điểm  nên có phương trình: 

**Câu 114: Đáp án D**

Gọi  khi đó:



Vậy đáp án đúng là **D**.

**Câu 115: Đáp án C**

Giao điểm của  và  có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:



Vậy giao điểm của đường thẳng  và mặt phẳng  là: 

Gọi  là mặt phẳng cần tìm. Từ giả thiết, ta có  nên mặt phẳng  có vec-tơ pháp tuyến là 

Phương trình 



**Câu 116: Đáp án C**

****

Vậy đáp án đúng là **C.**

**Câu 117: Đáp án B**

****

Vậy đáp án đúng là **B**.

**Câu 118: Đáp án A**

Sử dụng công thức:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Câu 119: Đáp án C**

Gọi *H* là hình chiếu của *O* lên .

Ta có: 

Dấu  xảy ra khi:  tức là 



Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 120: Đáp án A**

**Cách 1:** Giả sử  thì:



Vậy đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** Mẹo: nhân 3 vào tọa độ điểm *G* rồi đẩy xuống các giá trị a,b,c tương ứng  đáp án A đúng.

**Câu 121: Đáp án C**

Vì  nên . Ta có:





Dấu  xảy ra khi: .

Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 122: Đáp án C**

Dễ thấy 

Khi đó ta có:

Vậy đáp án đúng là **C**.

**Câu 123: Đáp án D**

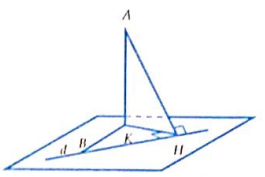
Theo tính chất đường xiên đường vuông góc dễ thấy:

 Điều này xảy ra khi:  là hình chiếu của *A* lên  cũng là hình chiếu của *A* lên . Do đó, ta có:



Vậy đáp án đúng là **D**

**Câu 124: Đáp án A**



Gọi *K* là hình chiếu của điểm  trên mặt phẳng 

Phương trình tham số của *AK*: 

Khi đó ta tìm được tọa độ điêm  là .

Ta có  vuông tại *H*, khi đó điểm *H* luôn thuộc đường tròn đường kính *BK* cố định.

Bán kính đường tròn là



**Câu 125: Đáp án A**

Trung điểm của *AB* là .

Ta có  Gọi  là mặt phẳng trung trực của đoạn *AB* nên  có vec-tơ pháp tuyến là

 và đi qua điểm .

Phương trình 



# IV. Mặt cầu

## 1. Phương trình mặt cầu

**Định lý**

|  |
| --- |
| Trong không gian *Oxyz*, mặt cầu  tâm  bán kính *R* có phương trình là  (1). |

Phương trình có dạng như phương trình (1) được gọi là **phương trình chính tắc** của mặt cầu tâm *I*, bán kính *R*.

**Nhận xét:** Khi biến đổi phương trình (1) ta được:



Nếu đặt  thì phương trình trên trở thành

 (2)

Với điều kiện  thì phương trình (2) được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt cầu có tâm  và bán kính 

## 2. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

**STUDY TIP**

Phương trình mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  tâm  bán kính *R* tại điểm  có phương trình



Cho mặt cầu  và mặt phẳng . Đặt . Khi đó ta có các trường hợp:

**a. Trường hợp 1:** 

**b. Trường hợp 2:** , *M* là hình chiếu của *I* lên mặt phẳng . Trường hợp này ta nói mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  tại *M*. Lúc này  được gọi là *tiếp diện* của mặt cầu , *M* được gọi là tiếp điểm của  và .

**Tóm lại:** Cho hai mặt cầu 

|  |  |
| --- | --- |
|  | \*  trong nhau.  \*  ngoài nhau.  \*  tiếp xúc trong.  \*  tiếp xúc ngoài.  \*  cắt nhau theo 1 đường tròn. |

**Đọc thêm:** Với trường hợp 2: Ta dễ thấy với , ta có . Từ đó ta thu được kết quả sau.

|  |
| --- |
| Cho mặt cầu  và điểm . Khi đó tiếp diện của  tại *M* có phương trình:  . |

|  |
| --- |
| **Ví dụ:** Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  tại điểm . |

**Lời giải**

Áp dụng công thức ở trên ta được mặt phẳng  có phương trình .

**c. Trường hợp 3:** ,  là đường tròn có tâm *H* là hình chiếu của *I* trên , có bán kính .

**3. Các dạng toán thường gặp liên quan đến mặt cầu**

|  |
| --- |
| **Dạng I:** Viết phương trình mặt cầu cho trước tâm . |

**a. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng .**

 mặt cầu có bán kính 

**b. Mặt cầu cắt mặt phẳng  theo một đường tròn có bán kính *r* cho trước.**

 bán kính mặt cầu được xác định bởi: 

**c. Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng **

**** bán kính mặt cầu được xác định bởi công thức:  trong đó *M* là một điểm trên đường thẳng *d*. (công thức ở phần khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong bài Phương trình đường thẳng).

**d. Mặt cầu cắt đường thẳng *d* theo một dây cung có độ dài *l* cho trước.**

 bán kính mặt cầu được tính bằng công thức: 

|  |
| --- |
| **Dạng II:** Viết phương trình mặt cầu có tâm *I* thuộc đường thẳng *d* cho trước và thỏa mãn một điều kiện nào đó trong phần I. |

**Cách làm:** Viết phương trình đường thẳng *d* về dạng tham số, khi đó tham số hóa tọa độ điểm *I* theo một ẩn, sử dụng dữ kiện đề bài tìm ra *I*, từ đó quay về dạng *I*, tìm *R*.

|  |
| --- |
| **Dạng III:** Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng  tại điểm *M* cho trước. |

**Cách 1:**

Ở phần 2. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng (trường hợp 2) ta có bài toán ngược của bài toán này.

**STUDY TIP**

Phương trình mặt phẳng  cần tìm có dạng



Do vậy khi đã biết phương trình mặt phẳng  ở đề bài, do vậy ta chỉ cần giải hệ:

 thì bài toán được giải quyết.

|  |
| --- |
| Với mặt cầu  tiếp xúc với mặt phẳng  tại  thì có phương trình  . |

Vậy ở đây khi đã biết mặt phẳng , điểm *M* nên ta sẽ tìm tâm *I* và bán kính *R* bằng cách đồng nhất hệ số phương trình mặt phẳng .

**Cách 2:**

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng  tại điểm *M*



Tiếp theo, sử dụng các công thức ở dạng *I* tìm ra *t*.

Từ đây ta có *l*, có *R* nên viết được phương trình chính tắc của mặt cầu.

|  |
| --- |
| **Dạng IV:** Viết phương trình mặt cầu  đi qua bốn điểm không đồng phẳng cho trước trong không gian. |

Ta gọi phương trình mặt cầu là  (1).

Do *A, B, C, D* thuộc mặt cầu  thế nên thay tọa độ từng điểm vào (1) ta sẽ có hệ phương trình bốn ẩn *a, b, c, d*.

Giải hệ ta tìm được *a, b, c, d.* Từ đây ta có mặt cầu tâm  và bán kính .

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và đường thẳng  Mặt phẳng (*P*) chứa *A* và *d*. Phương trình mặt cầu tâm *O* tiếp xúc với mặt phẳng (*P*) là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 2:** Gọi *I* là tâm mặt cầu đi qua 4 điểm , , , . Tìm tọa độ tâm *I*.

**A.** **. **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu . Mệnh đề nào đúng?

**A.** Mặt cầu (*S*) tiếp xúc với (*Oxy*).

**B.** Mặt cầu (*S*) không tiếp xúc với cả 3 mặt phẳng (*Oxy* ), (*Oxz*), (*Oyz*).

**C.** Mặt cầu (*S*) tiếp xúc với (*Oyz*).

**D.** Mặt cầu (*S*) tiếp xúc với (*Oxz*).

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Phương trình mặt cầu nhận *AB* làm đường kính là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 5:** Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm ** và tiếp xúc với mặt phẳng .

**A.** 

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 6:** Tìm tâm *I* và bán kính R của mặt cầu: .

**A.** ,. **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Mặt cầu (*S*) đường kính *AB* có phương trình là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*) có tâm  và cắt mặt phẳng  theo một đường tròn có chu vi bằng . Phương trình mặt cầu (*S*) là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho bốn điểm . Tâm *I* của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* có tọa độ:

**A.** . **B.**.

**C.** . **D.** .

**Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*) có tâm  đi qua điểm  có phương trình là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 11:** Cho hai điểm . Phương trình của mặt cầu (*S*) đường kính *AB* là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 12:** Cho mặt cầu  và đường thẳng . Tìm *m* để *d* cắt (*S*) tại hai điểm phân biệt *A,B* sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (*S*) tại A và tại B vuông góc với nhau.

**A.**  hoặc .

**B.**  hoặc .

**C.**  hoặc .

**C.** Cả A, B, C đều sai.

**Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu . Xác định tâm *I* và bán kính *R* của mặt cầu (*S*).

**A.** , .

**B.** , .

**C.** , .

**D.** , .

**Câu 14:** Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính  có phương trình:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu  và mặt phẳng . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** (*P*) cắt (*S*).

**B.** (*P*) tiếp xúc với (*S*).

**C.** (*P*) không cắt (*S*).

**D.** Tâm của mặt cầu (*S*) nằm trên mặt phẳng (*P*)

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu  và mặt phẳng . Tìm *m* để  và (*S*) không có điểm chung.

**A.**  hoặc .

**B.** .

**C.** .

**D.**  hoặc .

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho đường thẳng  và 2 mặt phẳng (*P*) và (*Q*) lần lượt có phương trình ; . Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm I thuộc đường thẳng (*d*), tiếp xúc với 2 mặt phẳng (*P*) và (*Q*).

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu . có bán kính . Tìm giá trị của *m*.

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu có phương trình: . Tìm tâm *I* và bán kính *R* của mặt cầu?

**A.**  và .

**B.**  và .

**C.**  và .

**D.**  và .

**Câu 21:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu . Tìm tọa độ tâm I và bán kính *R* của(*S*).

**A.**  và .

**B.**  và .

**C.**  và .

**D.**  và .

**Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và hai mặt phẳng , . Mặt cầu (*S*) có tâm *I* là giao điểm của đường thẳng *d* và mặt phẳng (*P*). Mặt phẳng (*Q*) tiếp xúc với mặt cầu (*S*). Viết phương trình của mặt cầu (*S*).

**A. **.

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm . Viết phương trình mặt cầu (*S*) đi qua điểm *A*, tiếp xúc với mặt phẳng  và có tâm nằm trên đường thẳng .

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu . Tìm số thực *m* để  cắt (*S*) theo một đường tròn có chu vi bằng .

**A.** –2. **B.** –4. **C.** –1. **D.** –3.

**Câu 25:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và mặt phẳng . Mặt cầu tâm *I* tiếp xúc với (*P*) tại *H*. Tìm tọa độ *H*.

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*) có phương trình: . Tọa độ tâm *I* và bán kính *R* của mặt cầu là:

**A.**  và .

**B.**  và .

**C.**  và .

**D.**  và .

**Câu 27:** Mặt cầu  cắt mặt phẳng  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:

**A.** 8. **B.** . **C.** 10. **D.** 6.

**Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm  và tiếp xúc với mặt phẳng .

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm  và . Gọi *D* là điểm khác *O* sao cho *DA, DB, DC* đôi một vuông góc với nhau và  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Tính .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho 4 điểm  và . Mặt cầu tâm *A* và tiếp xúc với mặt phẳng (*BCD*) có phương trình là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 31:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm  và có tâm thuộc mặt phẳng .

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 32:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho mặt cầu (*S*) đi qua hai điểm  và có tâm thuộc trục *Ox*. Phương trình mặt cầu (*S*) là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu , điểm  và mặt phẳng . Gọi  là đường thẳng đi qua M, thuộc (*P*) và cắt (*S*) tại hai điểm *A, B* sao cho *AB* nhỏ nhất. Biết rằng  có một vecto chỉ phương là , tính 

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu  và hai đường thẳng , . Phương trình nào dưới đâu là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (*S*), song song với *d* và ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1: Đáp án D**

Ta có: 











Vậy ta có phương trình mặt cầu cần tìm là: .

**Câu 2: Đáp án C**

Phương trình mặt cầu có dạng:



(ĐK: )

Do *M, N, P, Q* thuộc mặt cầu



(thỏa mãn)

Vậy .

**Câu 3: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm ** và bán kính 

Mặt phẳng 

Mặt phẳng 

Mặt phẳng 

**Câu 4: Đáp án B**

Ta có: 

Gọi *I* là trung điểm của *AB*.

Theo bài ra, mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương tình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 5: Đáp án C**

Ta có: 

Do (*S*) tiếp xúc với (*P*) nên mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 6: Đáp án B**

Mặt cầu 



Vậy mặt cầu  có tâm  và bán kính 

**Câu 7: Đáp án B**

*I* là trung điểm 

Do (*S*) nhận *AB* là đường kính nên mặt cầu (*S*) có tâm *I* và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 8: Đáp án C**

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính *R*.



Mặt phẳng 



Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

.

**Câu 9: Đáp án C**

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ giác *ABCD* có dạng 

(ĐK: )

Do (*S*) ngoại tiếp *ABCD* nên 

 (thỏa mãn)

Vậy 

**Câu 10: Đáp án C**

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính .

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 11: Đáp án D**

Ta có: *AB* là đường kính

*I* là trung điểm *AB* 

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 12: Đáp án A**

**Phân tích:** ta có nếu hai mặt phẳng tiếp diện của (*S*) tại *A* và *B* vuông góc với nhau thì hai vtpt của hai mặt phẳng này cũng vuông góc với nhau. Mà hai vtpt của hai mặt phẳng này chính là  Với  là tâm của mặt cầu (*S*).

Vậy ta có hai điều kiện sau:

1. *d* cắt (*S*) tại hai điểm phân biệt.

2. 

**Lời giải:** Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên *d* phải cắt mặt cầu, tức là phương trình  có hai nghiệm phân biệt  Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  

Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lý Viet ta có ; .

Khi đó , 

Vậy  



 (TM).

**Câu 13: Đáp án C**

Mặt cầu (*S*):



Vậy mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

**Câu 14: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:



**Câu 15: Đáp án B**

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Mặt phẳng (*P*):

  tiếp xúc với (*S*).

**Câu 16: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm  có bán kính 

(*S*) và  không có điểm chung





**Câu 17: Đáp án B**

Ta có: 

(*S*) tiếp xúc với (*P*) và (*Q*)











 Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:



**Câu 19: Đáp án B**

Mặt cầu 





**Câu 20: Đáp án B**

Mặt cầu 



Vậy mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

**Câu 21: Đáp án A**

Mặt cầu 

Vậy mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

**Câu 22: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm *I* và bán kính R.

Đường thẳng  ()



Mặt khác 



(*S*) tiếp xúc với (*Q*)

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

****

**Câu 23: Đáp án C**

Đường thẳng  ()

Mặt cầu (*S*) có tâm *I* và bán kính *R*.

Do 

(*S*) qua *A* và (*S*) tiếp xúc với (*P*) 











 Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:



**Câu 24: Đáp án D**

Ta có: 





 Mặt cầu (*S*) có tâm  và 

Theo bài ra ta có: 

 (thỏa mãn)

**Câu 25: Đáp án B**

Gọi  là đường thẳng qua *I* và vuông góc với (*P*)

 có phương trình tham số  ()

Khi đó *H* là giao điểm của  và (*P*). Tìm được

**Câu 26: Đáp án A**

Mặt cầu 



Vậy mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

**Câu 27: Đáp án A**

Mặt cầu 

(*S*) có tâm  và bán kính 

Mặt phẳng 



**Câu 28: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính .

Mặt phẳng .

Do (*S*) tiếp xúc với (*P*)

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 29: Đáp án B**

Giả sử .

Ta có:   

Từ giả thiết:

Do *D* khác *O* nên .

Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* là (*S*) có phương trình dạng:

 có tâm 

Do  nên có hệ: 

Vậy 

**Câu 30: Đáp án D**

Ta có:  

Mặt phẳng (BCD) có vectơ pháp tuyến  và đi qua điểm 

Phưng trình mặt phẳng (*P*) là:  



Mặt cầu (S) có tâm  và bán kính 

Do (*S*) tiếp xúc với (*BCD*) 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 31: Đáp án B**

**Phân tích:** Nếu như giải bằng hình thức tự luận, thì bài toán sẽ trở nên rất khó xử lí với những dữ kiện mà đề bài cho. Cách nhanh nhất ở đây là thử các kết quả được cho trong các đáp án *A, B, C, D* xem có thỏa mãn với những dữ kiện đề cho không rồi kết luận.

**Lời giải:**

*Với phương án A:* Mặt cầu  đi qua điểm , không đi qua hai điểm  và . Ta loại ngay A.

*Với phương án B:* Mặt cầu  đi qua ba điểm , , .

Mặt cầu  có tâm  thuộc mặt phẳng . Vậy chọn ngay B.

**Câu 32: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm *I*  và bán kính *R *

Do 

Lại có (*S*) qua *A, B* 



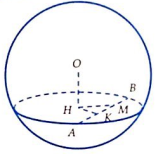


Mặt cầu (*S*) có tâm ** và bán kính 

Vậy phương trình mặt cầu (*S*) là:

.

**Câu 33: Đáp án C**



Mặt cầu (*S*) có tâm  và bán kính 

Ta thấy điểm  và  nên mặt phẳng (*P*) cắt mặt cầu (*S*) theo một đường tròn (*C*) tâm *H*. Suy ra 

Từ giả thiết, ta có  đi qua *M*  và cắt đường trong (*C*) tại hai điểm *A, B* . Gọi *K* là trung điểm của *AB*, nên  và *AB* nhỏ nhất khi và chỉ khi *HK* lớn nhất.

Mà  vuông tại *K* nên  hay 

Vậy  khi  Khi đó đường thẳng  đi qua , có vtcp 

Phương trình *OH* đi qua *O*, vec-tơ chỉ phương 

Do  nên 





Vậy 

**Câu 34: Đáp án A**

Mặt cầu (*S*) có tâm , bán kính 

Đường thẳng *d* có vec-tơ chỉ phương đường thẳng  có vec-tơ chỉ phương là .

Ta có 

Gọi (*P*) là mặt phẳng cần tìm. Ta có:

 Suy ra mặt phẳng (*P*) có phương trình dạng 

Mặt phẳng (*P*) tiếp xúc với mặt cầu (*S*) nên 

**V. Tổng ôn tập chủ đề 7**

Quý độc giả vui lòng khai báo sách chính hãng tại web: **congphatoan.com** để nhận được đáp án chi tiết.

**BÀI KIỂM TRA**

**Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* mặt cầu  có bán kính R là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng (*P*) đi qua hai điểm  và vuông góc với mặt phẳng  phương trình là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho  và  Vectơ chỉ phương của đường thẳng  là giao tuyến của (*P*) và mặt phẳng trung trực của *AB* là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Mặt phẳng (*P*) chứa *A, B* và song song với *Oy* có phương trình là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm  Mặt phẳng (*P*) chứa  sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất có phương trình là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm , và mặt phẳng  Nếu *M* thay đổi thuộc (*P*) thì giá trị nhỏ nhất của  là:

**A.** 60. **B.** 50.

**C.** . **D.** .

**Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* có  và . Các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện *ABCD* chia không gian *Oxyz* thành số phần là:

**A.** 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 16.

**Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và các điểm . Gọi *C, D* là các điểm thay đổi trên đường thẳng  sao cho  và mặt cầu nội tiếp tứ diện *ABCD* có thể tích lớn nhất. Khi đó trung điểm của *CD* là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Tìm *m* để  song song với .

**A.** Không tồn tại *m.*

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng (*P*) đi qua các điểm  và  với  có phương trình là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 11:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và đường thẳng  Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** 

**B.** .

**C.**  cắt và không vuông góc với.

**D.** 

**Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho các điểm ,  và  Điểm *M* nằm trong đoạn thẳng *BC* sao cho  Độ dài đoạn thẳng *AM* bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 13:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Gọi *d* là đường thẳng nằm trên  đồng thời cắt đường thẳng  và trục *Oz*. Một vectơ chỉ phương của *d* là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 14:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và đường thẳng  Biết rằng  và  tạo với các trục *Ox, Oz* các góc bằng nhau. Tìm giá trị của *a.*

**A.**  hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  **D.** 

**Câu 15:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho biết đường cong  là tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua điểm A(1;1;1) đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng ,  Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong  bằng:

**A.**  **B.** **C.**  **D.** 3.

**Câu 16:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và mặt phẳng  Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *A* và vuông góc với (*P*).

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 17:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, trong các điểm cho dưới đây điểm nào thuộc trục *Oy*?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 18:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho các điểm  Tìm tọa độ của vectơ pháp tuyến  của mặt phẳng (*ABC*)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 19:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và đường thẳng  *M* là điểm nằm trên *d* sao cho  Tính cao độ  của điểm *M*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 20:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng . Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

**A.** Đường thẳng *d* cắt mặt phẳng (*P*) tại đúng 1 điểm.

**B.** Đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (*P*).

**C.** Đường thẳng *d* nằm trên mặt phẳng (*P*).

**D.** Đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng (*P*).

**Câu 21:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt cầu  Viết phương trình mặt phẳng (*P*) vuông góc với *d*, (*P*) tiếp xúc với (*S*) đồng thời (*P*) cắt trục *Oz* tại điểm có cao độ tương đương.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 22:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* có tọa độ các đỉnh  và điểm  Gọi  là mặt phẳng đi qua các điểm *D, M* sao cho (*P*) chia tứ diện *ABCD* thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 23:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho các điểm  và mặt cầu . Gọi  là điểm trên (*S*) sao cho biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 24:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm , , . Tìm toạ độ điểm *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *OABC.*

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 25:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (*P*) có phương trình  Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (*P*)?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 26:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, Viết phương trình mặt phẳng (*P*) song song và cách đều hai đường thẳng  và 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 27:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm ,  và mặt phẳng . *M* là điểm di động trên mặt phẳng (*P*). Tìm giá trị lớn nhất của 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 28:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, hai mặt phẳng  và  chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là **A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 29:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, phương trình tham số của trục *Oz* là

**A.**  . **B.**  .

**C.**  . **D.**  .

**Câu 30:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt cầu  Hai mặt phẳng  và  chứa *d* và tiếp xúc với . Gọi *M, N* là tiếp điểm. Tính dộ dài đoạn thẳng *MN.*

**A.** 4. **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 31:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và đường thẳng  . Gọi *M* là giao của *d* và (*P*). Viết phương trình mặt phẳng chứa *M* và vuông góc với *d*.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 32: :** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng . Vectơ pháp tuyến  của mặt phẳng (*P*) là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 33:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  Trong các điểm *M, N, E, F,* được cho dưới đây, điểm nào thuộc đường thẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 34:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  Xét mặt phẳng , *m* là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của *m* để đường thẳng  nằm trong mặt phẳng (*P*).

**A. ** và  **B. **

**C.  D. ** và 

**Câu 35:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng  Đường thẳng  là hình chiếu của đường thẳng  lên mặt phẳng (*P*). Một vectơ chỉ phương  của đường thẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 36:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu  Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng có phương trình sau đây tiếp xúc với mặt cầu (*S*).

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 37:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng   và các điểm  Gọi *d*  là đường thẳng đi qua *B*, cắt đường thẳng  và có khoảng cách từ *A* tới *d* lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** Đường thẳng *d* vuông góc với đưởng thẳng .

**B.** Đường thẳng *d* vuông góc với trục *Oz*.

**C.** Đường thẳng *d* vuông góc với trục *Ox*.

**D.** Đường thẳng *d* vuông góc với trục *Oy*.

**Câu 38:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 39:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng (*P*) qua  có dạng , chọn giá trị đúng của *d*.

**A.**  **B.**  **C.** 2. **D.** 

**Câu 40:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, khối cầu đường kính *AB* với  thì có thể tích là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 41:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm , . Khi đó, độ dài đoạn *AB* nhận giá trị nào sau đây?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 42:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng (*P*) qua  và song song với  thì cắt *Oy* tại điểm có tung độ là

**A.** 3. **B.**  **C.** 1. **D.** 

**Câu 43:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng (*Q*) song song với  và cắt mặt cầu  theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là  Biết phương trình (*Q*) có dạng , giá trị của *c* sẽ là

**A.** –13. **B.** 13.

**C.** 1 hoặc 13. **D.** –1 hoặc 13.

**Câu 44:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng ,  và điểm . Biết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa  có dạng  và khoảng cách từ *A* đến (*P*) là 3. Giá trị của *d* là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 1.

**Câu 45:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Nếu *C* là điểm trên (*P*) sao cho ba điểm *A, B, C* thẳng hàng, thì tổng hoành độ và tung độ của *C* nhận giá trị nào sau đây?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** –2. **D.** 1.

**Câu 46:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tam giác *ABC* có  và *C* nằm trên trục *Ox.* Biết tam giác *ABC* vuông tại *A*, khi đó hoành độ của *C* là

**A.** 15. **B.** 17. **C.** 16. **D.** -12.

**Câu 47:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và mặt phẳng  Điểm nào dưới đây thuộc *d* vàcó khoảng cách đến (*P*) bằng 2?

**A.** . **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 48:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  trên đường thẳng  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 49:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm , , . Tập hợp các điểm *M* trên mặt phẳng *Oxz* sao cho  là

**A.** một đường thẳng.

**B.** một điểm.

**C.** một đường tròn.

**D.** tập rỗng.

**Câu 50:** Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Tìm điểm *M* thuộc (*P*) sao cho  và góc  có số đo lớn nhất.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 