Blank Page

# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

**Chủ đề III**

**Vấn đề cần nắm:**

# I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản

I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản

II. Hai phương pháp cơ bản tìm nguyên hàm

III. Khái niệm và tính chất cơ bản tích phân

IV. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân

V. Ứng dụng hình học của tích phân

**Kí hiệu *K* là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng**

**1. Định nghĩa**

|  |
| --- |
| Cho hàm số  xác định trên *K*. Hàm số  được gọi là **nguyên hàm** của hàm số  trên *K* nếu  với mọi *x* thuộc *K*. |

**Định lý 1**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Nếu  là một nguyên hàm của hàm số  trên *K* thì với mỗi hằng số *C*, hàm  cũng là một nguyên hàm của hàm  trên *K*.  2. Đảo lại nếu  và  là hai nguyên hàm của hàm số  trên *K* thì tồn tại hằng số *C* sao cho . |

**Định lý 2**

**STUDY TIP**

Từ định nghĩa nguyên hàm ta có được:



|  |  |
| --- | --- |
|  | Nếu  là một nguyên hàm của  trên *K* thì mọi nguyên hàm của  trên *K* đều có dạng , với *C* là một hằng số. |

**Người ta chứng minh được rằng:** “Mọi hàm số liên tục trên *K* đều có nguyên hàm trên *K*.”

Từ hai định lý trên ta có

- Nếu  là một nguyên hàm của hàm số  trên *K* thì  là họ tất cả các nguyên hàm của  trên *K*. Kí hiệu

**Chú ý**

Biểu thức  chính là vi phân của nguyên hàm  của , vì 

.

**2. Tính chất của nguyên hàm**

**Tính chất 1**



**Tính chất 2**



Từ đây ta suy ra hệ quả

Với  ta có





**Tính chất 3**



**II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm**

**1. Phương pháp đổi biến số**

**Định lý 3**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên *K* và hàm số liên tục sao cho hàm hợp  xác định trên *K*. Khi đó nếu *F* là một nguyên hàm của *f* thì |

**STUDY TIP**

Với phương pháp đổi biến ta cần chú trọng công thức mà suy ra từ định lý như sau:

Nếu , khi đó 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm . |

**Lời giải**

Theo định lý trên thì ta cần viết về dạng .

Mà , do vậy

.

Từ ví dụ trên ta có các bước gợi ý để xử lý bài toán tìm nguyên hàm theo phương pháp đổi biến.

Nếu tính nguyên hàm theo biến mới  thì sau khi tính nguyên hàm xong, ta phải trở lại biến *x* ban đầu bằng cách thay *u* bởi .

|  |
| --- |
| **Dạng 2:** **Gửi vào ngân hàng một số tiền *a* đồng với lãi suất *x*% = *r* mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức có kỳ hạn *m* tháng. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi A sau *n* kỳ hạn.** |

Từ “**STUDY TIP**” ở bên ta thấy đưa về một ghi nhớ quan trọng: Trong cùng một kỳ hạn, lãi suất sẽ giống nhau mà không được cộng dồn vào vốn để tính lãi kép. Ví dụ kỳ hạn là 3 tháng thì lãi suất tháng 1 là *ar*, tháng 2, tháng 3 cũng là *ar*, sau hết kỳ hạn 3 tháng mà không rút ra thì số tiền lãi một kỳ hạn sẽ được cộng dồn vào tiền gốc.

**Lời giải tổng quát**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Đặt .  2. Biến đổi *x* và *dx* về *u* và *du*.  3. Giải bài toán dưới dạng nguyên hàm hàm hợp , sau đó thay biến *x* vào nguyên hàm tìm được và kiểm tra lại kết quả. |

Ta đến với ví dụ 2

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tìm . |

Ở bài toán này, ta thấy số mũ 7 khá cao mà lại có biểu thức trong ngoặc phức tạp hơn là . Do vậy ta sẽ đặt  để đổi biến, dưới đây là lời giải áp dụng gợi ý các bước trên.

**Lời giải**

Đặt 

ta có 



**2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.**

**Định lý 4**

Đẳng thức trong định lý 4 còn dc viết dưới dạng 

**Chú ý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Nếu *u* và *v* là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên *K* thì |

Nếu nguyên hàm có dạng  thì ta có thể nghĩ đến phương pháp nguyên hàm từng phần. Bảng sau gợi ý cách đặt ẩn phụ để tính nguyên hàm .

|  |  |
| --- | --- |
| Hàm dưới dấu tích phân | Cách đặt |
| là đa thức,  là hàm lượng giác |  |
| là đa thức, |  |
| là đa thức, |  |
| là hàm lượng giác, |  |
| là đa thức, |  |
| là đa thức, ,  là các hàm lượng giác |  |

**Ví dụ 3:** Thầy **Điệp Châu** cho bài toán “Tìm ” thì ba bạn Huyền, Lê và Hằng có ba cách giải khác nhau như sau

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Bạn Huyền giải bằng phương pháp đổi biến số như sau:*  “Đặt , ta có:  Vậy  ” | *Bạn Lê giải bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần như sau:*  “Đặt . Ta có .  Công thức nguyên hàm từng phần cho ta  Giả sử *F* là một nguyên hàm của . Theo đẳng thức trên ta có  .  Suy ra .  Điều này chứng tỏ  là một nguyên hàm của .  Vậy .” | *Bạn Minh Hằng chưa học đến hai phương pháp trên nên làm như sau:*  “  ”. |

Kết luận nào sau đây là **đúng**?

**STUDY TIP**

Bài toán củng cố về định lý 1 đã nêu ở trên, và củng cố các cách giải nguyên hàm cơ bản.

**A.** Bạn Hằng giải đúng, bạn Lê và Huyền giải sai

**B.** Bạn Lê sai, Huyền và Hằng đúng.

**C.** Ba bạn đều giải sai.

**D.** Ba bạn đều giải đúng.

**Đáp án D.**

***Nhận xét:*** Sau khi soát kĩ cả ba lời giải, ta thấy ba lời giải trên đều không sai ở bước nào cả, tuy nhiên, tại sao đến cuối cùng đáp án lại khác nhau? Ta xem giải thích ở lời giải sau

**Lời giải**

Cả ba đáp số đều đúng, tức là cả ba hàm số ;  và  đều là nguyên hàm của  do chúng chỉ khác nhau về một hằng số. Thật vậy ;

.

**3. Bảng một số nguyên hàm mở rộng**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**III. Các dạng toán về nguyên hàm**

|  |
| --- |
| **Dạng 1:** **Tìm nguyên hàm  của hàm số  trên .** |

***Các bài toán ở dạng 1 thì chỉ yêu cầu độc giả nhớ bảng công thức nguyên hàm cơ bản thường gặp. Chú ý với các nguyên hàm hàm hợp để áp dụng đúng công thức!***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm của hàm số .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**STUDY TIP**

.

**Lời giải**

Ta có 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tìm nguyên hàm của hàm số .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta có 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tìm nguyên hàm của hàm số .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Ta có .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Đặt  thì .

Khi đó 

.

Thay  ta được 

**STUDY TIP**

Ở đây xuất hiện tích của  nên ta áp dụng nguyên hàm từng phần.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Ta có . Đặt 

Theo phương pháp nguyên hàm từng phần ta có



.

|  |
| --- |
| **Dạng 2:** **Chứng minh  là một nguyên hàm của hàm  trên .** |

Sai lầm thường gặp là không biết cách đạo hàm hàm hợp. Ở đây ta cần đạo hàm như sau:

 với  lần lượt như thế ta sẽ ra được kết quả như bên.

**Chú ý**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho . Hỏi  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Để tìm  là nguyên hàm của hàm số nào trong số 4 hàm số trên, ta sẽ đi đạo hàm  từ đó suy ra .

Ta có 

.

**STUDY TIP**

Công thức cần nhớ:





|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho . Hỏi  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

***Cách 1:*** Ta có 



***Cách 2:*** Thực chất đây là công thức nguyên hàm mà tôi đã giới thiệu ở bảng nguyên hàm phía trên (dòng số 6 trong bảng).

Áp dụng công thức trên ta có ngay .

|  |
| --- |
| **Dạng 3:** **Xác định nguyên hàm của một hàm số với điều kiện ràng buộc.** |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm  của hàm số  thỏa mãn .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

Với các bài toán đơn giải như ở ví dụ 1, ta chỉ đi tìm nguyên hàm như thông thường, sau đó dùng điều kiện ràng buộc có sẵn để tìm hằng số C.

**Lời giải**

Ta có .

Do  nên .

Vậy hàm số cần tìm là .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho hàm số  thỏa mãn  và . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?  **A.** **B.**  **C.** **D.** |

**Đáp án A.**

**STUDY TIP**

Rõ ràng trong bài toán này, việc sử dụng công thức nguyên hàm từng phần sẽ mang lại kết quả nhanh hơn. Do  có sự xuất hiện của tích hai phần tử, nếu sử dụng nguyên hàm từng phần sẽ xuất hiện ngay  và  kết hợp dữ kiện đề bài sẽ có ngay đáp án.

**Lời giải**

Ta có 

Do  nên . Vậy .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho  là một nguyên hàm của hàm số . Tìm nguyên hàm của hàm số ?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

***Cách 1:*** Sử dụng tính chất của nguyên hàm .

Từ giả thiết, ta có



Suy ra .

Vậy 

***Cách 2:*** Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Nếu *u, v* là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên *K* thì:  . |

Ta có 

Từ giả thiết: .

Vậy .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho  là một nguyên hàm của hàm số . Tìm nguyên hàm của hàm số .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án C.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Sử dụng tính chất của nguyên hàm .

Từ giả thiết, ta có 

.

Suy ra .

Vậy .

Đặt .

.

**Cách 2:** Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần.

Ta có 

Từ giả thiết: 

.

Vậy .

|  |
| --- |
| **Dạng 4:** **Tìm giá trị của tham số để  là một nguyên hàm của .** |

Với các bài toán dạng này ta chỉ cần tìm đạo hàm của  sau đó cho  và sau đó sử dụng hệ số bất định để tìm giá trị của tham số.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tìm *a, b, c, d* để  là một nguyên hàm của .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Ta có 





**IV. Bổ sung một số vấn đề về nguyên hàm**

**Nguyên hàm của các dạng hàm số đặc biệt**

|  |
| --- |
| **Dạng 1:** **Nguyên hàm của các hàm số dạng tích, phương.** |

Cho hai hàm số  và  có đạo hàm liên tục trên *K*.

Với các bài toán dạng này ta chỉ cần tìm đạo hàm của  sau đó cho  và sau đó sử dụng hệ số bất định để tìm giá trị của tham số.

Lúc này ta có bảng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dạng | Cấu trúc hàm số | Nguyên hàm |
| Tổng |  |  |
| Hiệu |  |  |
| Tích |  |  |
| Phương |  |  |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Nguyên hàm của hàm số  là:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Thay vì đi tìm nguyên hàm của hàm số theo cách truyền thống, ta có thể giải bài toán bằng bảng ở trên như sau:





|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Ta có 

.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tìm nguyên hàm  của hàm số  với .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án C.**

**Lời giải**

Ta có





|  |
| --- |
| **Dạng 2:** **Các dạng nguyên hàm đơn giản chứa hàm .** |

**Bảng nhận dạng nguyên hàm và đạo hàm của hàm số chứa .**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đặc trưng | Nguyên hàm | Hàm số (đạo hàm) |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Ta có 

Từ bảng nhận dạng nguyên hàm phía trên  là nguyên hàm của hàm số đã cho.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tìm nguyên hàm của hàm số  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Ta có 

 là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Tương tự với hai nhận dạng còn lại, quý độc giả có thể áp dụng vào các bài toán phức tạp hơn.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta có  là nguyên hàm của hàm số đã cho.

**Nguyên hàm một số hàm lượng giác**

|  |
| --- |
| a. Dạng  trong đó ***m, n*** là các số tự nhiên. |

**Trường hợp 1:** Trong hai số *m, n* có ít nhất một số lẻ.

|  |  |
| --- | --- |
| Lũy thừa của  là số lẻ,  thì đổi biến | Lũy thừa của  là số lẻ,  thì đổi biến |
|  |  |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tìm . |

**Lời giải**

Vì lũy thừa của  là số lẻ nên ta đổi biến .





.

**Trường hợp 2:** Cả hai số *m ,n* đều là số chẵn: Ta sử dụng công thức hạ bậc để giảm một nửa số mũ của , để làm bài toán trở nên đơn giản hơn.

|  |
| --- |
| b. Dạng . |

Ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng trong lượng giác.

|  |
| --- |
| c. Dạng  trong đó ***m, n*** là các số nguyên. |

|  |  |
| --- | --- |
| Lũy thừa của  là số nguyên dương chẵn,  thì ta đổi biến | Lũy thừa của  là số nguyên dương lẻ,  thì ta đổi biến |
|  | Khi đó , do đó |

Tương tự với hai nhận dạng còn lại, quý độc giả có thể áp dụng vào các bài toán phức tạp hơn.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tìm nguyên hàm  a.  b. |

**Lời giải**

a. Do lũy thừa của  là số nguyên dương chẵn nên đặt . Từ công thức tổng quát đã chứng minh ở trên ta có

.

b. Do lũy thừa của  là một số lẻ nên ta đặt , do vậy, từ công thức tổng quát chứng minh ở trên ta có



.

**Đổi biến lượng giác**

Khi nguyên hàm, tích phân của các hàm số mà biểu thức của nó có chứa các dạng , thì ta có cách biến đổi lượng giác như sau:

|  |  |
| --- | --- |
| **Biểu thức có chứa** | **Đổi biến** |
|  | Hoặc |
|  | Hoặc |
|  | Hoặc |
|  |  |
|  |  |

**Nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ**

**STUDY TIP**

Kí hiệu  là bậc của đa thức .

Cho hàm số  có dạng  trong đó *P* và *Q* là các đa thức, và *P* không chia hết cho *Q*.

Hàm  được gọi là hàm **phân thức hữu tỉ thực sự** nếu .

Trong các bài toán tìm nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ, nếu  chưa phải là hàm phân thức hữu tỉ thực sự thì ta thực hiện chia tử thức cho mẫu thức để được

,

Khi đó,  sẽ là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

**Định lý:** Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

Đó là các biểu thức có dạng  là các hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng. Để tách được phân thức ta dùng phương pháp hệ số bất định.

|  |
| --- |
| a. Trường hợp phương trình  không có nghiệm phức và các nghiệm đều là nghiệm đơn. |



(Số nhân tử chính bằng bậc của đa thức ).

Trong trường hợp này, *g* có thể biểu diễn dưới dạng



Sau khi biểu diễn được  về dạng này, bài toán trở thành bài toán cơ bản.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Họ nguyên hàm của hàm số  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Phân tích**

**Đáp án B.**

Ta có 

Khi đó , đồng nhất hệ số thì ta được

**Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 3**

Tìm 



**Lời giải**

Ta có 



|  |  |
| --- | --- |
|  | Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng: |

|  |
| --- |
| b. Trường hợp  không có nghiệm phức, nhưng có nghiệm thực là nghiệm bội. |

Nếu phương trình  có các nghiệm thực  trong đó  là nghiệm bội *k* thì ta phân tích  về dạng



Trên đây là phần lý thuyết khá phức tạp, ta đến với bài tập ví dụ đơn giản sau:

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Nguyên hàm của hàm số  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Phân tích**

Nhận thấy  là nghiệm bội ba của phương trình , do đó ta biến đổi 



Từ đây ta có 

**Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 4**

Tìm 

**Lời giải**

Ta có 

|  |  |
| --- | --- |
|  | Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng ví dụ 4: |

**TỔNG QUÁT:** **Việc tính nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ thực sự được đưa về các dạng nguyên hàm sau:**

|  |
| --- |
| **1.**  **2.** |

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Câu 1:** Tìm nguyên hàm .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 2:** Tìm nguyên hàm .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 3:** Tìm nguyên hàm 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 4:** Cho  là các hàm số liên tục trên . Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?

**A.**  với *k* là hằng số

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 5:** Nguyên hàm của hàm số  là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 6:** Tìm một nguyên hàm  của hàm số  biết .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 7:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 8:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 9:** Tìm nguyên hàm của hàm số:

.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 10:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 11:** Tìm nguyên hàm  của hàm số , biết .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 12:** Tìm nguyên hàm 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 13:** Cho hàm số  . Gọi  là một nguyên hàm của . Chọn phương án sai.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 14:** Tìm nguyên hàm  của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 15:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 16:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 17:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 18:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 19:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 20:** Biết  là một nguyên hàm của hàm số  và . Tìm.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 21:** Biết  là nguyên hàm của  và . Khi đó giá trị  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 22:** Nguyên hàm của hàm số

 là:

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 23:** Tìm nguyên hàm  biết .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

.

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1:** **Đáp án A.**

Đặt ;



Lúc này ta có





**Câu 2: Đáp án C.**

Đặt 

Khi đó











**Câu 3: Đáp án D.**



Đặt .



Khi đó 



**Câu 4: Đáp án C.**

**Câu 5: Đáp án D.**

Ta có 

**Câu 6: Đáp án A.**

Ta có 

Mà 

**Câu 7: Đáp án A.**

.

**Câu 8: Đáp án C.**

Ta có 

**Câu 9: Đáp án C.**



**Câu 10: Đáp án A.**

**Câu 11: Đáp án C.**





Mà , ta chọn C.

**Câu 12: Đáp án D.**

Ta có







Áp dụng vào bài ta chọn D.

**Câu 13: Đáp án B.**

Ta có 



Từ đây ta thấy A đúng.

Với B ta thấy

, B sai.

**Câu 14: Đáp án A.**

Ta có 



 (áp dụng bảng ở lý thuyết).

**Câu 15: Đáp án C.**

Ta có 





**Câu 16: Đáp án B.**

Ta có 







**Câu 17: Đáp án A.**



 (Áp dụng công thức )

**Câu 18: Đáp án D.**

Ta có

**Câu 19: Đáp án A.**

Ta có 



**Câu 20: Đáp án C.**









**Câu 21: Đáp án A.**

Ta có 

Mà .

Do đó .

**Câu 22: Đáp án C.**





**Câu 23: Đáp án D.**





**V. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân**

Ta gọi  là dấu tích phân, *a* là cận dưới, *b* là cận trên,  là biểu thức dưới dấu tích phân và  là hàm số dưới dấu tích phân.

**1. Định nghĩa**

1. Định nghĩa tích phân  chỉ được áp dụng khi biết một nguyên hàm  của  trên đoạn .

2. Tích phân  là một số, còn nguyên hàm là một (họ) hàm số (nó còn được gọi là tích phân không xác định).

3.  không phụ thuộc vào chữ viết biến số trong dấu tích phân, mà chỉ phụ thuộc vào hàm số *f* và đoạn .

**Chú ý**

|  |
| --- |
| Cho hàm số  là hàm số liên tục trên đoạn . Giả sử  là một nguyên hàm của  trên đoạn .  Hiệu số  được gọi là tích phân từ *a* đến *b* (hay tích phân xác định trên đoạn ) của hàm số , kí hiệu là .  Vậy . |

**2. Nhận xét**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **a. Tích phân của hàm số *f* từ *a* đến *b*** có thể kí hiệu bởi  hay . Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào *f* và các cận *a, b* mà không phụ thuộc vào biến số *x* hay *t*.  **b. Ý nghĩa hình học của tích phân.** Nếu hàm số  liên tục và không âm trên đoạn , thì tích phân  là diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị , trục *Ox* và hai đường thẳng . Vậy . |

**3. Các tính chất của tích phân**

**Tính chất 1**

**** với *k* là hằng số.

Ta quy ước ;

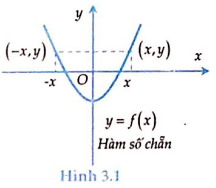


**Tính chất 2**

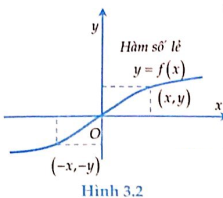


**Tính chất 3**

 với .

**Định lý 1**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho *f* là hàm số xác định trên *K* và *a* là một điểm cố định thuộc *K*. Xét hàm số  xác định trên *K* bởi công thức    Khi đó *G* là một nguyên hàm của *f*. |

**Định lý 2**

Tích phân của hàm lẻ và hàm chẵn trên .

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Nếu *f* là một hàm số chẵn, khi đó  2. Nếu *f* là một hàm số lẻ, khi đó . |

**Đọc thêm**

Ta vừa đưa ra 3 tính chất của tích phân theo chương trình chuẩn. Dưới đây là các tính chất bổ sung:

|  |
| --- |
| **1.**  **2.**  **3.** Nếu  thì .  *Hệ quả 3:* Nếu hai hàm số  và  liên tục và thỏa mãn  thì  **Chú ý:** Nếu  liên tục và dương trên  thì .  **4.** .  **5.** Nếu  là các hằng số thì  hay . |

**VI. Hai phương pháp cơ bản để tìm tích phân**

**1. Phương pháo đổi biến số**

**Định lý 1**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho hàm số  liên tục trên đoạn . Giả sử hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  sao cho  và  với mọi . Khi đó |

**Từ định lý 1 ta rút ra các bước đổi biến số**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Đặt , ta xác định đoạn  sao cho  và , ;  2. Biến đổi  3. Tìm một nguyên hàm  của  4. Tính  5. Kết luận . |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tính tích phân  ?  **A.** **B.**  **C.** **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Đặt .

Đổi cận 

Khi đó 



**Định lý 2**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho hàm số  liên tục trên đoạn . Nếu hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  và  với mọi  sao cho  liên tục trên đoạn  thì |

**Từ định lý 2 ta rút ra các bước đổi biến số**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Đặt ,  2. Biến đổi .  3. Tìm một nguyên hàm  của .  4. Tính .  5. Kết luận |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tính tích phân  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Đặt , ta có

.

Hàm số  do  có nguyên hàm .

Vậy .

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

Tương tự tính nguyên hàm từng phần, ta có định lý sau:

**Định lý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Nếu  và  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  thì  hay |

**Ta có bảng sau**

Trong thực tế, đôi khi việc sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần phải linh hoạt, đôi khi phải dự đoán khác thường như ví dụ 1 dưới đây.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Ta thấy trong bài toán bên việc sử dụng tích phân từng phần ở đây rất thông minh khi phát hiện được  khi nhân thêm *x* sẽ triệt tiêu được .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho  với ; . Lúc này  có giá trị bằng  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

Ta có  (1)

Đặt .

Đặt 

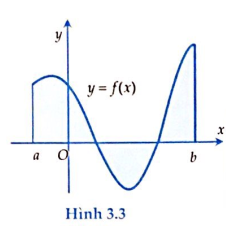
Theo công thức tích phân từng phần ta có  (2)

Từ (1); (2) ta có





.

**VII. Ứng dụng hình học của tích phân**

**1. Tính diện tích hình phẳng**

**a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành**

|  |
| --- |
| Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  liên tục, trục hoành và hai đường thẳng  được tính theo công thức |

***Chú ý:*** Trong trường hợp dấu của  thay đổi trên đoạn  thì ta phải chia đoạn  thành một số đoạn con để trên đó dấu của  không đổi, do đó ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên đoạn đó.

**b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong**

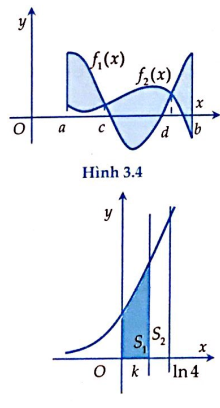
|  |
| --- |
| Cho hai hàm số  và  liên tục trên đoạn . Khi đó diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số ,  và hai đường thẳng  là . |

Tương tự như chú ý ở trên thì ở bài toán này ta cũng phải xét đoạn mà dấu của  không đổi.

**Chú ý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Khi áp dụng công thức này cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy ta phải giải phương trình  trên đoạn .  Giả sử phương trình có hai nghiệm . Khi đó  không đổi dấu trên các đoạn . Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn  thì ta có |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Tính diện tích hình phẳng (hình được tô màu) ở biểu diễn ở hình 3.4. |

**Lời giải**

Nhận thấy trên  và  thì ; trên  thì 

Do vậy

(Trên đây là cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối)

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Cho hình thang cong  giới hạn bởi các đường , ,  và . Đường thẳng  chia  thành hai phần có diện tích là  và  như hình vẽ bên. Tìm *k* để .  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Nhìn vào hình vẽ ta có được các công thức sau:

 .

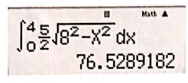
|  |
| --- |
| **Ví dụ 6:** Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)  **A.** 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng.  **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng. |

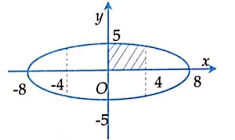
**Lời giải**

**Đáp án B.**

Nhận thấy đây là bài toán áp dụng ứng dụng của tích phân vào tính diện tích hình phẳng. Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy, diện tích hình phẳng cần tìm gấp 4 lần diện tích phần gạch chéo, do đó ta chỉ cần đi tìm diện tích phần gạch chéo.

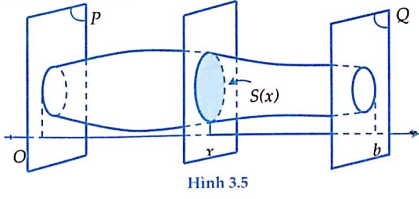
Ta có phương trình đường elip đã cho là . Xét trên  nên  thì . Khi đó , vậy diện tích trồng hoa của ông An trên mảnh đất là 



Khi đó số kinh phí phải trả của ông An là  đồng.

**c. Tính thể tích vật thể**

|  |
| --- |
| Cho H là một vật thể nằm giới hạn giữa hai mặt phẳng  và . Gọi  là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ *x* (). Giả sử  là một hàm liên tục. Khi đó thể tích *V* của H là . (hình 3.5) |

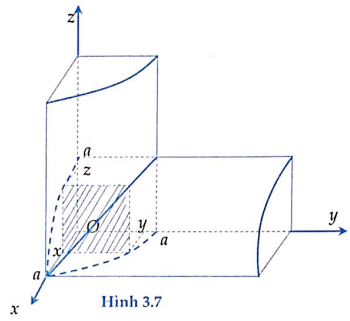


|  |
| --- |
| **Ví dụ 7:** Tính thể tích vật thể tạo được khi lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính đáy bằng *a*. (hình 3.6)  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Đáp án A**

**Lời giải**

Ta sẽ gắn hệ trục tọa độ *Oxyz* vào vật thể này, tức là ta sẽ đi tính thể tích vật thể *V* giới hạn bởi hai mặt trụ:  và  ().



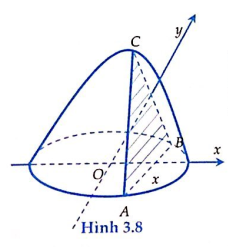
Hình vẽ trên mô tả một phần tám thứ nhất của vật thể này, với mỗi  thiết diện của vật thể (vuông góc với trục *Ox*) tại *x* là một hình vuông có cạnh  (chính là phần gạch chéo trong hình 3.7). Do đó diện tích thiết diện sẽ là:

 , .

Khi đó áp dụng công thức (\*) thì thể tích vật thể cần tìm sẽ bằng:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 8:** Tính thể tích của vật thể H biết rằng đáy của H là hình tròn  và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành luôn là tam giác đều. |

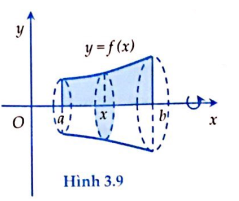
**Lời giải**

Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ là

 cắt vật thể  theo thiết diện là tam giác *ABC* đều, với *AB* chứa trong mặt phẳng  (hình 3.8).

Ta có . Do đó . Vậy

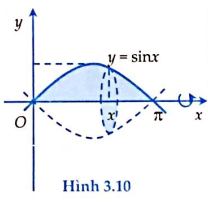
 (đvtt).

**d. Tính thể tích khối tròn xoay**

**Định lý**

**Chú ý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho hàm số  liên tục, không âm trên đoạn . Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích *V* của khối tròn xoay đó là . |



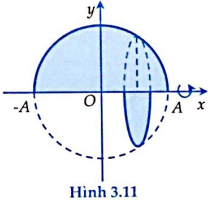
|  |
| --- |
| **Ví dụ 9:** Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong , trục hoành và hai đường thẳng  (hình 3.10) quanh trục *Ox* là  **A.** (đvtt) **B.** (đvtt)  **C.** (đvtt) **D.** (đvtt) |

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Áp dụng công thức ở định lý trên ta có

.

***Tiếp theo dưới đây là một bài toán thường xuất hiện trong các đề thi thử, bài toán có thể đưa về dạng quen thuộc và tính toán rất nhanh.***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 10:** Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong  và trục hoành quanh trục hoành. |

**Lời giải tổng quát**

Ta thấy 

Do  với mọi *x*, do vậy đây là phương trình nửa đường tròn tâm *O*, bán kính  nằm phía trên trục *Ox*. Khi quay quanh trục *Ox* thì hình phẳng sẽ tạo nên một khối cầu tâm O, bán kính  (hình 3.11). Do vậy ta có luôn 

Vậy với bài toán dạng này, ta không cần viết công thức tích phân mà kết luận luôn theo công thức tính thể tích khối cầu.

**Đọc thêm**

**Định lý**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cho hàm số  liên tục, không âm trên đoạn . Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  quay quanh trục tung tạo nên một khối xoay. Thể tích *V* của khối tròn xoay đó là . |

**VIII. Một số dạng tích phân thường gặp**

**Tích phân hàm phân thức hữu tỉ**

Trong bài toán này, ta sẽ tham khảo lại phần “Nguyên hàm phân thức hữu tỉ” phía trên để hiểu được các định nghĩa phân thức hữu tỉ, phân thức hữu tỉ thực sự và phân thức đơn giản, cùng các định lý đã được nêu ở phần nguyên hàm ở phần trước.

Dưới đây là một số bài toán thường gặp về dạng này.

**A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KĨ NĂNG BIẾN ĐỔI**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **1.  2.** .  **Kỹ năng biến đổi tam thức bậc hai**  **1.**  **2.** |

**B. CÁC DẠNG TOÁN**

|  |
| --- |
| **Dạng 1:** Tích phân dạng . |

**Phương pháp chung**

**STUDY TIP**

Khi mẫu thức có dạng tam thức bậc hai thì thường đưa về dạng 

Biến đổi 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho , với . Đặt , lúc này *S* có giá trị bằng  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

**STUDY TIP**



Áp dụng bài toán tổng quát trên ta có





.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho  với . Tích *ab* có giá trị bằng  **A.** ‒24 **B.** 24  **C.** ‒48 **D.** 48 |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Áp dụng bài toán tổng quát trên ta có







.

|  |
| --- |
| **Dạng 2:** Tính tích phân |

**Phương pháp chung**

**STUDY TIP**

Khi mẫu thức có dạng tam thức bậc hai thì thường đưa về dạng 

**Cách 1:**





**Cách 2:** Phương pháp hệ số bất định (Sử dụng khi mẫu có nghiệm)

\* Nếu mẫu số có nghiệm kép  tức là  ta giả sử



Quy đồng vế phải và đồng nhất hệ số hai vế để tìm *A; B*.

Sau khi tìm được *A; B* thì ta có .

\* Nếu mẫu số có 2 nghiệm phân biệt :  thì ta giả sử:



Quy đồng và đồng nhất hệ số để tìm *A; B*.

Sau khi tìm được *A; B* ta có .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho ,  thì  có giá trị bằng  **A.** ‒35 **B.** ‒2  **C.** 2 **D.** 3 |

**Đáp án D.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có 





.

.

**Cách 2:** Ta thấy .

Giả sử 

Đồng nhất hệ số ta có 

Áp dụng công thức ta có .

**Cách 3:** Sử dụng máy tính cầm tay.

*Trong bài toán này ta có thể sử dụng chức năng TABLE để giải quyết, tuy nhiên cách làm này chỉ mang tính chất “mò” (tức dự đoán khoảng của a; b).*

Ta thấy .

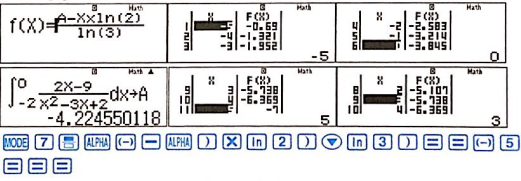
1. Lúc này ta nhập biểu thức tích phân vào máy tính và gán giá trị này cho biến A.

Ta thấy khi nhập vào màn hình  thì ta đã coi *b* (biến *X*) chạy trong khoảng từ  và step là 1. Ở đây ta chọn STEP 1 vì đề cho a; b nguyên. Lúc này màn hình sẽ hiện giá trị của b (chính là X) và giá trị tương ứng của a (chính là cột ). Do a; b nguyên nên ta sẽ chọn .

**Giải thích cách sử dụng MTCT**



2. Tiếp tục sử dụng MODE 7 TABLE để chạy biến giá trị của *b* từ đó tìm ra bảng giá trị tương ứng của *a*.



Ta thấy chỉ có trường hợp  là thỏa mãn 2 số nguyên, do đó ta kết luận .



**Đọc thêm: Tích phân hàm phân thức chứa căn ở mẫu thức**

|  |
| --- |
| **Dạng 1:** Tính tích phân |

**Phương pháp chung**

Phương pháp này chỉ áp dụng được khi hệ số .

**Chú ý**

Ta có 



Áp dụng bài toán vừa chứng minh ở trên ta áp dụng vào bài toán biến đổi sau:



|  |
| --- |
| **Dạng 2:** Tính tích phân . |

**Phương pháp chung**

Ta có 



|  |
| --- |
| **Dạng 3:** Tính tích phân |

**Phương pháp chung**

Đặt . Khi đó



 (quay trở về bài toán dạng 1).

**Tích phân hàm lượng giác**

**A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KĨ NĂNG BIẾN ĐỔI**

**Các công thức nguyên hàm của hàm lượng giác**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**B. CÁC DẠNG TOÁN**

|  |
| --- |
| **Dạng 1:** Tính tíchphân: |

1. Nếu *n* chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc.

2. Nếu  thì ta sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo trường hợp 3.

3. Nếu  và *n* lẻ  thì ta thực hiện biến đổi.



Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển  .

Từ đây ta giải quyết dc bài toán.



Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển .

Từ đây ta giải quyết dc bài toán.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho . Đẳng thức nào sau đây đúng?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta có



Ta thấy bậc của cos3x là 4 là một số chẵn. Từ 1 trong phần phương pháp chung ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc như lời giải bên.

.

Từ đây ta giải quyết được bài toán.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho:  .  Đặt . Giá trị của *S* bằng  **A.**  **B.**   **C.**  **D.** |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Ta có 





.

|  |
| --- |
| **Dạng 2\*:** Tính tích phân . |

**Phương pháp chung**

**a. Trường hợp 1: *m; n* là các số nguyên**

1. Nếu *m* chẵn, *n* chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

2. Nếu *m* chẵn, *n* lẻ  thì biến đổi



.

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

3. Nếu *m* lẻ , *n* chẵn thì ta biến đổi



.

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

4. Nếu *m* lẻ, *n* lẻ thì sử dụng biến đổi 2 hoặc 3 cho số mũ lẻ bé hơn.

**b. Trường hợp 2: *m; n* là các số hữu tỉ**



|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho . Đẳng thức nào sau đây là đúng?  **A.** .  **B.**  **C.**  **D.** |

**Đáp án C.**

**Lời giải**



Trong bài toán này, ta thấy *m* lẻ, *n* chẵn nên ta áp dụng phương pháp 3 trong bài toán tổng quát phía trên.



.

|  |
| --- |
| **Dạng 3:** Tính tích phân . |

**Phương pháp chung**

Sử dụng các công thức sau:









|  |
| --- |
| **Dạng 4\*:** Tích phân liên kết. |

**Phương pháp chung**

|  |
| --- |
| **Bài toán 1:** Tính tích phân |

\* . Xét tích phân liên kết 

Ta có 

Giải hệ phương trình ta được 

Các trường hợp thường gặp:

\*  khi đó tính  .

\*  là một tích phân đơn giản, thường thì các hàm số dưới dấu tích phân ;  (của hai tích phân liên kết) thường có tính cân xứng hoặc bổ sung cho nhau như ở bài toán 1 và bài toán 2.

Việc tìm được tích phân liên kết phụ thuộc vào kinh nghiệm giải toán của người đọc.

|  |
| --- |
| **Bài toán 2:** Tính tích phân |

**Phương pháp chung**

Xét tính phân liên kết với  là 

Ta có 

Giải hệ phương trình ta được .

|  |
| --- |
| Từ hai bài toán trên ta đưa ra kết luận về tích phân liên kết như sau:  Trong một số bài toán tính tích phân , ta sẽ sử dụng tích phân  là tích phân liên kết của  sao cho ta có thể xác lập được mối quan hệ ràng buộc giữa  và  thành hệ phương trình như sau:    Giải hệ phương trình ta dễ dàng tìm được . |

**Một số bài toán tích phân gốc thường gặp**

|  |
| --- |
| **Bài toán 1:** **Cho *f* là hàm số chẵn và liên tục trên  với . Chứng minh rằng  (với  và ) (1)** |

**Lời giải tổng quát**

Đặt  thì  nên



Do đó



|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tính tích phân  **A.**  **B.**  **C.** 1 **D.** −1 |

**Đáp án A.**

**Lời giải**

Ta thấy hàm số  là hàm số chẵn, áp dụng bài toán 1 ở trên ta có:

.

|  |
| --- |
| **Bài toán 2\*: Cho *f* là hàm số liên tục trên đoạn . Chứng minh rằng:**    **Đặc biệt** |

**Lời giải tổng quát**

Đặt  thì . Khi đó



Khi , ta nhận được công thức (3).

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho , . Khi đó tổng  bằng  **A.** 8 **B.** 10 **C.** 5 **D.** 4 |

**Đáp án B.**

**Lời giải**

**Nhận xét:**  liên tục trên , áp dụng (3) với bài toán này ta có:



.

Vậy .

|  |
| --- |
| **Bài toán 3: Cho hàm số *f* liên tục trên . Chứng minh rằng:** |

**Lời giải tổng quát**

Đặt  thì , khi đó 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tính tích phân:  **A.**  **B.** 1 **C.**  **D.** |

**Đáp án C.**

**Lời giải**

Sử dụng công thức (4) ta có 

Từ đây suy ra .

|  |
| --- |
| **\*\* Bài toán 4: (đọc thêm) Cho *f* là hàm số liên tục trên  thỏa mãn . Chứng minh rằng:  (8)**  **Đặc biệt .** |

**Lời giải tổng quát**

Thực hiện phép biến đổi  thì



Từ đó suy ra (8). Chọn  ta có (9).

Blank Page

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**1. Bài toán tính tích phân**

**Câu 1:** Biết tích phân  . Khi đó tích  có giá trị bằng

**A.** 1 **B.** −1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 2:** Biết  và  là hàm số lẻ. Khi đó  có giá trị bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 3:** Tích phân  có giá trị bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho tích phân  nếu đặt  thì  trong đó

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 5:** Tính tích phân 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 6:** Cho . Tìm giá trị của *a* là

**A.** 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

**Câu 7:** Tích phân  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 8:** Tích phân  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 9:** Tính tích phân: 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 10:** Giá trị dương *a* sao cho

 là

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

**Câu 11:** Giả sử . Giá trị của *c* là

**A.** 9 **B.** 3 **C.** 81 **D.** 8

**Câu 12:** Tích phân  có giá trị là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 13:** Giả sử  và . Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 14:** Tính tích phân 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 15:** Cho biết . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 16:** Đẳng thức  xảy ra nếu

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 17:** Tính tích phân 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 18:** Nếu  thì giá trị của *a* bằng:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** *e*

**Câu 19:** Nếu  thì *n* bằng

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

**Câu 20:** Giá trị của  bằng

**A.** −1 **B.** 1 **C.** *e* **D.** 0

**Câu 21:** Tích phân  có giá trị bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 22:** Tích phân  có giá trị bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 23:** Tích phân  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 24:** Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 25:** Biết , với *a, b* là các số nguyên. Tính tổng  bằng

**A.** −1 **B.** 1 **C.**  **D.** 0

**Câu 26:** Cho  và , với *n, m* là các số nguyên dương. Khi đó:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 27:** Biết , với *a, b, c* là các số nguyên. Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 28:** Kết quả tích phân  được viết dưới dạng  với *a, b* là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 29:** Xét tích phân . Nếu đặt , ta được:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 30:** Có bao nhiêu giá trị của *a* trong đoạn  thỏa mãn .

**A.** 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

**Câu 31:** Cho hàm số  có đạo hàm trên đoạn . Có  và tích phân . Tính .

**A.** 1 **B.** −5 **C.** −6 **D.** 

**Câu 32:** Cho , tính .

**A.** −6 **B.**  **C.** −1 **D.** 5

**Câu 33:** Biết rằng: . Trong đó *a, b, c* là những số nguyên. Khi đó  bằng

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

**Câu 34:** Có bao nhiêu số  sao cho .

**A.** 20 **B.** 19 **C.** 9 **D.** 10

**Câu 35:** Cho . Tìm đẳng thức đúng.

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 36:** Tìm tất cả các số thực *m* dương thỏa mãn :

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 37:** Biết , trong đó *a, b, c* là các số nguyên dương và  là phân số tối giản. Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 38:** Biết , với *a, b, c* là các số nguyên dương và  là phân số tối giản. Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

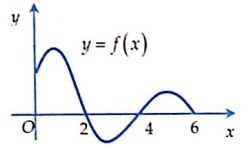
**Câu 39:** Biết rằng: , trong đó *a, b, c* là các hằng số, khi đó tổng  có giá trị là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 40:** Biết tích phân , . Khi đó tích  có giá trị bằng:

**A.** 1 **B.** −1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 41:** Cho đồ thị hàm số  trên đoạn  như hình vẽ.



Biểu thức nào dưới đây có giá trị lớn nhất:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 42:** Tính tích phân:  được kết quả . Giá trị  là

**A.** 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 5

**Câu 43:** Cho . Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 44:** Cho  và . Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 45:** Cho . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**2. Ứng dụng của tích phân trong hình học**

**Câu 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và :

**A.** 1 **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 2:** Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục *Ox* hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  và hai trục tọa độ là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 3:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và các trục tọa độ. Chọn kết quả đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho hàm số . Tính diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục tung, trục hoành và đường thẳng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  và , biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm có hoành độ *x*  là một hình chữ nhật có hai kích thước là *x* và .

**A.** 18 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21

**Câu 6:** Tính diện tích hình phẳng *S* giới hạn bởi đồ thị các hàm số  và , trục hoành và trục tung.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 7:** Công thức tính diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi hai đồ thị , , , , 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 8:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  của hàm số  và đồ thị  của hàm số  bằng

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 9:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và các đường thẳng , .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 10:** Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số  và  quay quanh trục *Ox*.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 11:** Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi đường cong , trục hoành và các đường thẳng ,  . Khối tròn xoay tạo thành khi quay *D* quanh trục hoành có thể tích *V* bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 12:** Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi đường cong , trục hoành và các đường thẳng, . Khối tròn xoay tạo thành khi quay *D* quanh trục hoành có thể tích *V* bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 13:** Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi đường cong , trục hoành và các đường thẳng ; . Khối tròn xoay tạo thành khi quay *D* quanh trục hoành có thể tích *V* bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 14:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

**A.** 0 **B.** 1 **C.**  **D.** 

**Câu 15:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  và đường thẳng  bằng *S*. Giá trị của *S* là

**A.** 1 **B.**  **C.**  **D.** 16

**Câu 16:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhánh đường cong  với , đường thẳng  và trục hoành bằng

**A.** 2 **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 17:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,   bằng . Tìm *k*.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình thang *ABCD* với , , , . Quay hình thang *ABCD* xung quanh trục *Ox* thì thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

## Hướng dẫn giải chi tiết

### 1. Bài toán tính tích phân

**Câu 1:** **Đáp án A**





Đặt 





.

**Câu 2: Đáp án C**

 là hàm số lẻ



**Câu 3: Đáp án A**



Ta thử bằng máy tính để tìm ra kết quả.

**Câu 4: Đáp án D**









**Câu 5: Đáp án B**



.

**Câu 6: Đáp án C**





.

Suy ra: .

Trong các đáp án .

**Câu 7: Đáp án D**

***Cách 1:*** Thử

***Cách 2:*** Đặt .

**Câu 8: Đáp án D**

***Cách 1:*** Thử bằng máy tính

***Cách 2:*** 





**Câu 9: Đáp án C**

Cách 1: Thử trực tiếp bằng máy tính

Cách 2: Đặt , biến đổi

**Câu 10: Đáp án D**









.

**Câu 11: Đáp án B.**

**Câu 12: Đáp án B.**

Thử máy tính.

Gợi ý: 

**Câu 13: Đáp án D**



**Câu 14: Đáp án C**







**Câu 15: Đáp án D**

Ta có:



Thay 

.

**Câu 16: Đáp án D**





Trong 4 phương án, chỉ có phương án D thỏa mãn.

**Câu 17: Đáp án C**

**Cách 1:** Thử bằng máy tính

**Cách 2:** Tích phân thành phần: 

**Câu 18: Đáp án B**

Theo như biến đổi câu 1, ta có:







**Câu 19: Đáp án A**



Đặt . Đổi cận: 





.

**Câu 20: Đáp án D**

**Cách 1:** Thử bằng máy tính

Lấy giá trị *n* càng lớn càng tốt. Giả sử .

Nhập biểu thức 

Máy tính cho kết quả .

**Cách 2:** Giải chi tiết







Ta luôn có 







**Câu 21: Đáp án C**

***Cách 1:*** Thử bằng máy tính

***Cách 2:*** Đặt 

**Câu 22: Đáp án D**

***Cách 1:*** Thử bằng máy tính

***Cách 2:*** Đặt 

**Câu 23: Đáp án D**





Đặt 









**Câu 24: Đáp án A**

Dễ nhận thấy 



Ta thấy 3 phương án B, C, D có cùng đạo hàm.

Vậy phương án A sai.

**Câu 25: Đáp án D**









**Câu 26: Đáp án D**









**Câu 27: Đáp án D**









**Câu 28: Đáp án B**



Tương tự các bài trên







Suy ra, đáp án B: 

**Câu 29: Đáp án D**



Đổi cận:







**Câu 30: Đáp án A**



Đặt 









Mà 



Suy ra, đáp án A

**Câu 31: Đáp án A**





**Câu 32: Đáp án A**

Đặt 



**Câu 33: Đáp án C**













**Câu 34: Đáp án D**











  Có 10 giá trị của *a*.

**Câu 35: Đáp án C**

Đặt 





Suy ra, đáp án C.

**Câu 36: Đáp án C**

Thử các đáp án, suy ra 

**Câu 37: Đáp án B**



Đặt 











**Câu 38: Đáp án A**



Ta có:













**Câu 37: Đáp án C**

Đặt 







Đặt 








.

**Câu 40: Đáp án A**

**Câu 41: Đáp án B**

**Câu 42: Đáp án D**



Đặt 

Đổi cận: 











**Câu 43: Đáp án D**

Đặt . Đổi cận:







**Câu 44: Đáp án C**

Ta có 





**Câu 45: Đáp án A**

Ta có





### 2. Ứng dụng của tích phân trong hình học

**Câu 1: Đáp án C**

Giao điểm tại 





**Câu 2: Đáp án C**

 cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2

Thể tích 

Sử dụng phương pháp tích phân thành phần



**Câu 3: Đáp án D**









**Câu 4: Đáp án C**









**Câu 5: Đáp án A**



**Câu 6: Đáp án A**

Giao điểm  Nhẩm được nghiệm 1





**Câu 7: Đáp án B**

**Câu 8: Đáp án B**

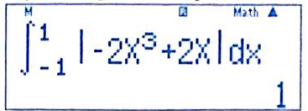
Ta xét phương trình hoành độ giao điểm





Lúc này ta có 

Ta bấm máy và cũng được kết quả như trên:



**Câu 9: Đáp án A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm . Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và các đường thẳng ,  được tính bởi công thức:





Đặt ; 

Đặt 

Khi đó 

.

Vậy từ đây ta có .



Suy ra 

**Câu 10: Đáp án C**

Xét phương trình hoành độ giao điểm



Khi đó thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số

 quay quanh trục *Ox* được tính bởi công thức



Ta thấy trên  thì , do vậy ta có công thức



 (đvtt)

**Câu 11: Đáp án C**

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường , ,  và trục hoành khi quay quanh *Ox* là:



(đvtt).

**Câu 12: Đáp án B**

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường , ,  và trục hoành khi quay quanh *Ox* là:



(đvtt).

**Câu 13: Đáp án A**

Thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường  và trục hoành khi quay quanh *Ox* là:

 (đvtt).

**Câu 14: Đáp án B**

Ta có .

**Câu 15: Đáp án C**

Ta có: Phương trình tung độ giao điểm



.

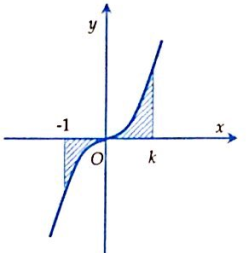
**Câu 16: Đáp án B**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

 hoặc  (loại vì ).

Ta có 

**Câu 17: Đáp án D**



Ta thấy hàm số ,  luôn đồng biến trên  và có tâm đối xứng là . Hình vẽ minh họa ở bên ta thấy với  thì , với  thì .

Vậy 

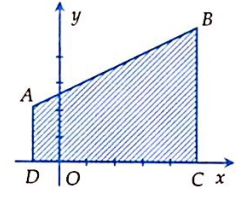


 (Do ).



(vì ).

**Câu 18: Đáp án D**



Phương trình đường thẳng *AB* là:



Thể tích khối tròn xoay là:



# IX. Ứng dụng nguyên hàm, tích phân trong thực tế

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  (m/s), trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?  **A.** 0,2 m **B.** 2 m **C.** 10 m **D.** 20 m |

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Nguyên hàm của hàm vận tốc chính là quãng đường  mà ô tô đi được sau quãng đường *t* giây kể từ lúc tài xế đạp phanh xe.

Vào thời điểm người lái xe bắt đầu đạp phanh ứng với .

Thời điểm ô tô dừng lại ứng với , khi đó .

**STUDY TIP**

Hàm số thể hiện quãng đường vật đi được tính theo thời gian là biểu thức nguyên hàm của hàm số vận tốc.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại quãng đường ô tô đi được là:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Một chiếc ô tô đang đi trên đường với vận tốc   (m/s). Giả sử tại thời điểm  thì . Phương trình thể hiện quãng đường theo thời gian ô tô đi được là  **A.**  (m) **B.**  (m) **C.**  (m) **D.**  (m) |

**Đáp án A.**

**STUDY TIP**

Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường.

**Lời giải**

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có  (m)

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Một vật chuyển động với vận tốc đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc  (m/s2). Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.  **A.** 12000m **B.** 240 m **C.** 864000 m **D.** 3200 m |

**Đáp án C.**

**Phân tích**

Nhận thấy bài toán này khác với hai ví dụ trên ở chỗ bài toán cho biểu thức gia tốc mà không cho biểu thức vận tốc, ở đây ta có thêm một kiến thức như sau:

Biểu thức gia tốc là đạo hàm của biểu thức vận tốc, đến đây, kết hợp với 2 ví dụ đầu ta kết luận: “Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường”. Từ đây ta có lời giải:

**Lời giải**

Ta có  (do ban đầu vận tốc của vật bằng 0).

Vậy quãng đường vật đi được trong 40 phút đầu tiên là:

 (m)

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Câu 1:** Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức , thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị *m*. Biết tại thời điểm  thì vật đi được quãng đường là 10*m*. Hỏi tại thời điểm  thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

**A.** 1410 m **B.** 1140 m **C.** 300 m **D.** 240 m

**Câu 2:** Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc  (m/s). Trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi thời gian khi tàu đi được quãng đường 750 m (kể từ lúc bắt đầu đạp phanh) ít hơn bao nhiêu giây so với lúc tàu dừng hẳn?

**A.** 5 s **B.** 8 s **C.** 15 s **D.** 10 s

**Câu 3:** Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi  (s) chuyển động thẳng với vận tốc  (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

**A.**  (m) **B.**  (m)

**C.**  (m) **D.**  (m)

**Câu 4:** Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường 60 km. Khi đi được  quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng  vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định 3km/h, đến nơi anh ta vẫn chậm mất 45 phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

**A.** 5km/h **B.** 12km/h

**C.** 7km/h **D.** 18 km/h

**Câu 5:** Một ôtô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

**A.** 20m **B.** 10 m **C.** 22,5m **D.** 5m

**Câu 6:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình , trong đó *t* được tính bằng giây và *S* được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi  là:

**A.** 63 m/s2 **B.** 64 m/s2

**C.** 23 m/s2 **D.** 24 m/s2

**Câu 7:** Cho một vật chuyển động có phương trình là:

 (t được tính bằng giây, S tính bằng mét). Vận tốc của chuyển động thẳng  là:

**A.** 3 m/s **B.**  m/s

**C.** 12 m/s **D.**  m/s

**Câu 8:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình , trong đó *t* được tính bằng giây và *S* được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi  là:

**A.** 24 m/s **B.** 23 m/s **C.** 7 m/s **D.** 8 m/s

**Câu 9:** Một chiếc ôtô sẽ chạy trên đường với vận tốc tăng dần đều với vận tốc  (m/s) *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chạy. Hỏi quãng đường xe phải đi là bao nhiêu từ lúc xe bắt đầu chạy đến khi đạt vận tốc 20 (m/s)?

**A.** 10m **B.** 20m **C.** 30m **D.** 40m

**Câu 10:** Một ôtô đang chạy với vận tốc 19m/s thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  (m/s), trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

**A.** 4,75m **B.** 4,5m **C.** 4,25m **D.** 5m

**Câu 11:** Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyể động chậm dần đều với gia tốc  m/s2. Biết ô tô chuyển động thêm được 20 *m* thì dừng hẳn. Hỏi *a* thuộc khoảng nào dưới đây:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 12:** Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn là 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000 đ. Hỏi từ quả dưa như trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? (Biết rằng bề dày của vỏ dưa không đáng kể, kết quả đã được quy tròn)

**A.** 183.000 đ **B.** 180.000 đ

**C.** 185.000 đ **D.** 190.000 đ

**Câu 13:** Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 29,4 m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8 m/s2. Tính quãng đường *S* viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

**A.**  **B.** 

**C.**  m **D.**  m

**Câu 14:** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc  m/s thì tăng vận tốc với gia tốc  (m/s2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

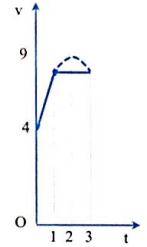
**A.** 68,25 m **B.** 70,25 m

**C.** 69,75 m **D.** 67,25 m

**Câu 15:** Một ca nô đang chạy trên Hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng. Từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  m/s, trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn, ca nô đi được bao nhiêu mét?

**A.** 10 m **B.** 20 m **C.** 30 m **D.** 40 m

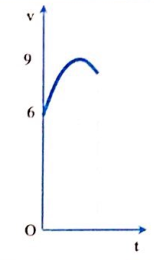
**Câu 16:** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



**A.**  (km) **B.**  (km)

**C.**  (km) **D.**  (km)

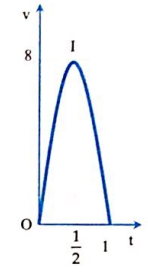
**Câu 17:** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh  và trục đối xứng song song với trục tung như hình dưới. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



**A.** (km) **B.**  (km)

**C.**  (km) **D.**  (km)

**Câu 18:** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc *v* (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường thẳng parabol với  và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường *s* người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy



**A.**  (km) **B.**  (km)

**C.**  (km) **D.**  (km)

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1: Đáp án A**



.

.

Suy ra: Khi  s, vật đi được quãng đường

 m.

**Câu 2: Đáp án A**

Khi tàu dừng hẳn:  (s).





 (s).

**Câu 3: Đáp án D**



Khi vật dừng lại .

Khi đó .

**Câu 4: Đáp án B**

Vận tốc dự định là .

Thời gian đi nửa quãng đường đầu .

Thời gian đi nửa quãng đường sau .

Ta có phương trình



Giải phương trình suy ra:  km/h.

**Câu 5: Đáp án C**

Quãng đường vật đi từ lúc đạp phanh cho đến lúc dừng hẳn







**Câu 6: Đáp án D**





Khi 

**Câu 7: Đáp án B**

Ta có 

Với 

**Câu 8: Đáp án C**

Ta có 

Khi .

**Câu 9: Đáp án B**

.

Khi .

**Câu 10: Đáp án A**

Khi ô tô dừng lại hẳn







**Câu 11: Đáp án C**

Từ giả thiết ta có 

Mà 

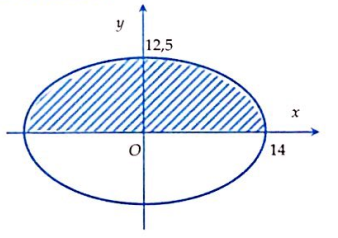
Ô tô chuyển động được 20m thì dừng tại thời điểm 

Suy ra





**Câu 12: Đáp án A**



Giả sử thiết diện nằm trên hệ *Oxy*, tâm *O* trùng với tâm thiết diện

Suy ra elip: . Thể tích quả dưa hấu chính là thể tích vật thể thu được khi quay phần gạch chéo quanh trục *Ox*.



Số tiền thu được là:

 đ.

**Câu 13: Đáp án A**

Ta có công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quãng đường đi được là 



Quãng đường đi được từ lúc bắn đến khi chạm đất là 

**Câu 14: Đáp án C**

Ta có:





Mà .

Sau 3 giây, chất điểm đi được quãng đường:

.

**Câu 15: Đáp án D**

Khi dừng hẳn .

Phương trình quãng đường đi được của ca - nô từ khi hết xăng



Tại 

Suy ra: ca - nô đi được 40 mét

**Câu 16: Đáp án B**

Ta tìm được phương trình của parabol là

.

Khi  thì  (km/h).

Vậy 

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:



**Câu 17: Đáp án C**

Ta tìm được phương trình của parabol là



Như vậy, quãng đường *s* mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:





**Câu 18: Đáp án C**

Ta tìm được phương trình của parabol là



Quãng đường *s* mà người đó chạy được trong khoảng thời gian 0,75 (h) là:



**X. Tổng ôn tập chủ đề 3**

Quý độc giả vui lòng khai báo sách chính hãng tại web: **congphatoan.com** để nhận được đáp án chi tiết.

### BÀI KIỂM TRA SỐ 1

**Câu 1:** Nguyên hàm của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 2:** Biết  là một nguyên hàm của hàm số  và . Tính 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 3:** Giá trị nào của *b* để ?

**A.**  hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

**Câu 4:** Giá trị của tích phân  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 6:** Cho tích phân  và đặt . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 7:** Biết  . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 8:** Cho  và hàm số  liên tục trên  thỏa mãn

, . Tính 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 9:** Nguyên hàm của hàm số  là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 10:** Biết một nguyên hàm của hàm số  là . Khi đó, giá trị của hàm số  tại  là

**A.**  **B.** 

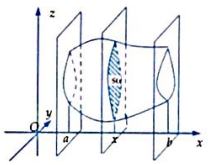
**C.**  **D.** 

**Câu 11:** Biết rằng , với  và  là hai phân số tối giản. Khi đó,  bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho vật thể  giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình  và  .



Gọi  là diện tích thiết diện của  bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm có hoành độ là *x*, với . Giả sử hàm số  liên tục trên đoạn . Khi đó, thể tích *V* của vật thể  được tính bởi công thức

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 13:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn , với mọi . Khi đó, giá trị của tích phân  bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 14:** Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc  (m/s2), trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

**A.** 18 mét **B.**  mét

**C.** 36 mét **D.**  mét

**Câu 15:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 16:** Biết , với *a, b* là các số nguyên. Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 17:** Biết  là một nguyên hàm của hàm số  và . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 18:** Xét  . Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 19:** Biết  với *a, b* là các số nguyên dương. Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 20:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 21:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 22:** Cho  và đặt . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 23:** Tính tích phân 

**A.**  **B.** 

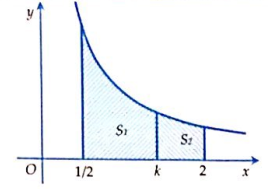
**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Biết  với *a, b* là các số nguyên. Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 25:** Cho hình thang cong  giới hạn bởi các đường  và trục hoành. Đường thẳng  chia  thành hai phần có diện tích là  và  như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả giá trị thực của *k* để .



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 26:** Cho .

Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 27:** Xét . Bằng cách đặt , đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 28:** Cho . Khi đó giá trị của *m* là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 29:** Tìm nguyên hàm  của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 30:** Tính tích phân 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 31:** Gọi  là một nguyên hàm của hàm số  thỏa mãn . Tính .

**A.**  **B.** 0 **C.**  **D.** 

**Câu 32:** Cho *n* là số tự nhiên sao cho . Tính tích phân .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 33:** Tính . Chọn kết quả đúng.

**A.** 6 **B.** −3 **C.** 3 **D.** −6

**Câu 34:** Tìm  ta được

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 35:** Cho biết  là một nghiệm nguyên của hàm số . Tìm .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 36:** Một vật chuyển động với vận tốc  có gia tốc là  (m/s2). Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 2s bằng bao nhiêu?

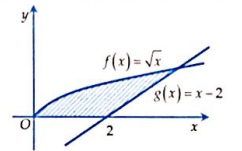
**A.** 12 m/s **B.** 10 m/s

**C.** 8 m/s **D.** 16 m/s

**Câu 37:** Cho , . Tính .

**A.** 25 **B.**  **C.** 16 **D.** 

**Câu 38:** Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 2

**Câu 39:** Một nguyên hàm của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 40:** Cho  là một nguyên hàm của hàm số . Khi đó hiệu số  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 41:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và đường thẳng  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 42:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  (C là hằng số)

**B.**  (C là hằng số; )

**C.**  (C là hằng số)

**D.**  (C là hằng số)

**Câu 43:** Cho . Khi đó với , ta có  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 44:** Cho  trong đó hàm số  là hàm số chẵn trên , khi đó  bằng

**A.** 2 **B.** 16 **C.** 4 **D.** 8

**Câu 45:** Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 46:** Giả sử . Tìm *K*.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 47:** Cho  và . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 48:** Tính thể tích *V* của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  và , biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm có hoành độ  là một hình chữ nhật có hai kích thước là *x* và .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

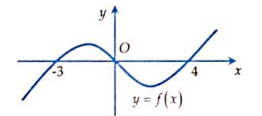
**D.** 

**Câu 49:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ *t* được tính theo công thức , . Nếu coi  là hàm số xác định trên đoạn  thì đạo hàm  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

**A.** Ngày thứ 16 **B.** Ngày thứ 15

**C.** Ngày thứ 5 **D.** Ngày thứ 19

**Câu 50:** Cho đồ thị hàm số  đi qua gốc tọa độ *O*, ngoài ra còn cắt trục *Ox* tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng −3 và 4 như hình bên. Tính diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục *Ox*.



**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

### BÀI KIỂM TRA SỐ 2

**Câu 1:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 2:** Cho tích phân ; với *a, b* là các số nguyên. Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 3:** Cho *m* là số thực dương thỏa mãn . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho hàm số . Tìm nguyên hàm  của hàm số  thỏa mãn .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 5:** Cho hai hàm số  là hàm số liên tục trên *R*, có  lần lượt là một nguyên hàm của . Xét các mệnh đề sau

:  là một nguyên hàm của 

 là một nguyên hàm của  .

:  là một nguyên hàm của . Những mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

**A.**  và  **B.**  và 

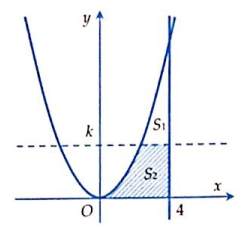
**C.**  **D.** 

**Câu 6:** Cho . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 7:** Cho hình phẳng  giới hạn bởi các đường . Đường thẳng   chia hình  thành hai phần có diện tích  (hình vẽ).



Tìm *k* để .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 8:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 9:** Hàm số nào sau đây **không phải** nguyên hàm của hàm số ?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 10:** Một trường THPT dự định xây một bồn hoa hình tròn có đường kính . Để tạo ấn tượng người thiết kế đã tạo ra hai hình tròn nhỏ trong hình tròn lớn bằng cách lấy điểm *M* giữa *A* và *B* rồi dựng các hình tròn đường kính *MA, MB*. Trong hai hình tròn nhỏ nhà trường dự định trồng hoa hồng đỏ và phần còn lại trồng hoa hồng vàng. Biết giá mỗi gốc hồng đó là 5000 đồng, giá mỗi gốc hồng vàng là 4000 đồng và ít nhất  mới trồng được một gốc hồng. Hỏi chi phí thấp nhất để trồng bồn hoa là bao nhiêu?

**A.** 622000 đồng **B.** 702000 đồng

**C.** 706858 đồng **D.** 752000 đồng

**Câu 11:** Giả sử  với *a, b* là số thực. Khi đó  bằng

**A.**  **B.** 2 **C.** 1 **D.** 

**Câu 12:** Cho , khi đó với *a* khác 0 ta có  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 13:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 14:** Nguyên hàm  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 15:** Nguyên hàm  bằng

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 16:** Nguyên hàm  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 17:** Nguyên hàm  bằng

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 18:** Nguyên hàm  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 19:** Nguyên hàm  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 20:** Nguyên hàm  bằng

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 21:** Cho  là một hàm số chẵn, liên tục trên  và . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 22:** Cho hàm số  có đạo hàm trên đoạn , , . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 23:** Biết  là một nguyên hàm của hàm số  và . Tìm .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

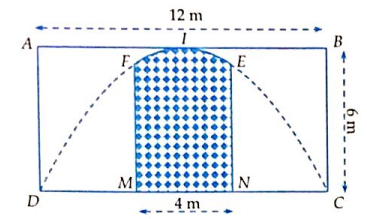
**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

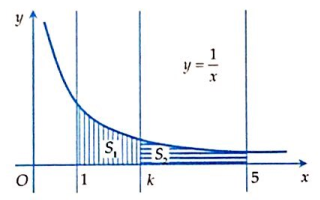
**Câu 25:** Một công ty quảng cáo *X* muốn làm một bức tranh trang trí hình *MNEIF* ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật *ABCD* có chiều cao , chiều dài  (*hình vẽ bên*). Cho biết *MNEF* là hình chữ nhật có ; cung *EIF* có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh *I* là trung điểm của cạnh *AB* và đi qua hai điểm *C, D*. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng / m2. Hỏi công ty *X* cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



**A.** 20.400.000 đồng **B.** 20.600.000 đồng

**C.** 20.800.000 đồng **D.** 21.200.000 đồng

**Câu 26:** Cho hình thang cong  giới hạn bởi các đường . Đường thẳng   chia  thành hai phần là  và  (*hình vẽ bên*). Cho hai hình  và  quay quanh trục *Ox* ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là  và . Xác định *k* để .



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 27:** Biết rằng  với *a, b, c* là các số nguyên. Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 28:** Cho hàm số  liên tục trên  và  là nguyên hàm của , biết  và . Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 29:** Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 30:** Tìm các hàm số  biết 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 31:** Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 32:** Với mỗi số tự nhiên *n*, ta đặt: . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 33:** Cho hàm số  liên tục trên  và là hàm số chẵn. Biết rằng , . Tính giá trị của tích phân .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 34:** Tính tích phân 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 35:** Viết công thức tính diện tích *S* của hình phẳng *D* giới hạn bởi hai đồ thị hàm số ,  liên tục trên đoạn  và các đường thẳng , .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 36:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  và các trục tọa độ?

**A.**  **B.** 3 **C.**  **D.** 

**Câu 37:** Cho hàm số . Đạo hàm của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 38:** Cho các hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn . Khi đó

**A.** 



**B.** 



**C.** 



**D.** 



**Câu 39:** Tính nguyên hàm 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 40:** Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức , thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị m. Biết tại thời điểm  thì vật đi được quãng đường là 10*m*. Hỏi tại thời điểm  *s* thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

**A.** 1410 m **B.** 1140 m **C.** 300 m **D.** 240 m

**Câu 41:** Tìm nguyên hàm của  của hàm số , biết .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 42:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và .

**A.** 5 **B.** 7 **C.**  **D.** 

**Câu 43:** Kí hiệu  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục *Ox*.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 44:** Parabol  chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính  thành 2 phần, tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 45:** Nếu   thì *n* bằng

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

**Câu 46:** Nguyên hàm của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 47:** Cho  liên tục trên đoạn  thỏa mãn . Khi đó giá trị của biểu thức  là

**A.** 10 **B.** 4 **C.** 3 **D.** −4

**Câu 48:** Cho .

Giá trị của  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 49:** Xét hàm số  liên tục trên miền  có đồ thị là một đường cong *C*. Gọi *S* là phần giới hạn bởi *C* và các đường thẳng . Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay *S* quanh *Ox* bằng .

Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  và các đường thẳng  quanh *Ox* là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 50:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số , trục *Ox* và đường thẳng  bằng  với *a, b, c* là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của  là

**A.** 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 1