# TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

**Chủ đề 8**

*Trong chủ đề này, chúng tôi xin giới thiệu một chuyên đề hình học lớp 10 nữa, đó là phép nhân vô hướng của hai vecto. Phép nhân này cho kết quả là một số, số đó gọi là* ***tích vô hướng của hai vecto****. Để có thể xác định tính vô hướng của hai vecto ta cần đến khái niệm* ***giá trị lượng giác của một góc bất kì với *** *là mở rộng của khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn* ****** *đã biết ở lớp 9.*

**Vấn đề cần nắm:**

1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ ******

2. Tích vô hướng của hai vectơ

3. Các hệ thức lượng trong tam giác

### §1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ đến

#### A. Lý thuyết

##### 1. Định nghĩa

Với mỗi góc  ta xác định một điểm *M* trên nửa đường tròn đơn vị sao cho . Tung độ của điểm *M* là sin của góc , kí hiệu là 

Hoành độ của điểm *M* là côsin của góc , kí hiệu .

Giả sử điểm *M* có tọa độ . Khi đó 

**STUDY TIP**

- Để nhớ định nghĩa giá trị lượng giác sin, cos, tan, cot ta có các câu sau:

Cô sin (cos) là trục nằm ngang (trục hoành).

Song song với nó là chàng cô tang (cot).

Còn sin thì đứng thẳng bang.

Đối diện với nó có tang (tan) đứng chờ.

Khi , tỉ số  được gọi là tang của góc , kí hiệu .

Khi , tỉ số  được gọi là cotang của góc , kí hiệu .

Các số  được gọi là các giá trị lượng giác của góc .

***Nhận xét:*** Với định nghĩa này, ta thấy:

+ Góc bất kì từ  đến  có sin thuộc đoạn .

+ Góc bất kì từ  đến  có cosin thuộc đoạn .

+ Với : 

+ Với : 

##### 2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

|  |
| --- |
| 1. .4.  2. . 5.  3. . 6. |

##### 3.Tính chất

###### a) Hai góc phụ nhau

|  |
| --- |
| 1. .4.  2. . 5. |

###### b) Hai góc bù nhau

|  |
| --- |
| 1. .4.  2. . 5. |

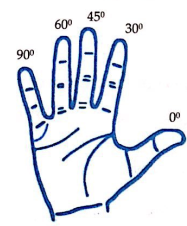
##### 4. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị  lượng giác |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  | 1 |
|  | 1 |  |  |  | 0 |
|  | 0 |  | 1 |  | || |
|  | || |  | 1 |  | 0 |

***Ghi nhớ:***

**Cách 1:** Quy tắc bàn tay trái.

- Bước 1: Ghi các góc đặc biệt lên các ngón tay như hình vẽ (lòng bàn tay hứng vào trong).

 Tính giá trị lượng giác của góc nào, ta quặp ngón tay đó lại như hình vẽ.

- Bước 2: 

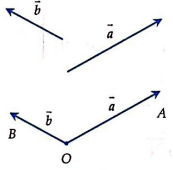


**Cách 2:** Đánh số vị trí cho các góc  lần lượt theo thứ tự là 0, 1, 2, 3, 3.



*Chú ý*: Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Chẳng hạn: 



##### 5. Góc giữa hai vectơ

###### a) Định nghĩa

|  |
| --- |
| Cho hai vectơ  và  đều khác vectơ . Từ một điểm *O* bất kì ta vẽ  và . Góc  với số đo từ  đến  được gọi là góc giữa hai vectơ  và . Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  và  và . Nếu  thì ta nói rằng  và  vuông góc với nhau, kí hiệu là  hoặc |

**Lời giải**

**STUDY TIP**

Trong định nghĩa thì *O* được lấy tùy ý. Tuy nhiên trong giải toán ta có thể chọn vị trí điểm *O* thích hợp, hay chọn điểm *O* trùng với điểm gốc của vectơ  và  cho đơn giản.

###### b) Nhận xét:

Từ định nghĩa ta có .

+  khi và chỉ khi  và  cùng hướng.

+  khi và chỉ khi  và  ngược hướng.

### B. Các dạng toán điển hình

**Dạng 1**

#### Xác định tọa độ của điểm *M*

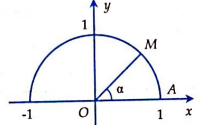
Với dạng toán này, học sinh cần nắm vững định nghĩa..

**STUDY TIP**

Muốn xác định tọa độ của điểm *M* trên nửa đường tròn đơn vị, ta xác định góc . Khi đó điểm *M* sẽ có tọa độ là 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, gọi *M* là một điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  (như hình vẽ). Tọa độ của điểm *M* là:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

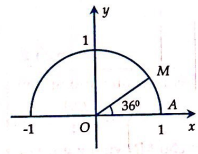


Vì hoành độ của điểm *M* là , tung độ của điểm *M* là  nên tọa độ của điểm *M* là .

**Đáp án C.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, gọi *M* là một điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  (như hình vẽ). Hoành độ của điểm *M* là:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Phân tích:** Dựa vào ví dụ 1, hoành độ điểm *M* là .Dùng máy tính cầm tay ta suy ra kết quả là đáp án A. Ta sẽ chuẩn xác lời giải bằng 2 cách sau:

**Lời giải**

**Cách 1:** (Dùng hình học)

Xét tam iacs *ABC* cân tại *A*, . Khi đó .

Dựng phân giác *CD*. Suy ra tam giác *ACD* cân tại *D*, tam giác *BCD* cân tại *C*.

Do đó: .

Kẻ . Đặt 

Khi đó .

**STUDY TIP**

Do . Nên .

Như vậy ta thấy ngay rằng đáp án C, D bị loại

Do *CD* là phân giác của góc  nên 



Vậy . Hoành độ của điểm *M* là .

***Lưu ý:*** Từ bài toán này ta có thể tính được  bằng cách làm tiếp từ bài toán trên như sau:

Kể , do tam giác *CDB* cân tại *C* nên 

**STUDY TIP**

Ở cách 2, ta cần biết 2 công thức sau:

Do 

Nên 

Mà  nên 

**Cách 2:** (Sau khi học xong các công thức lượng giác)

Ta có: 

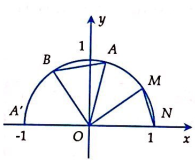


**Đáp án A**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, gọi *A, B* lần lượt là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  (như hình vẽ). Giá trị của  bằng:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Phân tích:** Với bài toán thi trắc nghiệm, với kiểu hỏi này, ta có thể cho . Từ đó ta sẽ cho ra kết quả là đáp án B

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có:  và .

Dựng tam giác *MON* sao cho , *N* là giao điểm của nửa đường tròn với trục hoành, *M* thuộc nửa đường tròn đơn vị.

Suy ra  và .

Với cách dựng hình như trên ta có: 

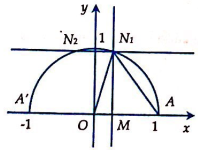


**Đáp án B**

**STUDY TIP**

-Với  thì - Với  thì ;.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, gọi *A,*  là giao điểm của nửa đường tròn đơn vị với trục *Ox* (*A* thuộc tia *Ox*), *M* thuộc trục *Ox* sao cho  (như hình vẽ). Dựng điểm *N* trên nửa đường tròn đơn vị sao cho *MN* vuông góc với *OA*. Khi đó  bằng:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

Do *MN* vuông góc với *OA* nên hoành độ điểm *N* bằng hoành độ điểm *M*. Do  nên . Suy ra 

Tung độ điểm *N* dương do giả thiết bài toán.

Do .

Khi đó 

**Đáp án A**

#### Tính giá trị của biểu thức lượng giác

**Dạng 2**

Với dạng toán này, ta sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

|  |
| --- |
| **Bài toán 1:** Biết , tính các giá trị lượng giác còn lại của góc . |

**Phương pháp:**

Ta có: 

Biết ,  ta sẽ tính được 

|  |
| --- |
| **Bài toán 2:** Biết , tính các giá trị lượng giác còn lại của góc . |

**Phương pháp:**

**Trường hợp 1:** Nếu  thì giá trị 

Do đó ta có thể tính đưuọc 1 trong 3 giá trị  như sau:

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

**Trường hợp 2:** Nếu  thì 

Do đó ta có thể tính được 1 trong 3 giá trị  như sau:

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

|  |
| --- |
| **Bài toán 3:** Biết , tính các giá trị lượng giác còn lại của góc . (Trường hợp biết  tính tương tự) |

**Phương pháp:**

**Trường hợp 1:** Nếu thì 

Do đó ta có thể tính được 1 trong 3 giá trị  như sau:

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

**Trường hợp 2:** Nếu 

Do đó ta có thể tính được 1 trong 3 giá trị  như sau:

- Tính được  bằng cách sử dụng công thức: , rồi suy ra hai giá trị còn lại.

|  |
| --- |
| **Bài toán 4:** Biết giá trị của một biểu thức lượng giác theo , tính các giá trị lượng giác của góc |

**Phương pháp:**

- Biến đổi biểu thức lượng giác đã cho về một dạng chỉ chứa một hàm lượng giác, rồi tực hiện phép đặt ẩn phụ (nếu cần) để giải một phương trình đại số.

- Biến đổi biểu thức đã cho về dạng tích.

- Sử dụng bất đẳng thức.

|  |
| --- |
| **Bài toán 5:** Biết giá trị của một biểu thức lượng giác, giả sử là biểu thức *A*, tính các giá trị của biểu thức lượng giác *B*. |

**Phương pháp:**

- Biến đổi *A* rồi thay vào *B*.

- Biến đổi *B* rồi sử dụng *A*.

- Biến đổi đồng thời cả hai biểu thức *A, B* xuất hiện biểu thức trung gian.

- Sử dụng phương pháp giải phương trình để tính các giá trị.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Biết  và  a) Tính các giá trị lượng giác còn lại.  b) Tính giá trị của biểu thức: . |

**Lời giải**

a) Ta có 

b) Với câu b, ta có thể thay trực tiếp kết quả tính được ở ý a, cho ra kết quả. Ngoài ra ta có thể làm như sau:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho tam giác *ABC* có  a) Tính ?  b) Tính giá trị của biểu thức: . |

**Lời giải**

a) Vì  nên suy ra góc  tù. Do đó 

Ta co: , .

b) Với ý b, ta có thể thay trực tiếp kết quả từ ý a. Sau đây chúng tôi nêu thêm một cách nữa như sau:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho các số *m, n* dương và số  thỏa mãn . Tính . |

**Lời giải**

Với , ta suy ra . Khi đó  (vô lí).

Vậy .

**Cách 1:** (sử dụng bất đẳng thức).

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: 

Áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản ta có:





**Cách 2:** Ta có thể tính  như sau:



**Cách 3:** Đặt . Khi đó (1) trở thành



|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:**  a) Với giá trị nào của  thì biểu thức  xác định.  b) Cho góc  thỏa mãn . Tính . |

**Lời giải**

a) Biểu thức  xác định thì 



b) Ta có: 

**Cách 1:** 



Từ đây sẽ dễ dàng tìm ra được 

**Cách 2:** 



Do  nên . Vậy 

**Dạng 3**

#### Chứng minh, rút gọn biểu thức lượng giác

##### Vấn đề 1. Chứng minh đẳng thức lượng giác

**Phương pháp:**

|  |
| --- |
| **Cách 1.** Biến đổi vế phức tạp sang vế rút gọn.  **Cách 2.** Biến đổi cả hai vế về cùng một biểu thức trung gian.  **Cách 3.** Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh thành một đẳng thức đúng.  - Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản.  - Chú ý tới các hằng đẳng thức đáng nhớ:  **1.**  **2. .**  **3.**  **4.**  **5.** |

##### Vấn đề 2. Rút gọn các biểu thức lượng giác.

**Phương pháp:**

|  |
| --- |
| - Đưa về cùng một loại hàm số lượng giác.  - Rút gọn đến biểu thức đơn giản nhất.  - Nếu gặp dạng phân thức thì ta thường phải biến đổi tử và mẫu duwois dạng tích rồi rút gọn cho nhân tử chung.  - Nếu gặp dạng căn thức thì thường nhân và chia cho biểu thức liên hợp, biến đổi biểu thức trong căn dạng lũy thừa rồi rút gọn. |

##### Vấn đề 3. Chúng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến số

**Phương pháp:**

|  |
| --- |
| - Biến đổi và rút gọn biểu thức cho đến khi nhận được biểu thức đơn giản mà không phụ thuộc vào biến số theo yêu cầu bài toán.  - Nếu biểu thức chứa một biến số thì biến đổi nó bằng hằng số. |

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Rút gọn biểu thức sau  a)  với .  b) .  c) . |

**Lời giải**

a) 



b)

**Cách 1:** 



**Cách 2:** 



**Cách 3**:



c, Đặt  Khi đó: 

Khi đó





|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho  khác 0 và  thỏa mãn  Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào |

**Lời giải**

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu  Theo giả thiết ta suy ra 

Lúc đó  không phụ thuộc vào 

Tương tự với các trường hợp  Rõ ràng rằng nếu  thì 

Ta xét trường hợp cả hai giá trị 

Ta có: 







|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho biểu thức  Xác định để  A không phụ thuộc vào |

**Lời giải**









Để A không phụ thuộc vào  điều kiện là 

Dạng 4

**So sánh giá trị của các “hàm” lượng giác**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trên nửa đường tròn đơn vị (như hình vẽ) lấy hai điểm M, N sao cho 

Ta có: 

Với giả thiết  ta luôn có: 



Trường hợp  ta luôn có 

Trường hợp  ta luôn có: 

Khi đó 

Trường hợp  ta cũng xét tương tự.

|  |
| --- |
| **Ví dụ:** So sánh các cặp số:   1. và 2. và 3. và  . 4. và  . 5. và |

**Lời giải**

Theo nhận xét trên ta dễ dàng đưa ra được kết quả:

1. Do  nên 
2. 
3. 
4. 
5. 

Dạng 5

**Hai góc bù nhau, phụ nhau.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Giá trị của:  là:   1. **B.**  **C.**  **D.** |

Ta có: 

Tương tự: 

Vậy 



**Đáp án B.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tính   1. 1. **B.** 2. **C.** -1.  **D.** |

**Lời giải**

Ta có: 



…



Suy ra 

**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tính giá trị của biểu thức: |

**Lời giải**

1. Do 

nên 

Lại có: 



Vậy 



1. Ta có: 



Vậy 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:   1. b)   c) |

**Lời giải**

Theo giả thiết ta có: 

1. Khi đó ta có: 
2. 
3. 



Dạng 6

**Phương pháp lượng giác hóa để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.**

Trong một số trường hợp, nếu để nguyên dạng đại số của phương trình, bất phương trình hay của hàm số đã cho thì việc giải phương trình, bất phương trình, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sẽ gặp chút khó khăn. Trong trường hợp đó, nếu điều kiện cho phép người ta có thể tàm cách chuyển phương trình, bất phương trình, của hàm số từ dạng đại số thành dạng lượng giác (gọi là phương pháp lượng giác hóa các hàm đại số), với hi vọng dưới dạng mới bài toán sẽ dễ giải hơn.

Các dấu hiệu phép lượng giác hóa:

1. Nếu bài toán có (hiệ hoặc ẩn) điều kiện  thì cho phép biến đổi 
2. Nếu trong bài toán có biểu thức dạng  thì chọn phép biến đổi

**STUDY TIP**

Việc chọn giới hạn của góc  tùy thuộc vào giới hạn của biên x, ngoài ra còn phụ thuộc vào điều kiện cụ thể của bài toán. Các bạn cần chọn điều kiện của  thích hợp sao cho dạng lượng giác của phương trình, hàm số cho ở đầu bài có dạng đơn giản, đặc biệt là khi xuất hiện giá trị tuyệt đối.



1. Nếu trong bài toán có biểu thức dạng  thì chọn phép biến đổi



1. Nếu trong bài toán có biểu thức dạng  thì chọn phép biến đổi



1. Nếu trong bài toán có biểu thức dạng  thì chọn phép biến đổi



|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Giải phương trình: |

**Lời giải**

Điều kiện: 

Với  thì 

Trong trường hợp này phương trình vô nghiệm. Vậy 

**Cách 1:** Phương trình (1) tương đương 



Đặt  phương trình trên trở thành:



Do điều kiện của t nên ta có 

Kết hợp với điều kiện  là hai nghiệm của phương trình.

**Cách 2:** (phương pháp lượng giác).

Đặt  Phương trình (1) trở thành: 

Đặt  Ta có: 

Thay vào phương trình ta được: 

Từ đây ta tính được 

Như vậy  là nghiệm của phương trình: 

Từ đây ta tính được  hoặc 

Tương ứng ta được các nghiệm của phương trình là 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Giải phương trình: |

**Lời giải**

Điều kiện: 

Đặt  thì phương trình trở thành:



Đặt  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:



Phương trình nên trở thành:



Với  ta có: 

Với  ta có: 

Hay 

Vậy phương trình có hai nghiệm là 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A và ba số thực  sao cho  Chứng minh rằng:  trong đó |

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có: 

Do tam giác ABC vuông tại A nên  Vậy 

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

 (đpcm).

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:  biết |

**Lời giải**

Do  nên 

Dấu bằng xảy ra khi  hoặc 

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:





Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng 

Dạng 7

**Nhận dạng tam giác**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1**: Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện:    Tính các góc của tam giác ABC. |

**Lời giải**

**STUDY TIP**

Trong bài sử dụng các công thức:







Ta có: 









Do tam giác ABC không tù nên  và 

Do đó: 





Vậy 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tính các góc của tam giác ABC biết  và |

**Lời giải**









 (\*)

Do  và  nên



|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tính các góc của tam giác ABC biết |

**Lời giải**







Dạng 8

**Xác định góc giữa hai vectơ**

|  |
| --- |
| **Ví dụ:** Cho lục giác đều ABCDEF ngoại tiếp đường tròn tâm O.  Tính góc: |

**Lời giải**

Do  cùng hướng nên 

+  ngược hướng nên 

+ Do  cùng hướng nên 

+  nên 

+ Do  cùng hướng nên 

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng.

**Câu 1:** Cho tam giác ABC đều. G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó góc giữa  và  bằng:

**A.** **B.**  **C.**  **D.**

**Câu 2:** Giá trị của biểu thức  bằng:

1. 1**. B.** 5. **C.**  **D.** 

**Câu 3:** Cho hai góc nhọn và   Khẳng định nào sau đây sai?

1.  **B.** 

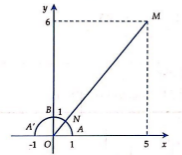
**C.** **D.** 

**Câu 4:** Bất đẳng thức nào dưới đây là sai?

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 5:** Trong hệ trục toạn độ Oxy, cho điểm  và nửa đường tròn đơn vị như hình vẽ. Gọi N là giao điểm của đoạn OM với nửa đường tròn. Tọa độ điểm N:



1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 6:** Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm  và nửa đường tròn như hình vẽ. Tọa độ giao điểm của đường thẳng OM với nửa đường tròn trên là:



1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 7:** Cho biết  Giá trị của  bằng bao nhiêu?

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 8:** Cho  và  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?

1.   **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 9:** Cho góc  tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 10:** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 11:** Xét các khẳng định sau:

1.

2.

3.

4. 

5. 

6. 

Số khẳng định đúng là:

1. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

**Câu 12:** Cho  và các số thực    . Mệnh đề nào sau đây đúng:

1.   **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 13:** Cho biết  Tính giá trị của:



1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 14:** Cho các đẳng thức sau:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 

Số đẳng thức sai

1. 1. **B.** 2**. C.** 4. **D.** 6.

**Câu 15:** Cho các góc a, b, c, d thuộc  sao cho  Khi đó:  bằng:

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 16:** Biết  Giá trị của  bằng:

1.  **B.**  **C.** -1. **D.** 0.

**Câu 17:** Cho  với k là số nguyên dương.

Giá trị của biểu thức  bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.** 0.

**Câu 18:** Biểu thức  có giá trị bằng:

1. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 19:** Cho  Giá trị của biểu thức:

 là:

1.  **B.** -13. **C.**  **D.** 13.

**Câu 20:** Cho biết  Giá trị của biểu thức:  bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.**

**Câu 21:** Cho  Số các giá trị của m để 

1. 0**. B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 22:** Biểu thức  bằng:

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 23:** : Đơn giản biểu thức:



1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 24:** Đơn giản biểu thức  ta được:

1.   **B.**   **C.**  **D.** 

**Câu 25:** Rút gọn biểu thức sau:



1. A=1. **B.** A=2**. C.** A=3. **D.** A=4.

**Câu 26:** Rút gọn biểu thức  ta được:

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 27:** Cho  Số nghiệm của phương trình  là

1. 1. **B.** 0**. C.** 2. **D.** 3.

**Câu 28:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:  Khi đó  bằng:

1.   **B.**   **C.**  **D.** 

**Câu 29**: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho BD = AC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = AD. Tia DC cắt BE tại F. Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.** 1. **D.** 

**Câu 30:** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn hệ thức  Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.** 1. **D.** 

**Câu 31:** Cho x thỏa mãn  Tính giá trị biểu thức: 

Bạn Anh Vũ đã làm như sau:

**Bước 1:** Nếu  thì



Nếu  thì 

**Bước 2:** Ta có:



**Bước 3:** Do 



**Bước 4:** Vậy  là các giá trị cần tính.

Bạn Anh Vũ sai ở bước nào?

1. 1. **B.** 2**. C.** 3. **D.** 4.

**$2. Tích vô hướng của hai vectơ**

1. **Lý thuyết**
2. **Định nghĩa**.

|  |
| --- |
| Cho hai vectơ  và  đều khác vectơ  Tích vô hướng của  và là một số, kí hiệu là  được xác định bởi công thức sau: |

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  và  bằng vectơ  ta quy ước 

*Chú ý:*

|  |
| --- |
| + Với  và  khác vectơ  ta có  + Khi  tích vô hướng  được kí hiệu là  và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  .  Ta có:  +  là góc nhọn.  là góc vuông.  là góc tù. |

1. **Các tính chất của tích vô hướng**

Với ba vectơ  bất kì và mọi số k ta có:

+  (tính chất giao hoán);

+  (tính chất phân phối);

+ 

+ 

*Nhận xét:* Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

+  ;

+  ;

+  .

1. **Định lí hình chiếu.**

Cho hai vectơ  và  Gọi  lần lượt là hình chiếu của C, D trên đường thẳng AB. Khi đó: 

1. **Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

**STUDY TIP**

Hai vectơ   đều khác  vuông góc với nhau khi và chỉ khi: 

Trên mặt phẳng tọa độ , cho hai vectơ 

Khi đó tích vô hướng  là:



1. **Ứng dụng**.
2. Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ  được tính theo công thức:



1. Góc giữa hai vectơ.

Từ định nghĩa tích vô hướng giữa hai vectơ ta suy ra nếu  và  đều khác  thì ta có



1. Khoảng cách giữa hai điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm  và được tính theo công thức:



1. **Các dạng toán điển hình**

Dạng 1

Tính tích vô hướng – Tính góc.

1. **Tính tích vô hướng**.

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

* Hướng 1: Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa 2 vectơ  và  cùng gốc để xác định chính xác góc  , từ đó: 
* Hướng 2: Sử dụng các tính chất và các đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

*Lưu ý:*

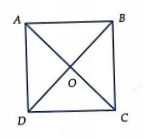


* Hướng 3: Nếu đề bài cho dạng tọa độ



1. **Tính góc.** Cho hai vectơ  và . Nếu  và  đều khác  thì:





|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:**Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh bằng a. Tính: |

**Lời giải:**

1. Do  cùng hướng nên 

Do đó: 

1. Hai vectơ  cùng hướng, do đó 

Ta có: 

1. Hai vectơ  ngược hướng, do đó 

Suy ra 

1. 



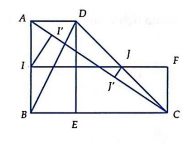
1. 



1. 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho hình thang ABCD uông tại A và B có các đáy  và cạnh   1. Tính  và 2. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hạ  vuông góc với AC.   Tính  và độ dài |

**Lời giải**



1. \* Tính 

**Cách 1**: (Sử dụng định lí hình chiếu)



**Cách 2:** (Sử dụng định nghĩa)





\*Tính 

**Cách 1:** (Sử dụng định lí hình chiếu)

Gọi E là hình chiếu của D trên BC. Khi đó: 

**Cách 2:** (Sử dụng định nghĩa)





\*Tính  .

Ta có: 

1. Tính  .

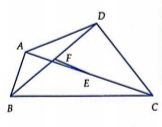
**Cách 1:** (Sử dụng định lí hình chiếu).

Gọi F là hình chiếu của C trên IJ. Khi đó tứ giác IBCF là hình chữ nhật.



**Cách 2:** 

\*Tính  .



Ta có:  Từ đó suy ra 

**STUDY TIP**

+ Cho tứ giác ABCD, E, E là trung điểm của AC, BD. Khi đó: 

+ Cho hai đường thẳng AB và CD. Khi đó:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho tứ giác ABCD có  trong đó E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB, CD. Tìm điều kiện để góc  là góc tù. |

**Lời giải**

Ta có: 



Suy ra: 

Vậy 

Để  là góc tù thì 

Dạng 2

Chứng minh đẳng thức vectơ

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có  Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC. Và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:  (Công thức Euler) |

**Lời giải**

Ta có: 

**STUDY TIP**

Ở bài toán này, ta sử dụng công thức:



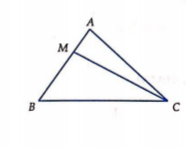








Vậy 



|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC có  . Điểm M thuộc đoạn AB. Giả sử  Chứng minh rằng:  . |

**Lời giải**

Giả sử chân đường vuông góc H hạ từ đỉnh C nằm giữa A và M (có thể H trùng M). Ta có:



Tương tự ta có: 

Từ hai đẳng thức trên ta có:



Đặc biệt: Trường hợp M trùng với A, B thì đẳng thức vẫn đúng.

*\*Chú ý:*

**STUDY TIP**

Ví dụ 2 chính là định lí Stewart nổi tiếng, được Stewart chứng minh năm 1976, còn nhận xét 1, 2 chính là trường hợp đặc biệt của định lí này. Nhận xét 1, còn có tên gọi là Định lí Apollonius về trung tuyến.

Độ dài đường phân giác được tính theo công thức sau:







|  |
| --- |
| 1. Khi M trung điểm của AB, ta có:    Tương tự,  Đây là công thức trung tuyến trong tam giác ABC.  2.Khi CM là phân giác trong của góc  (M thuộc AB).  Ta có:  . Từ đó suy ra  Theo công thức trên ta có:      Tương tự  .  Đây là công thức tính độ dài đường phân giác. |
| **Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC có trọng tâm G. M là một điểm bất kì.  Chứng minh rằng: |

**Lời giải**

Ta có: 



Mặt khác, 



Do đó, 

Vậy 



|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có: |

**Lời giải**

Do tam giác ABC đều nên O là trọng tâm tam giác.

Suy ra: 

Mặt khác, ta luôn có: 



Tương tự ta cũng có: 

Từ đây suy ra:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Chứng minh rằng trong hình bình hành ta có: tổng các bình phương hai đường chéo bằng tổng các bình phương của các cạnh. |

**Lời giải**

Cho hình bình hành ABCD, ta chúng minh: 

Ta có: 



Do  nên 

Vậy ta có: 

**STUDY TIP**

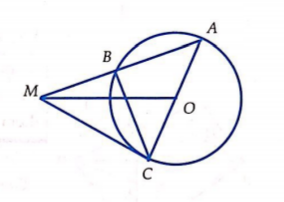
Giá trị không đổi

được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn O và kí hiệu là  . Ta có: 

Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau taih P và  thì 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Cho đường tròn O;R và điểm M cố định,  Một đường thẳng thay đổi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó |

**Lời giải**



Gọi C là điểm đối xứng của A qua O . Ta có  hay B là hình chiếu của C trên AM. Khi đó ta có







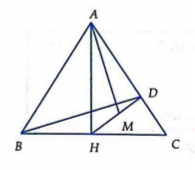


Dạng 3

**Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta cần chứng minh tích vô hướng của chúng bằng 0:





|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh: |

**Lời giải**

\*Cần chứng minh: 

Ta có:  và 

Do đó: 

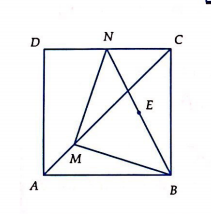


Mà 





Vậy 



|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho  Gọi N là trung điểm CD. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân. |

**Lời giải**

Đặt 

Khi đó: 

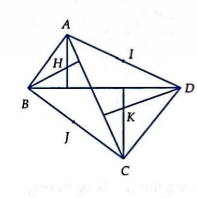
 và 

Ta có: 





Vậy  và MB = MN, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.



|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho tứ giác lồi ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Và I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng: |

**Lời giải**

\*Cần chứng minh: 

Ta có: 

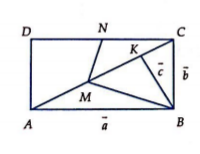
Suy ra: 



Vậy 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ  Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD.   1. Chứng minh: 2. Tìm điều kiện của hình chữ nhật để tam giác BMN vuông cân. |

*\*Nhận xét: - Phân tích các vectơ  theo các vectơ gốc: *



*- Chứng tỏ: *

**Lời giải**

1. Đặt  và 

Ta có: 

Do đó:



Vì  và  nên 

1. Ta có: 









 (1)

Mặt khác: Vì  nên 

Thay vào (1) ta được: 



Vậy điều kiện cần và đủ để tam giác BMN vuông cân là ABCD là hình vuông.

**Bài tập rèn luyện kĩ năng:**

1. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  , D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của  Chứng minh rằng nếu: AB = AC thì 
2. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN. Chứng minh rằng:



1. Cho tam giác cân ABC, AB = AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm cạnh AB và G là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh:  .
2. Cho  cân tại A. Gọi D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm  Chứng minh  (I là tâm đường tròn ngoại tiếp 
3. Cho hình vuông ABCD, trên DC lấy điểm E, kẻ  M, N lần lượt là trung điểm AE và DC. Chứng minh rằng: 
4. Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ  Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC. Chứng minh rằng: 
5. Cho hình vuông ABCD , trên AB lấy điểm P, trên AD lấy điểm Q sao cho AP = AQ. Kẻ  Chứng minh rằng: 

Dạng 4

**Chứng minh bất đẳng thức**

Ta đã biết với hai vectơ  khác  , tchs vô hướng được định nghĩa như sau:



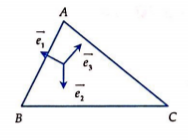
Từ đây ta có thể rút ra một số bất đẳng thức:

 hoặc 

Sau đây là một số ví dụ áp dụng:

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có: |

**Lời giải**



Thiết lập các đơn vị  có giá trị lần lượt vuông góc với các cạnh AB, BC, AC của  , ta được:







Mặt khác ta luôn có: 



 đpcm.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có: |

**Lời giải**

Ta có: 

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:



Đặt  Khi đó  là ba góc của một tam giác. Theo ví dụ trên ta suy ra điều phải chứng minh.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có: |

**Lời giải**

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  , ta nhận được:



Mặt khác: 



 , điều phải chứng minh.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Chứng minh với mọi số thực x, y ta luôn có:  (\*) |

**Lời giải**

Ta có (\*) 

Đặt:  Suy ra: 

Do  Suy ra  (đpcm).

Dạng 5

**Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Giải phương trình: |

**Lời giải**

Điều kiện: Đặt 

Ta có: 

Ta có: 

Thử lại với x = 3, thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Giải bất phương trình: |

**Lời giải**

Điều kiện:  Đặt 

Ta có: 

Ta có: 

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Thử lại với x = 5, thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Giải hệ phương trình: |

**Lời giải**

Trong mặt phẳng Oxy, đặt 

Hệ phương trình trở thành:  (I).

Nếu  thì  Thay vào phương trình (3) ta có:



Nếu  thì từ hai phương trình đầu của hệ (I) ta suy ra  cùng phương.

Kết hợp với phương trình ba của hệ (I) ta suy ra  hoặc 

Trường hợp 1: 

Thay vào (1) ta có  .

Với  thì 

Với  thì 

Trường hợp 2: 

Thay vào (1) ta có: 

Thử lại ta thấy các bộ số 



đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Dạng 6

**Tìm tập hợp điểm, bài toán cực trị**

Một số bài toán cơ bản:

|  |
| --- |
| 1. Cho đoạn thẳng AB, tập hợp các điểm M thỏa mãn:   +  là đường thẳng vuông góc với AB tại A.  +  là đường tròn đường kính AB.   1. Cho điểm I cố định và một số k. Tập hợp các điểm M thỏa mãn  là:   + Tập rỗng nếu k < 0.  + Là điểm I nếu k = 0.  + Là đường tròn tâm I bán kính  nếu k > 0. |

**Một số ví dụ áp dụng:**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1**: Cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:  (với k là số cho trước). |

**Lời giải**

Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Khi đó:



Theo giả thiết ta có: 

Theo bài toán cơ bản 2, ta có tập hợp các điểm M là:

+ Đường tròn tâm O (trung điểm của đoạn AB), bán kính  nếu 

+ Điểm O (trung điểm đoạn AB) nếu 

+ Tập rỗng nếu 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho hai điểm A, B phân biệt, cố định và một số thức k. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện: |

**Lời giải**

Gọi O là trung điểm đoạn AB và H là hình chiếu của M lên AB. Khi đó:



Theo giả thiết ta có: 

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:  là đường thẳng vuông góc với AB tại điểm H cách trung điểm O của đoạn AB một khoảng được xác định bởi hệ thức: 

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho hình bình hành ABCD, tâm O, M là điểm bất kỳ. Giả sử M di động trên đường thẳng  , tìm các vị trí của M để  đạt giá trị nhỏ nhất. |

**Lời giải**

Ta có: 







Do  không đổi nên  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi M là hình chiếu của D lên đường thẳng 

Dạng 7

**Xác định tọa độ trực tâm, tâm ngoại tiếp tam giác**

1. Bài toán xác định tọa độ trực tâm của  khi biết tọa độ đỉnh A, B, C.

Bước 1: Giả sử  là trực tâm của tam giác ABC. Từ đây các bạn tính được tọa độ của các vectơ  .

Bước 2:  suy ra tọa độ điểm H.

1. Bài toán xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi biết tọa độ ba đỉnh A, B, C.

Bước 1: Giả sử  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đây các bạn tính được tọa độ các vectơ  Suy ra độ dài IA, IB, IC.

Bước 2:  , suy ra tọa độ điểm I.

Ngoài ra ta cũng cần nắm dược bài toán sau:

1. Bài toán xác định tọa độ điểm K là hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

Từ  , ta suy ra tọa độ K.

|  |
| --- |
| **Ví dụ:** Cho tam giác ABC có điểm   1. Tính chu vi tam giác ABC. 2. Tìm điểm M thuộc trục Oy sao cho M cách đều hai điểm A và B. 3. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC. 4. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. 5. Xác định tọa độ điểm N là hình chiếu của A lên đường thẳng IH. |

**Lời giải**

1. Ta có: 





Chu vi tam giác ABC bằng: 

1. Do M nằm trên Oy nên  .

Ta có: 



Để M cách đều A và B thì MA = MB



Vậy  thoar mãn yêu cầu bài toán.

1. Giả sử  là tọa độ điểm H.

Ta có: 

H là trực tâm tam giác ABC nên



1. Giả sử  là tọa độ của điểm I.

Ta có: 

I là tâm ngoại tiếp tam giác ABC nên





Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 

1. Giả sử  là tọa độ điểm N.

Ta có: 

Ta có: 



C. Bài tập rèn luyện kĩ năng

**Câu 1:** Cho hai vectơ  và  ngược hướng và khác vectơ  Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng:

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 2:** Cho hai vectơ  và  thỏa mãn điều kiện  và  Độ dài vectơ 

1.  **B.**  **C.** 8.  **D.** 124.

**Câu 3:** Cho 2 vectơ  và  thỏa mãn  và  Khi đó  bằng:

1.   **B.**  **C.**   **D.** 

**Câu 4:** Cho 2 vectơ  và  thỏa mãn  và hai vectơ  và  vuông góc với nhau. Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.** 1. **D.** 

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ  Khi đó  bằng:

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ  Số giá trị của x để  là:

1. 0 **B.** 1.  **C.** 2 **D.** 3

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 vectơ  Đẳng thức nào sau đây sai:

1. 
2. 
3. 
4. 

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ  và 

1. Biết vectơ  vuông góc với  khi đó k bằng:
2.  **B.** 

**C.** **D.** 

b) Số các giá trị k để độ dài vectơ  bằng độ dài vectơ  là:

**A**. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

c) Gọi X là tập hợp các giá trị của k thỏa mãn điều kiện góc giữa hai vectơ  và  bằng  Khi đó tập hợp X bằng:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ  và  với  Biết rằng vectơ  vuông góc với vectơ  Khẳng định nào sau đây **đúng**?

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ  và  Vectơ  thỏa mãn điều kiện  thỏa mãn điều kiện  và  Khi đó  có tọa độ là:

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 12:** Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC. I là hình chiếu của H lên AB. Cho các mệnh đề:













Số các mệnh đề đúng trong mệnh đề nào sau:

1. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 13:** Cho tam giác ABC có  

a) bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) Tọa độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

d) Biết M nằm trên Oy, có tung độ bằng m và cách đều hai điểm A, C. Khi đó m bằng:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

e) N nằm trên Ox và có  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, điểm N có tọa độ là:

**A.**   **B.** 

**C.**   **D.** 

f) Tọa độ điểm  đối xứng với A qua BC là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

g) Gọi D là điểm sao cho tam giác ABD vuông cân tại B và có tung độ dương. Khi đó, điểm D thuộc đường thẳng nào dưới đây?

**A.**  **B.** 

**C.**   **D.** 

**Câu 14:** Cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp đường tròn đường kính  Gọi I là trung điểm AB, H là hình chiếu của B lên AD. K là trung điểm của đoạn HD. Xét các khẳng định sau:







Số các khẳng định sai trong các khẳng định trên là:

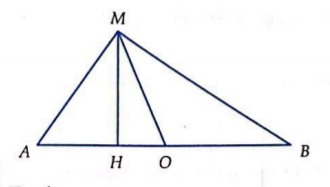
1. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 15:** Cho hai điểm  Tìm M trên tia Ox sao cho 

1.  **B.** 

**C.** hay  **D.** 

**Câu 16:** Bạn Tùng Chi giải bài toán: “Cho đoạn thẳng  và số  Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện: ” theo các bước sau:

Bước 1: Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Kẻ  như hình vẽ:  


Bước 2: Ta có:







Bước 3: Sử dụng công thức hình chiếu ta có:





Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là tập rỗng.

Theo các bạn, lời giải của bạn Tùng Chi sai ở bước:

1. 1. **B.** 2.

**C.** 3. **D.** Không sai.

**Câu 17:** Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, ngoại tiếp đường tròn (C) tâm  có D là tiếp điểm của (C) trên cạnh AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt cạnh AB tại điểm E khác B. Các đường thẳng qua A, D và vuông góc với CE cắt các cạnh BC tại  và  Khi đó  bằng:

1.  **B.** 1 **C.** 2. **D.** 

**Câu 18:** Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 19:** Cho tam giác cân tại A, AH là đường cao. Gọi D là trung điểm của AH. Kẻ HE vuông góc với CD tại E. Khi đó  bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 20**: Cho hình chữ nhật ABCD. Đường thẳng qua D vuông góc với AC cắt BC tại N. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, CN. T là điểm trên NC sao cho CN = 3NT. Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng:

1. DN**. B.** DT. **C.** DF. **D.** DC.

**Câu 21:** Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình:



Số phần tử của tập hợp S là:

1. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D**. 2.

**Câu 22:** Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:



Bước 1: 





Bước 2: 



Bước 3: 

Bước 4:  Điều này tương đương với tứ giác ABCD là hình bình hành

 Điều này tương đương với tứ giác ABCD là hình bình hành

Lời giải trên sai ở bước nào?

1. Bước 1. **B.** Bước 2.

**C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

**Câu 23:** Cho hai vectơ  có  và  Số các số x thỏa mãn  là:

1. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D**. 3.

**Câu 24:** Cho ba vectơ  khác  thỏa mãn điều kiện: (1). Gọi  Có bao nhiêu bộ  thỏa mãn điều kiện (1)?

1. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

**Câu 25:** Cho tam giác ABC có   Khi đó  bằng:

1.  **B**.  **C.**  **D.** 

**Câu 26:** Cho tam giác ABC đều cạnh  Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho    Để  thì x bằng:

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 27:** Cho hình thang cân ABCD có CD = 2AB = , AH vuông góc với CD tại H. Khi đó  bằng:

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**Câu 28:** Cho hình thoi ABCD cạnh  , 

Khi đó  bằng

1.  **B.** 

**C.** **D.** 

**$3. Các hệ thức lượng trong tam giác**

1. **Lý thuyết**
2. **Một số kí hiệu**

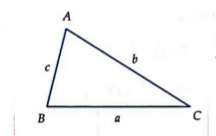
Cho tam giác ABC có  và 

|  |
| --- |
| +  lần lượt là trung tuyến kẻ từ A, B, C  +  là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB;  + R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác;  + r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác;  +  là nửa chu vi tam giác.  + S là diện tích tam giác. |

1. **Các hệ thức lượng trong tam giác vuông**

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu của A lên BC.

Đặt  Khi đó:



|  |
| --- |
| 4. . |

1. **Định lí côsin**

Trong tam giác ABC bất kì, ta luôn có:



*\*Hệ quả*:



STUDY TIP

Định lí cosin được sử dụng để giải tam giác khi biết hai cạnh và một góc hoặc khi biết cả ba cạnh của tam giác.

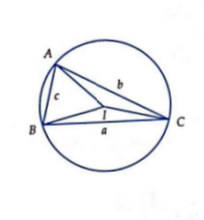
*\*Nhận xét*: Định lí này cho phép ta xét được tam giác nhọn, tù hay vuông thông qua các yếu tố cạnh của tam giác.

A nhọn 

A tù 

A vuông 

Từ đây đưa đến cách nhận dạng tam giác ABC thông qua yếu tố cạnh của nó.



|  |
| --- |
| -Tam giác ABC có 3 góc nhọn  .  -Tam giác ABC có 1 góc tù  .  -Tam giác ABC có 1 góc vuông  . |

1. **Định lí sin.**

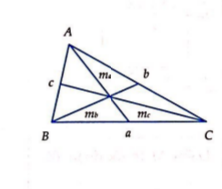
Trong tam giác ABC bất kì, ta luôn có:



Định lí sin được dùng để giải tam giác khi biết góc và độ dài cạnh đối diện và biết một góc hoặc một cạnh khác. Các bạn linh hoạt sử dụng định lí cosin và định lí sin để giải tam giác khi có các thông tin hợp lí.

1. **Độ dài đường trung tuyến**





*\*Nhận xét:*  

**6. Công thức tính diện tích tam giác**















*\*Nhận xét:* Từ định lí cosin và công thức tính diện tích ta có thể xây dựng được công thức sau:



 Tương tự: 

Dạng 1

1. **Các dạng toán điển hình.**

**Giải tam giác**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có  và  Độ dài cạnh BC là:   1. BC= B.   C. D. |

**Lời giải**

**STUDY TIP**

Cách 1: Biết độ dài 2 cạnh và 1 góc trong tam giác, ta sử dụng định lí cosin.

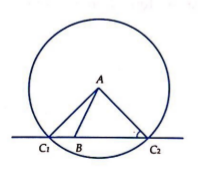
Cách 2: Ta biết độ dài cạnh và góc đối diện và biết một cạnh khác, ta sử dụng định lí sin.

**Cách 1:** Áp dụng định lí cosin trong tam giác ta có: 



**Cách 2:** Áp dụng định lí sin trong tam giác ta có:

 hoặc 



* Với  suy ra  Ta có:



* Với  suy ra  Ta có:



|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tam giác ABC có  Điểm M thuộc đoạn BC sao cho MC = 2MB.   1. Cosin của góc có số đo lớn nhất bằng: 2. **B.**  **C.**  **D.** 3. Độ dài cạnh AM là: 4. **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

1. Do  nên  có số đo lớn nhất.

**STUDY TIP**

1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Giả sử a > b> c thì



1. Bài toán tổng quát hơn như sau: Cho tam giác ABC, gọi M là điểm trên BC sao cho  Khi đó: 



Ý b ứng với 

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ta có:



**Đáp án A.**

1. Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:



Ta có: 

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABM ta có:

 **Đáp án C.**

*Nhận xét:*Cho tam giác ABC, gọi M là điểm trên BC sao cho  Khi đó:



Chứng minh: Ta có:









\*Tính diện tích tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp tam giác. Công thức tính độ dài đường trung tuyến

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có BC = 3, góc  a) Diện tích tam giác ABC là:   1. **B.**   **C.**   **D.**  b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là:  **A.**  **B.** 3.  **C.**   **D.**  c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  d) Giả sử  Độ dài đường trung tuyến ứng với góc C bằng:  **A.**   **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

1. Ta có: 

Do tam giác BMC vuông tại M nên





Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:





**Đáp án A.**

1. Ta có: 

**Đáp án B.**

1. Thay ý a) ta có: 

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có: 

**Đáp án C.**

1. Do  nên 

Ta có:  là nghiệm phương trình: 

Suy ra 

**Cách 1:**

Gọi N là trung điểm của AB. Áp dụng định lí cosin trong tam giác ACN ta có:  




**Cách 2:** Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến ta có:



**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Tam giác ABC có  là đường cao kẻ từ B và  Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a, b và  là:   1. **B.**   **C.** **D.** |

**Lời giải**

Xét tam giác  có: 

Diện tích tam giác ABC bằng: 

Lại có: 

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:



Vậy 

**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Tam giác ABC có AB = 5, AC = 8 và  Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.   1. **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:



**Cách 1:** Diện tích tam giác ABC là: 

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: 

**Cách 2:** Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC:



**Đáp án C.**

Dạng 2

Nhận dạng tam giác

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện . Khi đó tam giác ABC là:   1. Tam giác vuông. **B.** Tam giác cân tại A.   **C.** Tam giác cân tại B. **D.** Tam giác cân tại C. |

Lời giải

Ta có: 

Khi đó:









-Nếu  thì A = B.

-Nếu  thì theo định lý sin cho tam giác ABC ta có:



Như vậy ở cả hai trường hợp ta đều suy ra tam giác ABC cân tại C.

**Đáp án D.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC thỏa mãn  Tam giác ABC là:   1. Tam giác vuông. **B.** Tam giác đều.   **C.** Tam giác tù có góc A bằng 1200. **D.** Tam giác nhọn có góc A bằng 600. |

Lời giải

Từ giả thiết:





Mặt khác:  Từ đó suy ra: 

Vậy tam giác ABC là tam giác tù có góc A bằng 

**Đáp án C.**

Dạng 3

Chứng minh các hệ thức, bất đẳng thức tam giác

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Hai đường phân giác BD và CE của tam giác vuông ABC  cắt nhau tại I. Khi đó, đẳng thức nào sau đây là đúng?   1. BD.CE = 2BI.CI. **B.** BD.CE = BI.CI   **C.** 2BD.CE = BI.CI. **D.** 2BD.CE = 3BI.CI. |

Lời giải

Vì  nên trong tam giác BIC ta có:



Do đó: 

Lại có: 

Thay (2) vào (1) ta có: 

(điều ngược lại cũng đúng)

**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để tồn tại một điểm D trên cạnh BC sao cho  là:   1. **B.**   **C.**  **D.** |

Phân tích

Xét tam giác ABC cân (các bạn có thể cho tam giác ABC đều cũng được) và D là trung điểm của BC. Khi đó:  và

. Nên . Do đó ta sẽ suy nghĩ tới việc lựa chọn đáp án trả lời là A.

Lời giải

Nếu tam giác ABC vuông hoặc cân tại A thì kết luận ở đề bài là hiển nhiên đúng. Xét tam giác ABC có 3 góc nhọn (trường hợp tam giác ABC có một góc tù được giải tương tự).

Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có: BD.CD = AD.DE nên điều kiện  tương tự với điều kiện  hay  (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Vậy điều kiện cần và đủ để tồn tại điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường kính AO cắt BC hay  trong đó I là trung điểm của OA và M là chân đường vuông góc hạ từ I xuống BC.

Kẻ  thì:



Vậy điều kiện  tương đương với 



**Đáp án A.**

**STUDY TIP**

Với  ta dễ dàng suy ra  nên ta suy ra  Suy ra  Suy ra B, C bị loại. Bất đẳng thức trong tam giác:  Suy ra D bị loại.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC có  Khẳng định nào sau đây là đúng:   1. **B.**   **C**.   **D.** |

Lời giải

Ta có: 



Tương tự 

Thế (2) vào (1) ta có: 

Vậy 

**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho ngũ giác đều ABCDE có tâm O. Chứng minh rằng: |

Lời giải

**STUDY TIP**

- Có rất nhiều cách giải quyết bài toán này. Chúng tôi xin giới thiệu hai cách có sử dụng tích vô hướng.

- Cho hai vecto  không cùng phương. Một vecto  thỏa mãn điều kiện  và  thì  .

Cách 1: Vì ABCDE đều nên 



Cộng từng vế của các đẳng thức trên ta có:



Tương tự ta chứng minh được  mà  là hai vecto không cùng phương nên (điều phải chứng minh).

Cách 2: Do ABCDE đều nên OA = OB = OC = OD = OE. Do đó:







Chứng minh tương tự ta cũng có: 

Do đó 

Tương tụ ta chứng minh , mà  là hai vecto không cùng phương nên  (điều phải chứng minh)

Nhận xét: Từ bài toán này, ta suy ra một điều khá thú vị đó là:

.

Dạng 4

Chứng minh bất đẳng thức

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho  có diện tích bằng  Gọi a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và  là các chiều cao xuất phát lần lượt từ các đỉnh A,B,C. Chứng minh rằng |

Lời giải

Ta có: 



Bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

 (điều phải chứng minh)

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC, có AB = c, BC = a, AC = b.   1. Khi đó a,b,c cùng là nghiệm của phương trình:    6. Khẳng định nào sau đây là đúng? 7. **B.**   **C.**  **D.** |

Lời giải

**STUTY TIP**

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó      

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:



Theo công thức bán kính nội tiếp tam giác ta có:



Từ (1) và (2) suy ra: 

Từ đó: 

**STUDY TIP**

Định lý Viet: Cho a,b,c là 3 nghiệm của



Khi đó:



Vậy a là nghiệm của phương trình ở đáp án A. Tương tự ta cũng chứng minh được b,c là nghiệm của phương trình ở đáp án A.

**Đáp án A.**

b) Theo ý a, ta có: 

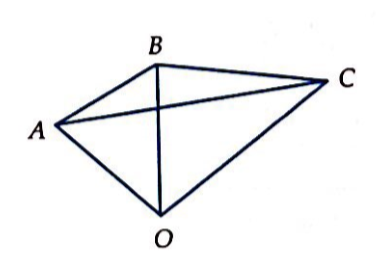
Mặt khác :



**Đáp án A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Chứng minh rằng:  với mọi a,b,c > 0 |

Lời giải



Từ điểm O lấy OA = a, OB = b, OC = c sao cho: 

Áp dụng định lý côsin cho các tam giác OAB, OBC, OCA ta có:







Lại có: 

Dấu “=” xảy ra  A,B,C thẳng hàng 

**Bài tập rèn luyện kĩ năng:**

1. Cho  có độ dài các cạnh lần lượt là a,b,c và S là diện tích. Các trung tuyến và đường cao lần lượt xuất phát từ các đỉnh A,B,C là  và  Chứng minh rằng:

 và 

1. Cho . Chứng minh rằng: Trong đó: a,b,c lần lượt là độ dài 3 cạnh BC, CA, AB; p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp .
2. Trong  cho bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp lần lượt là R, r. Chứng minh: 
3. Cho  có độ dài 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt là a,b,c và S là diện tích. Chứng minh rằng: 
4. Cho  có độ dài 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt là a,b,c và S là diện tích. Chứng minh rằng: 

**C. Bài tập rèn luyện kĩ năng**

Xem đáp án chi tiết tại trang 389

**Câu 1:** Cho  có 

1. Độ dài cạnh a là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Diện tích của tam giác ABC là:

**A.**  **B.**  **C.** 12**. D.** 6.

c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC:

**A.** **B.**

**C.** **D.**

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

Câu 2: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Khi đó R.r bằng:

A. 260. B. 520. C. 1040. D. 130.

**Câu 3:** Cho tam giác ABC có  Đường cao  của tam giác ABC là:

**A.**  **B.** 8. **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** **C.** 

**B.**  **D.** 

**Câu 6:** Tam giác ABC có cosB bằng biểu thức nào sau đây?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**

**Câu 7:** Cho có  Khi đó:

**A.** Góc 

**B.** Góc 

**C.** Góc 

**D.** Không thể kết luận được gì về góc C.

**Câu 8:** Cho , biết  và . Để tính diện tích S của , một học sinh làm như sau:

(I) Tính 

(II) Tính



(III) Tính



(IV) Tính







Học sinh đó bắt đầu làm sai từ bước nào?

**A.** (I).  **B.** (II). **C.** (III). **D.** (IV).

**Câu 9:** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải đi qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc . Biết CA = 250m, CB = 120m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

**A.** 266m. **B.** 255m. **C.** 166m. **D.** 298m .

**Câu 10:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

**A.** 13. **B.**  **C.**  **D.** 15.

**Câu 11:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn  và . Ba điểm A,B,D thẳng hàng. Khoảng cách AB gần giá trị nào nhất?

**A.** 71m. **B.** 13m. **C.** 79m. **D.** 40m.

**Câu 12:** Cho các điểm , . Diện tích  bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.** 13. **C.** 26.  **D**. 

**Câu 13:** Cho tam giác ABC thỏa mãn:  Khi đó:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 14:** Cho tam giác ABC, biết   Tính góc A?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 15:** Tam giác ABC có   Tính AC?

**A.** 68. **B.**168**. C.** 118. **D.** 200.

**Câu 16:** Cho . Gọi  là độ dài các đường trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh  Giá trị nhỏ nhất  bằng

**A.**   **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 17:** Cho tam giác ABC vuông tại A, có  Hai phân giác   cắt nhau tại R, AR cắt  tại M. Khoảng cách từ M tới BC theo a và b bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**

**Câu 18:** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh huyền BC tại M và  (m,n cho trước). Diện tích tam giác ABC theo m,n là:

**A.** mn**. B.** 2mn. **C.** m + n. **D.** 4mn.

**Câu 19:** Đường tròn tâm O nội tiếp xúc với cạnh AB tại D. Biết AC.BC = 2AD.BD. Tam giác ABC là:

**A.** Tam giác đều.

**B.** Tam giác vuông tại A.

**C.** Tam giác vuông tại B.

**D.** Tam giác vuông tại C.

**Câu 20:** Cho tam giác ABC vuông tạo A và Gọi O là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, . Tỉ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 21:** Xét tam giác ABC thay đổi, cân tại A, nội tiếp đường tròn  cho trước. Kẻ BH vuông góc với AC tại H. BH đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  bằng

**A.** 1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 22:** Cho tam giác nhọn ABC, lấy E thuộc cạnh BC sao cho tam giác ABE cân tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE cắt AB tại D và  Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE tâm J và có bán kính  I là trung điểm của đoạn AC. Độ dài đoạn IJ bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 23:** Cho hình thang vuông ABCD (vuông tại A và B),  Khi đó  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Cho tam giác ABC vuông tại A  có  Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1. Khi đó  bằng

**A.**  **B.**  **C.** 1. **D.** 

**Câu 25:** Chọn một mảnh giấy hình chữ nhật kích thước 15cm x 20cm, ta gấp nó dọc theo một đường chéo. Diện rích phần chung của hai nửa mảnh giấy bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 26:** Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, IBC, ICA, IAB. Biết R1 + R2 + R3 = 3R. Khi đó tam giác ABC là:

**A**. Tam giác đều.

**B.** Tam giác vuông.

**C.** Tam giác cân có  tù.

**D.** Tam giác bất kỳ.

**Câu 27:** Cho tam giác ABC, có độ dài đường cao  và số đo góc CAH bằng ba lần số đo góc BAH. Diện tích tam giác ABC bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  hoặc  **D.** 

**Câu 28:** Cho tam giác ABC có  (M là trung điểm của BC).

a) Khi đó  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Diện tích tam giác ABC bằng

**A**.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 29:** Cho tam giác ABC nhọn. Giá trị của biểu thức sau

 thuộc khoảng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 30:** Xét nội tiếp đường tròn (O) cho trước. Các trung tuyến xuất phát từ A, B, C cắt đường tròn (O) tương ứng tại M, N, P. Biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác ABC là

**A.** Tam giác đều.

**B.** Tam giác vuông.

**C.** Tam giác cân có  tù.

**D.** Tam giác vuông cân.

**Câu 31:** Cho tam giác ABC. AM, BN, CP là các đường phân giác trong (  ) của tam giác đó. Để PM vuông góc với NM thì số đo của  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 32:** Xét hình chữ nhật ABCD và điểm M di động trên BC. Phân giác góc DAM cắt BC tại N.  đạt giá trị nhỏ nhất khi điểm M:

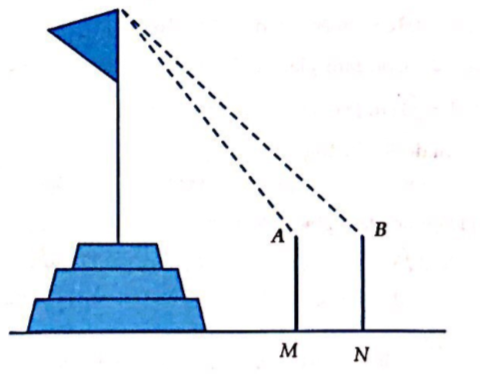
**A.** Trùng điểm B.

**B.** Trùng điểm C.

**C.** Trùng với trung điểm của BC.

**D.** Trùng với giao điểm của phân giác trong góc  với BC.

**Câu 33:** Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội – Huế), người ta cắm hai cọc AM và BN cao 1,5 mét so với mặt đất. Hai cọc này song song và cách nhau 10 mét và thẳng hàng so với tim cột cờ (Hình vẽ minh họa). Đặt giác kế tại đỉnh A và B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta được các góc lần lượt là  và  so với đường song song với mặt đất. Chiều cao của cột cờ (làm tròn 0,01 mét) là:

**A.** 54,33 m. **B.** 56,88 m.

**C.** 55,01 m. **D.** 54,63 m.

**Câu 34:** Cho tam giác ABC thỏa mãn:  Khi đó ABC là một tam giác

**A.** Tam giác vuông.

**B.** Tam giác cân.

**C.** Tam giác vuông hoặc cân.

**D.** Tam giác đều.

**Câu 35:** Cho ngoại tiếp đường tròn tâm O và  Khi đó  bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 36:** Cho tam giác ABC và số thực m. Trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác, lần lượt lấy các điểm . Gọi  và  tương ứng là diện tích của các  và  Biết  đạt giá trị lớn nhất, . Khi đó m bằng

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 37:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính R (R > 0, R không đổi). Gọi A và B lần lượt là các điểm di động trên tia Ox, Oy sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn đó và diện tích tam giác OAB nhỏ nhất. Tọa độ của các điểm A, B lần lượt là

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

**Câu 38:** Cho  có   và diện tích là S. Kí hiệu  lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C. Biết . Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC; M là trung điểm của BC. Xét các khẳng định sau:

1. 
2.  không nhọn.
3. 

Số các khẳng định đúng là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 39:** Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách AB = 12m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao . Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A1,B1 cùng thẳng hàng với C1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc  và . Chiều cao CD của tháp là



**A.** 22,77 m. **B.** 21,47 m.

**C.** 21,77 m. **D.** 20,47 m.

**Câu 40:** Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu

 .

**A.** Tam giác đều.

**B**. Tam giác có 

**C.** Tam giác có 

**D.** Tam giác có 

**Câu 41:** Cho tam giác ABC. Xét các khẳng định sau:

a) 

b) 

c) 



d) 

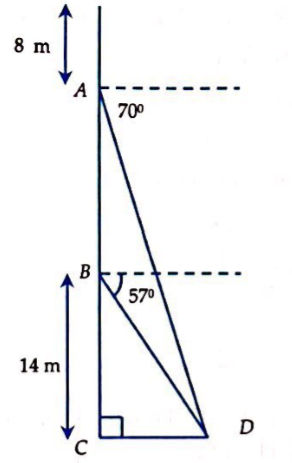
e) 

f) 

Số khẳng định sai là:

**A.** 0. **B**. 1. **C.** 3.  **D**. 4.

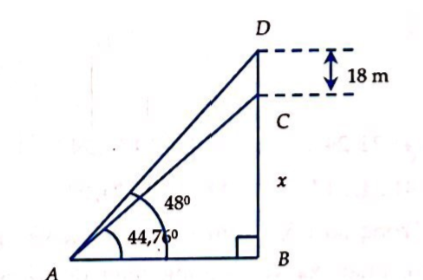
**Câu 42:** Một thợ lặn có vị trí cách mặt nước 8m, một con tàu đắm ở góc  Sau khi cùng xuống tới một điểm cao hơn 14m so với đáy đại dương, thợ lặn nhìn thấy con tàu đắm ở góc . Chiều sau của con tàu đắm gần giá trị nào nhất?



**A.** 24,979 m. **B.** 32,964 m.

**C.** 32,979 m. **D.** 33,25 m.

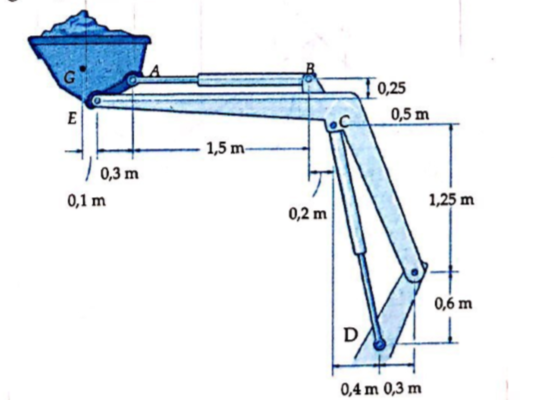
**Câu 43:** Đầu của các tổng thống ở Mount Rushmore cao 18 mét. Một du khách nhìn thấy đỉnh đầu của George Washington ở góc cao  và cằm của ông ở góc cao  Chiều cao của múi Rushmore gần giá trị nào nhất?



**A.** 182,753 m. **B.** 99,649 m.

**C.** 99,9 m. **D.** 168,055 m.

**Câu 44:** Nhìn vào bản thiết kế dưới, góc  gần giá trị nào nhất?



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 45:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Chia cạnh huyền BC có độ dài bằng a thành n đoạn bằng nhau (n lẻ). MN là một trong n đoạn thẳng đó biết  và trung điểm thuộc đoạn thẳng MN. Khi đó độ dài đường cao AH của tam giác ABC bằng

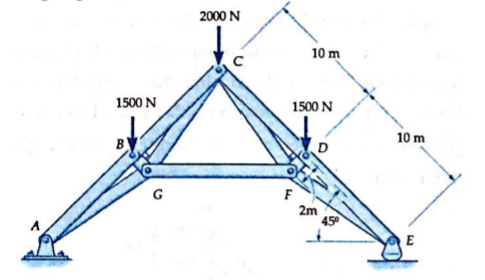
**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

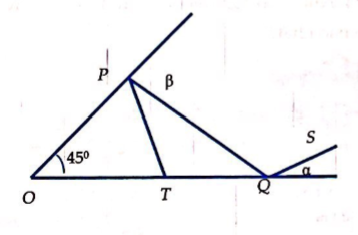
**Câu 46:** Dựa vào thiết kế bên dưới, góc giữa EF với AE gần giá trị nào nhất?



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 47:** Trong sơ đồ, chùm sáng hướng vào gương màu xanh, phản xạ vào gương màu đỏ và sau đó phản xạ vào gương màu xanh như hình vẽ. Biết  . Khi đó đoạn PT bằng



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 48:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình  Giá trị của biểu thức  là

**A.** 120**. B.** 121. **C.** 122. **D.** 123.

**Câu 49:** Số các giá trị của tham số m (m> 0) để hệ  có nghiệm  là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Câu 50:** Cho các số thực x,y,z với y > 0 thỏa mãn  Giá trị của biểu thức  bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 51:** Cho các số thưc dương x,y,z thỏa mãn  Giá trị của biểu thức  bằng

**A.** 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

**Câu 52:** Số nghiệm của phương trình  là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 1:** Cho tam giác ABC có hai trung tuyến  và  vuông góc với nhau. Giá trị của  bằng

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ IX

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 2:** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Biết  và . Giá trị của  bằng

1.  **B.**  **C.**   **D.** 

**Câu 3:** Trong tam giác ABC có trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL và  Khi đó góc  bằng

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho tam giác ABC. Điểm M thỏa mãn điều kiện  Tập hợp các điểm M là

1. Đường thẳng qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng  là giá của vectơ 
2. Đường thẳng qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng  là giá của vectơ 
3. Đường thẳng qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng  là giá của vectơ 
4. Đường thẳng qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng BC.

**Câu 5:** Cho  thỏa mãn  trong đó  ABC là tam giác

1. Vuông. **B.** có góc  tù.

**C.** có ba góc nhọn **D.** có góc  tù.

**Câu 6:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Xét các mệnh đề

1. 
2. 
3. 

Số các mệnh đề đúng

1. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 7:** Cho tam giác ABC có  Gọi D là điểm trên đoạn BC sao cho  và  Góc  bằng

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 8:** Cho hình thang ABCD có đáy lớn  đáy bé  Giả sử AC vuông góc với BD và BC cắt DA tại Q sao cho  Diện tích hình thang ABCD bằng

1.  **B.** 

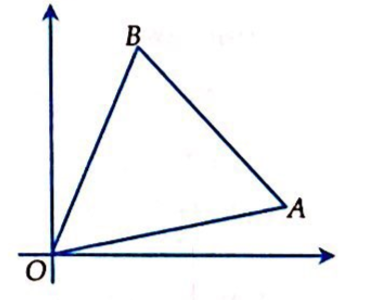
**C.**  **D.** 

**Câu 9:** Cho , P là điểm nằm trong tam giác sao cho  Biết  và  (m,n là hai số tự nhiên, nguyên tố cùng nhau). Tổng  bằng

1. 463. **B**. 631.

**C.** 346. **D.** 136.

**Câu 10:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm như hình vẽ. Biết tam giác OAB đều. Khi đó  bằng



1. 1248. **B.** 135.

**C.** 315. **D.** 513.

**Câu 11:** Cho tam giác ABC không tù có  và  Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Biết  Khi đó  bằng

**A.** hoặc 

**B.** hoặc 

**C.** hoặc 

**D.** hoặc 

**Câu 12:** Cho  thỏa mãn tính chất: Có điểm P nằm trong tam giác sao cho . Khi đó tam giác ABC:

1. Cân tại C. **B.** Vuông.

**C.** Đều. **D.** Cân tại B.

**Câu 13:** Cho tam giác ABC có   và  Khi đó BC bằng

1. 2**. B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 14: Cho tam giác ABC có   Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 15:** Cho  Gọi  là góc giữa  và . Giá trị nguyên lớn nhất của  sao cho  là góc tù là

1.  **B.**  **C.** 0. **D.** 1.

Câu 16: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính 

1.  **B.** 

**C**.  **D.** 

**Câu 17:** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có  Hai đường trung tuyến BN và CM cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GMN là

1. 25. **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 18:** Cho tam giác ABC có   Mệnh đề nào sau đây là đúng?

1. Nếu  thì  vuông.
2. Nếu  thì  tù.
3. Nếu  thì  nhọn.
4. Nếu  thì  nhọn.

**Câu 19:** Cho tam giác ABC có   Tính 

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 20:** Cho tam giác ABC có   Tính diện tích tam giác ABC.

1. 24. **B.** 48. **C.** 12. **D.** 

**Câu 21**: Cho tam giác ABC có   Độ dài đường phân giác trong góc A là

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 22:** Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn  đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Diện tích của hình thang cân đó bằng

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 23:** Cho tam giác ABC có   G là trọng tâm tam giác ABC. Giá trị  là

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho  với   Diện tích của tam giác ABC bằng

1.  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 25:** Cho tam giác ABC không vuông ( đặt ). Giá trị  bằng

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 26:** Cho  có   Độ dài chiều cao  bằng

1. 1. **B.** 2. **C.**  **D.** 

**Câu 27:** Trong tam giác ABC có   Diện tích đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

1. 
2. 
3. 
4. 

**Câu 28:** Cho  Xác định mệnh đề đúng?

1. 
2. 
3. 
4. 

**Câu 29:** Biểu thức



(với ) được rút gọn thành

1. 1. **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 30:** Cho  có   Tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho  và  là

1.  **B.** 

**C.**  **D.** Không có M.

**Câu 31:**  Khi đó giá trị của n bằng

1. 20. **B.** 21. **C.** 23. **D.** 22.

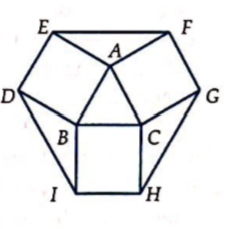
**Câu 32:** Trong tam giác ABC, các đường trung tuyến AD và CE có độ dài lần lượt là 18, 27. Biết  Đường thẳng CE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai F. Diện tích tam giác AFB bằng  (trong đó m,n là các số nguyên dương và n không chia hết cho bình phương của bất kì số nguyên tố nào). Tính  ?

1. 60. **B.** 61. **C.** 62**. D.** 63.

**Câu 33:** Cho tam giác ABC vuông tại B. AD là phân giác trong của góc . Trên AB, AC lần lượt lấy các điểm E và F, biết  G là giao điểm của AD với EF. Diện tích của tứ giác DCFG gần giá trị nguyên nào nhất?

1. 146. **B.** 147. **C.** 148. **D.** 149.

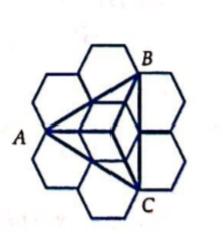
**Câu 34:** Cho tam giác ABC đều, ABC có độ dài cạnh bằng 1. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE, BCHI, CAFG. Diện tích lục giác DEFGHI bằng



1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

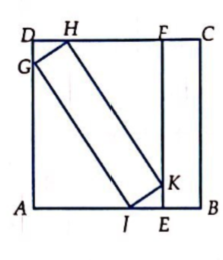
**Câu 35:** Sáu hình lục giác đều được đặt xung quanh một lục giác đều cạnh bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng bao nhiêu?



1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 36:** Trong hình chữ nhật ABCD có  Các điểm E,F nằm trên đoạn AB sao cho DE,DF chia  thành ba góc bằng nhau như hình vẽ. Tỉ số diện tích tam giác DEF so với diện tích hình chữ nhật ABCD là bao nhiêu?



1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 38:** Trên đoạn thẳng AC lấy điểm B sao cho  Lấy hai điểm D,E nằm cùng phía đối với đường thẳng AC sao cho các tam giác ABD, BCE là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của đoạn AE, N là trung điểm của đoạn CD. Diện tích của tam giác BMN bằng  Khi đó  bằng

1. 508. **B.** 507**. C.** 506. **D.** 505.

**Câu 39:** Biết  trong đó m và n là các số nguyên lớn hơn 1 và  và  Tính 

1. 90. **B.** 91. **C.** 92. **D.** 93.

**Câu 40:** Tam giác ABC có độ dài các cạnh  Hình chữ nhật PQRS có đỉnh P nằm trên cạnh AB, đỉnh Q nằm trên cạnh AC và hai đỉnh R,S nằm trên cạnh BC. Với điều kiện  thì diện tích PQRS có thể biểu diễn dưới dạng một đa thức bậc hai  với hệ số  trong đó m và n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính 

1. 161. **B.** 160. **C.** 162. **D.** 163.

**Câu 41:** Trong tam giác ABC có   Trên các đoạn AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho  ( trong đó  là các số dương thỏa mãn   trong đó  là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính 

1. 60. **B.** 61. **C.** 62**. D.** 63.

**Câu 42:** Cho  có   D và E lần lượt nằm trên AB và AC sao cho DE song song với BC và đi qua tâm nội tiếp . Giả sử  trong đó m, n là các số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau. Tính 

1. 923. **B.** 924. **C.** 925. **D.** 926.

**Câu 43:** Cho tam giác ABC vuông tại C, có  M là trung điểm của AB và dựng D cùng phía với C so với AB sao cho  Diện tích tam giác CDM bằng  trong đó  là các số nguyên dương,  nguyên tố cùng nhau,  không chia hết cho bình phương của bất kì số nguyên tố nào. Tính 

1. 581**. B.** 580. **C.** 579. **D.** 578.

**Câu 44:** Cho ngũ giác lồi ABCDE với  Biết  trong đó  là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính 

1. 485. **B.** 484**. C.** 483. **D.** 482.

**Câu 45:** Trong tứ giác ABCD lồi có  và  Cho biết  trong đó  là hai số nguyên dương. Tính 

1. 148. **B.** 149. **C.** 150**. D.** 151.

**Câu 46:** Cho tam giác ABC không cân có  Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC chia trung tuyến AD thành ba phần bằng nhau. Giả sử diện tích tam giác ABC có dạng  trong đó  là các số tự nhiên và  không chia hết cho bình phương của bất kì số nguyên tố nào. Tính 

1. 38. **B.** 39. **C.** 40**. D.** 41.

**Câu 47:** Cho tam giác ABC có   Gọi AH là chiều cao của tam giác ABC. Tọa độ điểm H là

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 48:** Bắt đầu từ gốc tọa độ, một nguồn sáng chiếu vào điểm  nằm trên gương phẳng (biểu diễn là đường thẳng ) và có tia phản xạ đi qua điểm  Hệ số góc của đường thẳng  bằng

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 49:** Đơn giản biểu thức sau ta được 

1.  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 50:** Cho  và số thực  thỏa mãn  Số cặp  thỏa mãn:

1. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 00 ĐẾN 1800

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỂ 9**

**Câu 1: Đáp án A.**

**Câu 2: Đáp án B.**

**Câu 3: Đáp án A.**

**Câu 4: Đáp án A.**

**Câu 5: Đáp án A.**

Ta có:

 Do đó tọa độ N là 

**Câu 6: Đáp án C.**

Do M thuộc góc phần tư thứ III nên giao điểm N của OM với nửa đường tròn sẽ có hoành độ, tung độ dương.

Ta có:

 Do đó tọa độ điểm N là 

**Câu 7: Đáp án D**



**Câu 8: Đáp án D.**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

**Câu 9: Đáp án D.**

**Câu 10: Đáp án B.**

**Câu 11: Đáp án A.**











= 2



=1.























 **Câu 12: Đáp án A.**

Do  nên 

Do đó



**Câu 13: Đáp án D.**







**Câu 14: Đáp án B.**

**Câu 15: Đáp án D.**

Từ giả thiết ta có:

   **Câu 16: Đáp án B.**

Ta có 







**Câu 17: Đáp án A.**

Ta có







**Câu 18: Đáp án B.**

**Câu 19: Đáp án D.**





**Câu 20: Đáp án C.**





**Câu 21: Đáp án C.**







Câu 22: Đáp án C.





**Câu 23: Đáp án A.**







**Câu 24: Đáp án C.**











**Câu 25: Đáp án A.**







**Câu 26: Đáp án B**





**Câu 27: Đáp án B.**

Điều kiện 

Phương trình đã cho tương đương với 





Từ (1) suy ra  cùng với điều kiện (\*) ta sẽ chỉ ra phương trình đã cho với  

Phương trình (1) tương đương với



Vì  nên   Đặt  Ta được phương trình 

Đặt 

Phương trình trở thành

 Do  nên





Do đó, phương trình  vô nghiệm khi 

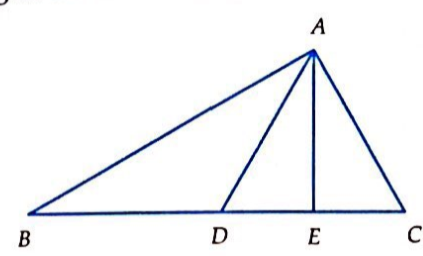
**Câu 28: Đáp án C.**

Cách 1: Gọi D là trung điểm của BC, từ giả thiết ta có:



Kẻ đường phân giác trong AE của tam giác ACD. Theo tính chất đường phân giác ta có:







Từ (1) và (2) suy ra 

Suy ra  đồng dạng với  nên  cân tại A.

Lại có



Do đó:



Cách 2: Lấy điểm K đối xứng với C qua A. Giả thiết suy ra

 . Lấy điểm D trên đoạn BK sao cho  Suy ra  đồng dạng với  Khi đó   hay 

Kết hợp với giả thiết ta có:



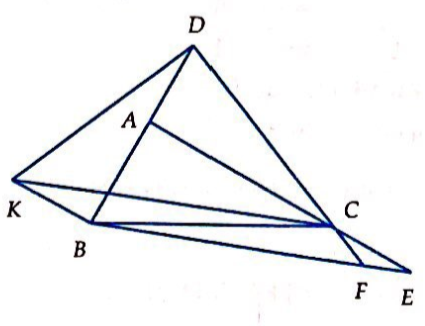


nên tam giác CDB cân tại D.

Vậy  Từ đó suy ra:

**Câu 29: Đáp án C.**



Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt đường thẳng qua C và song song với BE tại K. Khi đó ta có BK//CE, KC//BE, suy ra  (g.c.g) nên  mà  (gt) suy ra  (c.g.c). Từ đó suy ra,  Mà





Từ (1) và (2) suy ra tam giác DKC vuông cân, do đó 

Lại có:  (đồng vị)

Vậy 

**Câu 30: Đáp án A.**

Từ điều kiện ta có:

**II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ**

 đồng thời có 

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho  

Ta có:  (c.g.c)

Mặt khác

,



Từ (1), (2) và (3) suy ra





**Câu 31: Đáp án D.**

Bạn Anh Vũ đã không chú ý tới điều kiện  Với điều kiện này 

 Như vậy giá trị P = -2 bị loại. Vậy bạn Anh Vũ sai ở bước 4, chưa thử lại đã kết luận vội vàng.

**Câu 1: Đáp án D.**

**Câu 2: Đáp án B.**



**Câu 3: Đáp án A.**

Ta có:







  **Câu 5: Đáp án A.**

Ta có: 



**Câu 6: Đáp án D.**

Ta có:

 Suy ra

Cách nhớ:

Với 

Trong đó



**Câu 7: Đáp án C.**

Ta có 

 Đặt  Điều kiện  Khi đó  phương trình trở thành 









Với  ta có: 







Vậy 

**Câu 8: Đáp án C.**

**Câu 9: a) Đáp án A.**

Ta có:





**b) Đáp án C.**

Ta có:









**c) Đáp án C.**







**Câu 10: Đáp án B.**

Ta có:





Ta có: 



**Câu 11: Đáp án A.**

Với cách ra trắc nghiệm như này, ta có thể thử từng phương án và tìm ra kết quả A.

Giả sử 

Theo yêu cầu bài toán ta có:



**Câu 12: Đáp án A.**





Do  không cùng hướng nên hai vectơ  và  không bằng nhau. Mệnh đề A1 sai.

Theo công thức hình chiếu ta có:

 Mệnh đề A2 đúng.

Ta có:

 Mệnh đề A3 sai.





Mệnh đề A4 đúng.











Lại có:



Như vậy mệnh đề A5 đúng





Mệnh đề A6 sai.

Câu 13: **a) Đáp án B.**

Ta có:



Suy ra:





1. **Đáp án D.**

Gọi  là trực tâm tam giác ABC



  Suy ra 

 c**) Đáp án B.**

Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp 

**d) Đáp án C.**

Gọi K là điểm thỏa mãn 

Ta có:







 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi NK đạt giá trị nhỏ nhất. Điều này suy ra N là hình chiếu của K lên Ox, hay N(2;0)

**f) Đáp án D.**

Gọi  là hình chiếu của A lên BC. Khi đó  

Do T là trung điểm AA’

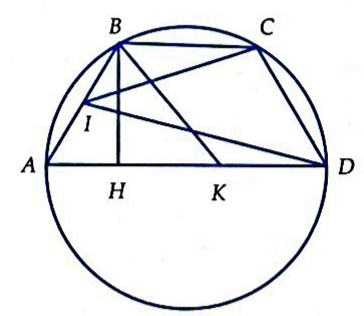
**g) Đáp án A.**

Gọi  là tọa độ của điểm D. Suy ra 

Ta có:

**Câu 14: Đáp án D.**



Do ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính  nên . Khi đó

 Ta có:









Vậy số khẳng định đúng là 3.

**Câu 15: Đáp án C.**

Gọi , với  Khi đó:

 Theo yêu cầu bài toán ta có: 

  nên chọn C.

**Câu 16: Đáp án A.**

Lời giải của bạn Tùng Chi sai từ bước 1, bước vẽ hình. Ta có:

 Xét hai tam giác AOM và BOM có OM chung,  và  suy ra 

Lại có:

 Vì vậy, điểm H hoặc trùng với O hoặc nằm khác phía với A đối với O.

**Câu 17: Đáp án B.**

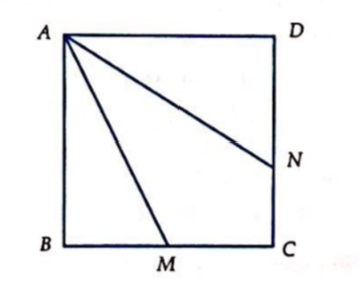
Ta có:

  và 

Suy ra tam giác KGF vuông cân tại G. Do đó G là tiếp điểm của  trên cạnh BC. Do DG cùng vuông góc với CE và CK nên C, K, E thẳng hàng. Ta có:  và  do đó F là trung điểm của BG

**Câu 18: Đáp án B.**

Gọi  là độ dài cạnh của hình vuông. Khi đó:





và 







Ta có:



**Câu 19: Đáp án B.**

Ta có:

Do EH vuông góc với CD nên 





Ta có:



**Câu 20: Đáp án C.**

Gọi T là giao điểm của DN và AC. Do tam giác DCN vuông nên 

Ta có: 











**Câu 21: Đáp án B.**

Điều kiện: 

Xét hai vectơ:





Ta có:

  Suy ra bất đẳng thức đã cho có dạng

 cùng hướng



Đối chiếu với điều kiện (\*) ta thấy  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Câu 22: Đáp án C.**

Bạn A sai ở bước 3. Vì theo định nghĩa hai vectơ có  có phương vuông góc với nhau.

Để được kết quả đúng bạn A khắc phục như sau:    Hay tứ giác ABCD là hình bình hành

Câu 23: Đáp án C.

Ta có:







 Vậy số các số  thỏa mãn là 2.

**Câu 24: Đáp án C.**

Đặt 

Chia cả hai vế của (1) cho **** ta được

. Nếu một trong các giá trị  bằng 0 thì hai giá trị còn lại cũng bằng 0. Thật vậy giả sử  thì





Giả sử

. Nhân vô hướng vế trái của (1) với lần lượt  ta được:





Như vậy có 6 bộ thỏa mãn điều kiện (1)

**Câu 25: Đáp án A.**

Tam giác ABC vuông tại A nên





















**Câu 26: Đáp án B.**

Ta có:



Ta có:





Để  thì 







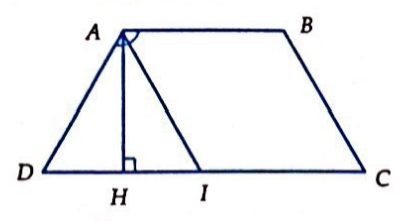




Vậy  thì 

**Câu 27: Đáp án A.**



Gọi I là trung điểm của CD. Ta có:

 nên tứ giác ABCD là hình bình hành.

Khi đó AI = BC, mà AD = BC (do ABCD là hình thang cân) nên AD = AI.

Vậy tam giác ADI là tam giác đều do  và AD = AI.



Xét tam giác vuông ADH ta có:

, 

Suy ra ta tính được: 

()





 Ta có:

**III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC**

Khi đó



Vậy 



**Câu 28: Đáp án A.**

Từ ABCD là hình thoi cạnh a,  suy ra  hay  Ta có:







Do đó:  Ta có:





Câu 1: **a) Đáp án A.**

Ta có:



**b) Đáp án A.**





**c) Đáp án C.**

Ta có:

 Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là 

 **d) Đáp án C.**

Áp dụng định lý sin ta có:

 **Câu 2: Đáp án B.**

Mà 



**Câu 3: Đáp án A.**

Ta có:



 Mặt khác:



 (do  )

Mà  

**Câu 4: Đáp án D.**

**Câu 5: Đáp án B.**

Ta có:





**Câu 6: Đáp án D.**

Ta có:





**Câu 7: Đáp án B.**

Ta có:



Mà 



**Câu 8: Đáp án D.**

**Câu 9: Đáp án B.**

Ta có:

**Câu 10: Đáp án C.**

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:

km. Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là  km. Vậy sau 2h hai tàu cách nhau là:

**Câu 11: Đáp án B.**

Trong tam giác vuông CDA có:







Trong tam giác vuông CDB:







 khoảng cách 

**Câu 12: Đáp án A.**

Cách 1: Ta có:

Mặt khác





 Cách 2:

 Khi đó



**Câu 13: Đáp án A.**





**Câu 14: Đáp án B.**



**Câu 15: Đáp án A.**

Ta có: Trong 

 Mặt khác:



**Câu 16: Đáp án A.**

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác ABC ta có: 







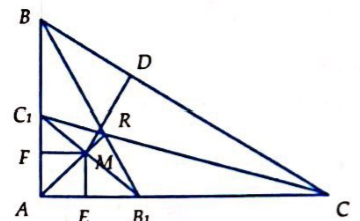
Tương tự





 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Câu 17: Đáp án C.**



Gọi chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Dễ thấy AEMF là hình vuông.

Đặt  Theo tính chất đường phân giác ta có:







Tương tự:



Do MF//AB1 nên 







Vì M nằm trong tam giác ABC nên

   **Câu 18: Đáp án A.**

Ta có:





**Câu 19: Đáp án D.**

Ta có:

 Theo giả thiết:





**Câu 20: Đáp án B.**

Gọi E, F, H lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AC, AB, BC. Do tam giác ABC vuông tại A nên tứ giác AFIE là hình vuông

 Do  nên tam giác IOB vuông tại I. Ta có:





**Câu 21: Đáp án C.**

Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AD. Ta có:



Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:





Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi





**Câu 22: Đáp án A.**

Áp dụng định lý din trong tam giác DBE ta có:





( do tam giác ABC nhọn). Do đó tam giác ABE vuông cân tại E nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE là đường tròn đường kính AC.



Do đó ID, IE là tiếp tuyến của đường tròn (BDE).

Ta có:



**Câu 24: Đáp án A.**

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của đường tròn (I) với cạnh BC.

Đặt  ta có:





Áp dụng định lý Pytagore cho tam giác ABC, ta có: 

Từ (1) và (2)

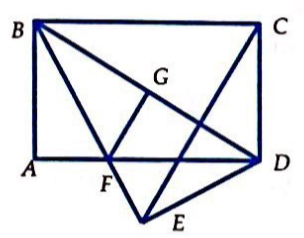


Từ (1) và (3)  là hai nghiệm của phương trình:

 Vì AB < AC nên x < y, do đó  

Lại có:

 **Câu 25: Đáp án A.**



Chúng ta cần tính diện tích tam giác BFH. Sử dụng tính chất  dễ thấy hai tam giác ABF và EDF bằng nhau (c.g.c). Do đó tam giác FBD cân với cạnh đáy BD. Gọi FG là đường cao của tam giác FBD. Trong tam giác vuông FGD có:  và 

Từ đó:

Vậy diện tích của tam giác BFD bằng:

 **Câu 26: Đáp án A.**

Áp dụng định lý sin cho các tam giác IBC và ABC ta có:



Tương tự:



Từ đó ta có: 

 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

**Câu 27: Đáp án C.**

Có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Điểm H nằm giữa B và C. Trên tia HC lấy điểm D sao cho . Suy ra AD là phân giác của góc  nên **** và 

Áp dụng định lý Pytagore trong tam giác vuông Abh ta có:





Đặt  Ta có:



Lại có:





 Vậy diện tích tam giác ABC trong trường hợp này  TH2: Điểm B nằm giữa H và C. Lấy điểm D đối xứng với B qua H. Khi đó AD là phân giác ngoài của  Tương tự trường hợp 1, ta tìm được BC = 30cm (bằng DC trong TH1)

Vậy diện tích ABC trong trường hợp này bằng 

Lời bình: Nhiều bạn không chú ý tới vị trí của H nên dễ mất một trong hai trường hợp.

**Câu 28: a) Đáp án A.**

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác ABC ta có:

  Ta có:

  b) Đáp án A.





**Câu 29: Đáp án D.**

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:  

Khi đó:



Do a,b,c dương nên

Suy ra: 

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có:  nên:

 Tương tự:



Suy ra: 

Vậy 

**Câu 30: Đáp án A.**

Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó:





Theo công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác ta có:



Tương tự ta cũng ta:





Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwars ta có:

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Câu 31: Đáp án A.**

Theo định lý sin ta có: 



Nhân ba đẳng thức trên theo vế với vế và để ý rằng  suy ra:





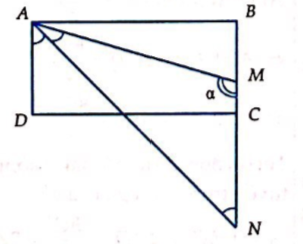
Tương tự:

 Mặt khác:



 Cộng các đẳng thức (1), (2) theo vế đồng thời kết hợp với (3) ta suy ra:

 **Câu 32: Đáp án A.**



Đặt 

Theo giả thiết ta có: AN là phân giác  (cùng bằng NAD)

Vậy  cân tại M

Theo định lý cosin cho có:





Theo bài ra ta có:





Ta có:  (vì M di động trên đoạn BC)

  đạt giá trị nhỏ nhất khi  xảy ra  **Câu 33: Đáp án C.**

Ta có:

 Áp dụng định lý hàm số sin trong 





Xét tam giác vuông ACD:



 Suy ra chiều cao của cột cờ là:



=1,5+ 



**Câu 34: Đáp án C.**









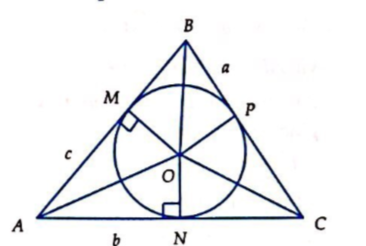
 

 Do  nên:



Vậy tam giác ABC vuông tại A hay cân tại A (đpcm).

**Câu 35: Đáp án A.**



Xét tứ giác AMON có:   và 









 (do (\*))



Chứng minh tương tự ta có:









 **Câu 36: Đáp án A.**

Ta có các công thức tính diện tích:







(BĐT Cauchy). Tương tự ta có:



Và 

Do đó:



Dấu “=” xảy ra



 là trung điểm của BC, CA, AB.

Vậy  

**Câu 37: Đáp án A.**

Dựa vào tính đối xứng, ta giả sử   với  (\*)

Suy ra:  Mà (\*\*)





 không đổi (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi )

Kết hợp (\*)(\*\*): dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

**Câu 38: Đáp án D.**

Chứng minh rằng:







 Hay 

Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng  không nhọn. Ta sẽ chứng minh:

 Ta có:







 Mặt khác:







(trong đó:

).

Tương tự ta có:





Vậy   (do có (\*\*))

 **Câu 39: Đáp án A.**

Đặt  Ta có:

 Lại có:

 Do: 







Ta có:

(1) 

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

**Câu 41: Đáp án A.**

**Câu 42: Đáp án C.**

Đặt  Xét tam giác BCD:



Xét tam giác ACD: 



 Chiều sâu của con tàu đắm bằng:



**Câu 43: Đáp án D.**

Đặt  Ta có:

 Lại có:

**Câu 44: Đáp án A.**

Ta có:





Ta có:







**Câu 45: Đáp án A.**

Ta có:  Đặt 

Ta có:

Mặt khác:

  Lại có:

  Vậy 



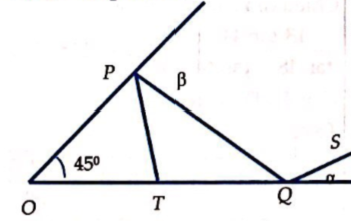
**Câu 46: Đáp án A.**

Ta có:



. Khi đó:

 **Câu 47: Đáp án A.**



Ta có:

 Xét tam giác POQ ta có: 

Ta có:

 Áp dụng định lý cosin trong tam giác OPQ ta có:   = 8.

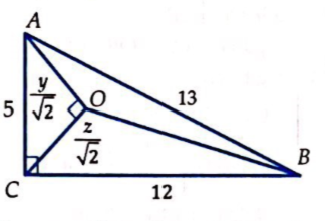
Khi đó

Áp dụng định lý sin trong tam giác PTO ta có: 



**Câu 48: Đáp án A.**



Xét tam giác vuông ABC tại C với AB=13, AC=5, BC=12. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn



Đặt  Dễ thấy  thỏa mãn điều kiên trên. Ta có:  Từ đó suy ra:





 **Câu 49: Đáp án A.**

Giả sử:  là nghiệm của hệ thì:

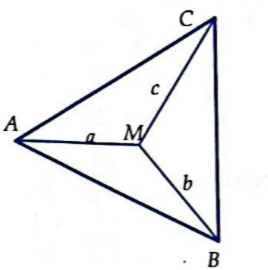


Đặt  (a,b,c>0)

Hệ trở thành:



Trong mặt phẳng ta vẽ ba đoạn thẳng  đôi một hợp với nhau góc 



Theo định lý hàm số cosin ta dễ dàng có được AB = 4, BC = 5, AC = 6. Áp dụng công thức Herong ta có: 

Tam giác ABC nhọn, suy ra M nằm trong tam giác ABC. Khi đó:





Từ ba phương trình đầu ta có:

 Vậy 

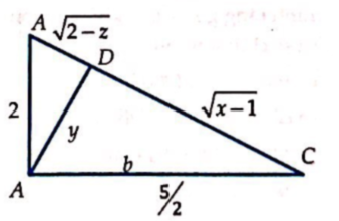


  **Câu 50: Đáp án D.**

Từ hệ phương trình suy ra 

Hệ phương trình tương đương:





Xét tam giác ABC vuông tại B, đường cao BD với 

Đặt 

Rõ ràng  thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó: 



**Câu 51: Đáp án C.**

Xét tam giác vuông ABC tại B có  và đường cao BD. Đặt  Ta thấy  thỏa mãn điều kiện. Khi đó:

**Câu 52: Đáp án B.**

Với  thì



Trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Với  xét tam giác ABC vuông tại A có  Gọi AD là phân giác góc . Trên tia AD lấy điểm M sao cho 

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ACM: 

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM: 

Suy ra:

 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với D hay:



Phương trình có nghiệm duy nhất.

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ IX

**Câu 1: Đáp án A.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có:

  Do AG vuông góc với BG nên







 **Câu 2: Đáp án D.**

Ta có: 

Lại có:





 Theo yêu cầu bài toán:



Do 



 nên

  **Câu 3: Đáp án C.**

 Lại có:











Khi đó:







Và 



Theo giả thiết ta có: 

 **Câu 4: Đáp án A.**

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có:



Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện là đường thẳng qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng  là giá của vectơ 

**Câu 5: Đáp án C.**

Ta có:



 nhọn

Lại có:

   nhọn

**Câu 6: Đáp án D.**

Ta có:



Lại có: 



Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác IBC ta có:

 Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Khi đó ta có: 







**Câu 7: Đáp án C.**

Ta có: 

Cách 1: Áp dụng định lý sin trong hai tam giác ADC và ABC ta có:

    Từ đây dễ dàng tìm được  . Suy ra 

Cách 2: Gọi E trên đoạn AD sao cho  Xét tam giác CDE ta có:

Suy ra  hay tam giác BDE cân tại D. Suy ra 

Khi đó:





Suy ra hai tam giác BCE, BAE cân hay 

Điều này suy ra tam giác AEC vuông cân. Hay 

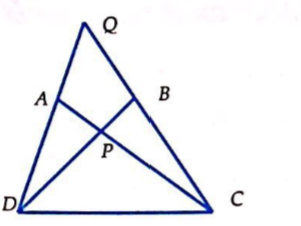
Vậy 

**Câu 8: Đáp án B.**

Theo định lí Thales ta có:



Đặt 



Do tam giác APB vuông tại P nên



Lại có 



Suy ra: 





Diện tích hình thang ABCD

bằng:





**Câu 9: Đáp án A.**

Đặt 

ÁP dụng định lí cosin trong các tam

giác PCA, PAB, PBC ta có:











 =1



Ta có:





Áp dụng công thức Heron ta suy ra



Suy ra



Vậy 

Suy ra 

**Câu 10: Đáp án C.**

Cách 1:

Dựa vào hình vẽ ta suy ra a, b dương.

Tam giác OAB đều nên









Cách 2: Đặt  giả sử

Góc  là góc tạo bởi tia OA và tia Ox.

Khi đó, 

và

ta có:













Từ đây suy ra



**Câu 11: Đáp án A.**

Và 



Áp dụng công thức Euler

ta có:





Theo giả thiết ta có: 



Vì vậy,

















**Câu 12: Đáp án D.**

Đặt 

Áp dụng định lý sin ta có:

















Vậy 

**Câu 13: Đáp án D.**







**Câu 14: Đáp án B.**

Giả sử . Ta có: 



**Câu 15: Đáp án C.**







Giá trị nguyên lớn nhất của x thỏa mãn

yêu cầu bài toán là x = 0.

**Câu 16: Đáp án B.**

Do tam giác ABC vuông

cân nên

 và 



Lại có 





**Câu 17: Đáp án B.**











**Câu 18: Đáp án D**.

Ta có:



Nếu tam giác ABC có C nhọn

thì 

**Câu 19: Đáp án D.**

Áp dụng định lí cosin trong tam giác

ABC ta có:



**Câu 20: Đáp án C.**

Diện tích tam giác ABC bằng



**Câu 21: Đáp án D.**

Nửa chu vi tam giác ABC bằng



Ta có:

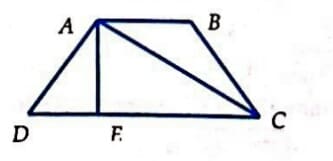




**Câu 22: Đáp án D.**

Dựng đường cao AE.

Đặt AB = x. Khi đó AE =x.



Ta có:

 và



Do tam giác CAD vuông tại A nên





Diện tích hình thang cân bằng:





**Câu 23: Đáp án D.**

Ta có:















**Câu 24: Đáp án A.**

Ta có:



Diện tích tam giác ABC

bằng:



**Câu 25: Đáp án B.**





**Câu 26: Đáp án A.**

Diện tích tam giác ABC bằng



Lại có



**Câu 27: Đáp án A.**

Ta có: 

Áp dụng định lí sin trong tam giác

ABC ta có:





Nửa chu vi tam giác ABC:



Diện tích tam giác ABC bằng:





Bán kính nội tiếp đường tròn là



Diện tích đường tròn nột tiếp tam giác bằng:



**Câu 28: Đáp án A.**









**Câu 29: Đáp án A.**







Câu 30: Đáp án B.

Ta có: 







Giả sử  .Trường hợp 1.





Trường hợp 2.





**Câu 31: Đáp án C.**

Ta có: 



Vậy









Vậy n = 23.

**Câu 32: Đáp án D.**

Áp dụng công thức độ

dài đường

trung tuyến , ta có:





Mặt khác ta có:

Áp dụng định lí cosin trong tam giác

AEC ta có:





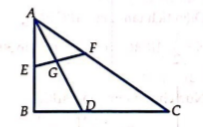
Ta có:





Vậy 

**Câu 33: Đáp án C.**







Lại có:





Do tam giác ABC vuông tại B nên



Do AD là phân giác của

góc 

Nên dễ dàng suy ra 

Diện tích tam giác ABC:



Suy ra



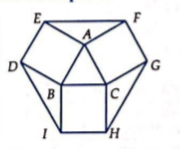
Diện tích tam giác ABD:



Diện tích tứ giác DCFG bằng:



**Câu 34: Đáp án C.**







Diện tích tam giác AEF bằng



Dễ thấy:





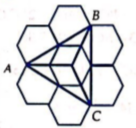
Diện tích hình

lục giác DEFGHI





**Câu 35: Đáp án B.**



Chú ý rằng 6 tam giác bên

trong tam

giác ABC có thể gộp thành

một lục

giác đều.

diện tích lục giác đều có cạnh bằng 1

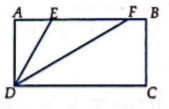
là

Do đó diện tích của tam giác

ABC bằng



**Câu 36: Đáp án A.**



Đặt 

Do đó diện tích hình chữ nhật ABCD

bằng  Theo đề bài ta có:



Áp dụng hệ thức lượng trong

các tam

giác và  ta có:





Diện tích tam giác DEF bằng





Tỉ số diện tích là

**Câu 37: Đáp án C.**

Đặt 

Vì  và



nên các

Tam giác KEJ, JAG,

GDH, HFK đồng

dạng. Sử dụng tính chất đối xứng và

định lí Pytago ta có:

EK = xy, 

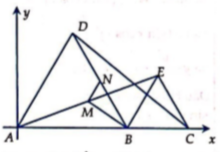
Vì ta biết 

Nên ta có phương trình: 





**Câu 38: Đáp án B.**



Trong mặt phẳng với hệ

tọa độ Oxy, giả

sử điểm  và  .

do sự đối xứng ta có thể cho D và E ở

góc phần tư thứ nhất.

Do hai tma giác

ABD, BCE đều nên 

Do M là trung điểm của AE,

N là trung

điểm của BD nên



Từ đó suy ra



Diện tích tam giác BMN

bằng







**Câu 39: Đáp án B.**

Đặt 











Suy ra  Vậy m + n = 91.

**Câu 40: Đáp án A.**

Trường hợp P trùng với B, Q trùng với

C ta có 

Khi đó 



Trường hợp P trùng với trung điểm của

đoạn AB, Q trùng với trung điểm của

đoạn AC ta có: 

dễ thấy 

áp dụng hệt thức Hê-rông ta có:

SABC =90.



Vậy m + n = 161

**Câu 41: Đáp án B.**







Do 





Vậy 

**Câu 42: Đáp án A.**

Gọi I là tâm đường tròn

nội tiếp tam

giác ABC. Ta có:

tam giác BDI cân tại

D, tam giác CEI cân tại E.

Vậy 

Chu vi tam giác ADE là

AD + AE + DE

= AB + AC =43.

Tỉ số chu vi vủa

tam giác ADE và

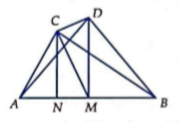
ABC là  là tỉ số

đồng dạng của hai

Tam giác này. Do đó



**Câu 43: Đáp án D.**



Do tam giác ABC vuông tại C nên 

Suy ra 

**Cách 1:**

Gọi N là hình chiếu của C lên AB.

Lại có:





Vậy 





**Cách 2:**

Ta có:  và



Ta có: 

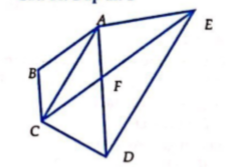








**Câu 44: Đáp án B.**



Ta có ABCF là hình bình hành trong đó

F là giao điểm của CE và AD và



Áp dụng định lí cosin trong tam giác

ABC ta có:



Suy ra 

và

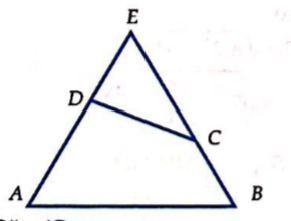
ta có: 







**Câu 45: Đáp án C**



Đặt AB = x.

Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Khi đó tam giác EAB đều.

Ta có: ED = x-10, EC = x-8.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác

EAD ta có:



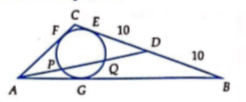






Vậy m + n = 150.

**Câu 46: Đáp án A.**



Gọi E, F, G lần lượt là các

điểm tiếp xúc

của (I) với các cạnh

BC, AC, AB và

PQ là giao điểm của (I)

với AD (P

ở giữa AQ). Không mất tính

tổng quát,

giả sử AC < AB, E nằm

giữa D và C.

Đặt AD = 3x.

Ta có:





Đặt CE = CF = y (y <10).

Khi đó 

Ta có:

AC = AF + CF = DE + CE = CD= 10.

Suy ra DE = AF = AG = 10-y.

Vậy BG = BE = BD+ DE = 20-y,

Suy ra AB = AG + BG = 30 – 2y.

Áp dụng công thức độ dài đường trung

tuyến ta có:





Với y =0 bị loại. Vậy y =2.

Vậy BC = 20, AB =26, AC =10

Diện tích tam giác ABC bằng



Vậy m + n =38.

**Câu 47: Đáp án D.**

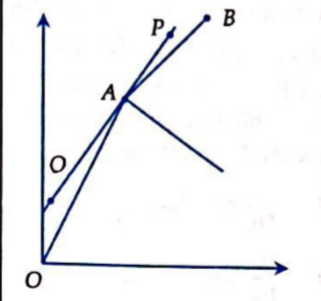
Gọi  là tọa độ điểm H.

Ta có: 





**Câu 48: Đáp án A.**



Gọi l là đường thẳng

vuông góc với d

tại A.

Khi đó l chính là phân giác của OAB.

Ta có: 

Khi đó:



Chính là vecto chỉ phương

của đường

thẳng l.

hệ số góc của đường thẳng

l là:



Hệ số góc của đường thẳng d

là:



**Câu 49: Đáp án B.**







**Câu 50: Đáp án A.**

Áp dụng AM-GM ta có:









Dấu bằng xảy ra khi

