# CHỦ ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN

**Phương pháp**

Cho hai số phức ta cần nhớ các định nghĩa và phép tính cơ bản sau:



Vận dụng các tính tính chất trên ta có thể dễ dàng giải các bài toán sau.

Ta cũng cần chú ý kết quả sau: Với , thì



* Nếu thì



* Nếu thì



* Nếu thì



* Nếu thì



**I. CÁC VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1**. Cho số phức: . Tính các số phức sau:



**Ví dụ 2.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức:

a) b)



c) ; d)



**Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a) ; b) ; c)



d) ; e)



**Ví dụ 4.** Viết các số phức sau đây dưới dạng



a)



b) c)



d) ; e)



**Ví dụ 5.** Tìm nghịch đảo của số phức sau:



**Ví dụ 6.** Cho . Tìm các số để



a) là số thực b) là số ảo.



**Ví dụ 7.** Tìm để:



a) Số phức là số thuần ảo.



b) Số phức là số thực.



**Ví dụ 8.** Tìm các số thực x, y sao cho , với từng trường hợp



c)



d)



**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng :



**Ví dụ 10.** a) Tính mô-đun của số phức z biết .



**b)** Cho số phức thỏa mãn . Tìm môđun của số phức.



**Ví dụ 11.** Xét số phức: . Tìm m để



**Ví dụ 12.** Tính



**Ví dụ 13.** Số phức thay đổi thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: .



**Ví dụ 14.** Cho số phức , với số thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của .



**Ví dụ 15. (Đề Minh họa của bộ).** Cho số phức z = 3 – 2i. Tìm phần thực và phần ảo của số phức



**A.** Phần thực bằng –3 và Phần ảo bằng –2*i*. **B.** Phần thực bằng –3 và Phần ảo bằng –2.

**C.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2*i*. **D.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

**Ví dụ 16. (Đề Minh Họa của Bộ).**  Cho hai số phức và . Tính môđun của số phức



**A. . B. . C. . D. .**



**Ví dụ 17. (Đề minh họa của bộ).** Cho số phức Tìm số phức



**A. B. C. D.**



**Ví dụ 17. (Đề thử nghiệm lần 1 của Bộ).** Tìm số phức liên hợp của số phức



**A.** **B.** **C.** **D.**



**Ví dụ 18:** **(Đề thử nghiệm lần 1 của Bộ).** Tính môđun của số phức thoả mãn



**A.** **B.** **C.** **D.**



**Ví dụ 19:**  **( Đề Thử nghiệm lần 1-Bộ Giáo dục).** Xét số phức thoả mãn Mệnh đề nào sau đây đúng?



**A.** **B.** **C.** **D.**



**II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN**

**Câu 1.** Cho Tính:



**1.1.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**1.2.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**1.3.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 2.** Tính lũy thừa bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 3.** Tính lũy thừa bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 4.** Tính lũy thừa bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 5.** Tính lũy thừa bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 6.** Tính lũy thừa bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 7.** Viết các số phức dưới dạng ,



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 8.** Viết các số phức dưới dạng ,



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 9.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 10.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 11.** Tính



**Câu 12.** Cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 13.** Cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 14.** Cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 15.** Cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 16.** Các cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 17.** Các cặp số thực x, y thỏa mãn là:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 18.** Tìm điều kiện cho 2 số thưc x, và y để là số thực



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 19.** Tìm điều kiện cho 2 số thưc x, và y để là số ảo



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 20.** Tìm số thực m để bình phương của số phức là số thực.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 21.** Cho số phức . Tìm phần thực và phần ảo của số phức .



**Câu 22.** Cho Hãy viết dưới dạng đại số của .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 23.** Tính tổng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 24.** Cho hai số phức liên hiệp thỏa mãn và Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 25.** Tìm c biết a,b và c các số nguyên dương thỏa mãn:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 26.**  Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn Tìm n.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 27.**  Cho số phức z thỏa mãn .Tìm mô đun của số phức



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 28.**  Tìm số thực m biết: và ( trong đó i là đơn vị ảo)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 29.** Tìm phần thực của số phức: thỏa mãn phương trình: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 30.** Cho số phức . Tìm m, biết số phức có môđun bằng 9.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 31.**  Cho số phức . Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn tại m để



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**CHỦ ĐỀ 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC**

**Phương pháp**

* Trong mặt phẳng phức, số phức được biểu diễn bằng :



* Điểm kí hiệu



* Vectơ



* Vectơ



* Biểu diễn hình học của



và đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.



và đối xứng với nhau qua trục Ox.



* Biểu diễn hình học của



Gọi M, lần lượt biểu diễn số phức biểu biểu diễn số phức z’. Ta có:



và biểu diễn số phức ;



và biểu diễn số phức ;



biểu diễn số phức kz.



* Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, a, b thì :



**I. CÁC VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a,b,c. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M,G,D lần lượt biểu diễn các số phức m,g,d.

a) Tính các số phức m, g, d theo a, b, c.

b) Nếu thêm giả thiết chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu



**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B ,C lần lượt biểu diễn các số phức



a) Tìm số phức d (biểu diễn điểm D);

b) Định m sao cho ABCD là hình chữ nhật.

**Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức :

z, và



Chứng minh rằng:

a) tam giác OMA vuông tại M;



b) tam giác MAB là tam giác vuông;



c) tứ giác OMAB là hình chữ nhật.



**Ví dụ 4.** Gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức



1. Định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng;
2. Xét hàm số Đặt Tính a’, b’,c’



1. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a’, b’, c’. Định k để A’, B’, C’ là ba điểm thẳng hàng;
2. Nếu lần lượt biểu diễn các số phức z, z’. Chứng minh rằng là số ảo.



Áp dụng: Tính k để tam giác A’B’C’ vuông tại A’.

**Ví dụ 5.** Cho số phức



a) Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ hai



b) Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên Hyperbol



c) Tìm m để khoảng cách của điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ nhỏ nhất.

**Ví dụ 6.** Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biễu diễn các số



a) Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

b) Tìm số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.

**Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng phức cho các điểm: O (gốc tọa độ), A điểm biểu diễn số 1, B điểm biểu diễn số phức z không thực, A’ biểu diễn số phức và B’ biểu diễn số phức Chứng minh rằng: Tam giác và tam giác đồng dạng.



**Ví dụ 8.** Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số:



a) Tìm các số theo thứ tự biểu diễn các vectơ



b) Tính và từ đó suy ra A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tâm đường tròn biểu diễn số phức nào?



**II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN**

**Câu 1.** Gọi A, B theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số z khác 0 và . Lúc đó, tam giác OAB là tam giác gì



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Tam giác cân | **B.** Tam giác đều |
| **C.** Tam giác vuông | **D.** Tam giác vuông cân |

**Câu 2.** Cácđiểm A, B, C và A’, B’, C’ tương ứng biểu diễn các số phức và ( trong đó A, B, C và A’, B’ , C’ không thẳng hàng). Hai tam giác ABC và A’B’C’ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 3.** Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số . Chọn khẳng định đúng



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** ABCD là hình bình hành | **B.** |
| **C.** D là trọng tâm của tam giác ABC | **D.** Tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn |

**Câu 4.** Cho ba điểm A ,B, C lần lượt biểu diễn các số phức và



**Câu 4.1.** Xác định sao cho A,B,C là ba đỉnh của một tam giác



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 4. 2.** Khi A, B, C là ba đỉnh của tam giác. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Tam giác cân | **B.** Tam giác đều |
| **C.** Tam giác vuông | **D.** Tam giác vuông cân |

**Câu 4.3.** Tìm số phức d biểu biễn bởi D sao cho ABCD là hình chữ nhật

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 5.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn số phức Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào?



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 6.** Xét ba điểm A, B,C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt thỏa mãn . Ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 7.** Cho M, N là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức khác 0 thỏa mãn đẳng thức . Tam giác OMN là tam giác gì?



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Tam giác cân | **B.** Tam giác đều |
| **C.** Tam giác vuông | **D.** Tam giác vuông cân |

**Câu 8.** Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức và



Tìm x sao cho

**Câu 8.1.** Tam giác ABC vuông tại B

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 8.2.** Tam giác ABC cân tại C

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 9.** Cho là biểu diễn của hai số phức và . Gọi là biểu diễn của số phức . Hãy phân tích qua



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 10.**  Tìm các điểm biểu diễn của số phức z biết điểm biểu diễn của các số phức lập thành



**Câu 10.1.**Tam giác vuông tại A

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Quỷ tích của z là đường thẳng | **B.** Quỷ tích của z là đường tròn |
| **C.** Quỷ tích của z là đường elip | **D.** Quỷ tích của z là Parabol |

**Câu 10.2.**Tam giác vuông tại B

|  |
| --- |
| **A.** Quỷ tích của z là đường thẳng |
| **B.** Quỷ tích của z là đường thẳng |
| **C.** Quỷ tích của z là đường thẳng trừ gốc tọa độ |
| **D.** Quỷ tích của z là đường thẳng trừ gốc tọa độ |

**Câu 10.3** Tam giác vuông tại C

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A.** Quỷ tích của z là đường thẳng | | |
| **B.** Quỷ tích của z là đường thẳng | | |
| **C.** Quỷ tích của z là đường tròn | | |
| **D.** Quỷ tích của z là hai đường thẳng | | |
| **Câu 11. (Đề minh họa của bộ).**  Cho số phức thỏa mãn Hỏi điểm biểu diễn củalà điểm nào trong các điểm *M*, *N*, *P*, *Q* ở hình bên ?   |  |  | | --- | --- | | **A.** Điểm *P*. | **B.** Điểm *Q*. | | **C.** Điểm *M*. | **D.** Điểm *N*. | |  | |
| **Câu 12**. **(Đề thử nghiệm lần 1 của bộ).**  Điểm *M* trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức *z*. Tìm phần thực và phần ảo của số phức *z*.  **A.** Phần thực là −4 và phần ảo là 3.  **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là −4*i*.  **C.** Phần thực là 3 và phần ảo là −4.  **D.** Phần thực là −4 và phần ảo là 3*i*. | |  |

**CHỦ ĐỀ 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM**

**Phương pháp**

* Giả sử các điểm lần lượt biểu diễn các số phức



* + thuộc đường trung trực của đoạn AB.



thuộc elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng k.



* Giả sử M và M’ lần lượt biểu diễn các số phức z và



Đặt và



Hệ thức tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa



* Nếu biết một hệ thức giữa x,y, ta tìm được một hệ thức giữa u,v và suy ra được tập hợp các điểm M’.
* Nếu biết một hệ thức giữa u,v ta tìm được một hệ thức giữa x,y và suy ra được tập hợp các điểm M.

**I. CÁC VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Đường thẳng }

a) b) c) với



**Ví dụ 2.** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Đường tròn }

a) **;** b)



c) ; d).



**Ví dụ 3.** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Elip}:



**Ví dụ 4.** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Ảo thực}

a) là số ảo; b) là số thực.



**Ví dụ 5.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức , với



**Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn .Tìm tập hợp biểu diễn số phức .



**Ví dụ 7.** Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn: . {Hình vành khăn}



**Ví dụ 8.** Tìm tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện



**Ví dụ 9.** Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn



**Ví dụ 10 .** Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) là số thực dương với ; b)



c) ; d)



**Ví dụ 11.** Gọi và là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và z’ Đặt và



a) Tính theo và tính x,y theo .



b) Cho M di động trên đường tròn (C ) tâm A(-1;1), bán kính Tìm tập hợp các điểm M’.



c) Cho M di động trên đường thẳng , tìm tập hợp các điểm M’.



**Ví dụ 12.**  Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện



**II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN**

**Câu 1.** Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đường thẳng | **B.** Đường thẳng |
| **A.** Đường thẳng | **D.** Đường thẳng |

**Câu 2.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đường thẳng | **B.** Đường thẳng |
| **A.** Đường thẳng | **D.** Đường thẳng |

**Câu 3.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đường thẳng | **B.** Đường tròn |
| **A.** Đường elip | **D.** Đường Parabol |

**Câu 4.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Hai đuờng thẳng , | **B.** Hai đuờng thẳng , |
| **A.** Hai đuờng thẳng , | **D.** Hai đuờng thẳng , |

**Câu 5.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Hai đuờng thẳng | **B.** Hai đuờng thẳng |
| **A.** Hai đuờng thẳng | **D.** Hai đuờng thẳng |

**Câu 6.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Hai đuờng thẳng , . | **B.** Hai đuờng thẳng , . |
| **C.** Hai đuờng thẳng , . | **D.** Hai đuờng thẳng , . |

**Câu 7.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng thẳng | **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường thẳng | **D.** Đường tròn tâm và bán kính |

**Câu 8.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng tròn | **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường tròn | **D.** Đường tròn tâm và bán kính |

**Câu 8.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng tròn | **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường tròn | **D.** |

**Câu 9.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng tròn | **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường tròn | **D.** |

**Câu 9.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng elip | **B.** Đuờng elip |
| **C.** Đuờng elip | **D.** Đuờng elip |

**Câu 10.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng tròn | **B.** Đuờng elip |
| **C.** Đuờng parabol | **D.** Đuờng thẳng |

**Câu 11.**  Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |
| --- |
| **A.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung |
| **B.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung |
| **C.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành |
| **D.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành |

**Câu 12.**  Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện là



|  |
| --- |
| **A.** Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm , bán kính 2 |
| **B.** Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là |
| **C.** Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm , bán kính 1 |
| **D.** Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là |

**Câu 13.** Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho là số thực.



|  |
| --- |
| **A.** Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ |
| **B.** Tập hợp điểm là trục hoành |
| **C.** Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm |
| **D.** Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi |

**Câu 14.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho là một số thuần ảo.



|  |
| --- |
| **A.** Đường tròn tâm bán kính |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính trừ đi hai điểm . |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính |
| **D.** Đường tròn tâm bán kính trừ đi hai điểm . |

**Câu 15.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện là



|  |
| --- |
| **A.** Ba cạnh của tam giác |
| **B.** Bốn cạnh của hình vuông |
| **C.** Bốn cạnh của hình chữ nhật |
| **D.** Bốn cạnh của hình thoi |

**Câu 16.** Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức và . Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây:



**Câu 16. 1.** M thuộc đường thẳng d:



|  |
| --- |
| **A.** Đường thẳng |
| **B.** Tia |
| **C.** Đường thẳng |
| **D.** Tia |

**Câu 16.2.** M thuộc đường thẳng d:



|  |
| --- |
| **A.** Đường thẳng |
| **B.** Parabol |
| **C.** Đường tròn |
| **D.** Elip |

**Câu 16.3.** M thuộc đường tròn



|  |
| --- |
| **A.** Đường thẳng |
| **B.** Parabol |
| **C.** Đường tròn |
| **D.** Elip |

**Câu 16.4.** M thuộc hypebol



|  |
| --- |
| **A.** Đường thẳng |
| **B.** Đường thẳng |
| **C.** Đường thẳng |
| **D.** Đường thẳng |

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn là số thuần ảo.



|  |
| --- |
| **A.** Đường tròn tâm bán kính |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính trừ đi hai điểm . |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính |
| **D.** Đường tròn tâm bán kính trừ đi hai điểm . |
| **Câu 19.** Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức , biết z là số phức thỏa mãn: .  **A.** Đường tròn |
| **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường tròn |
| **D.** Đường tròn |

**Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: , biết z là số phức thỏa .



|  |
| --- |
| **A.** Đường tròn tâm bán kính |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính |
| **D.** Đường tròn tâm , bán kính . |

**Câu 21.** Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức biết z là số phức thỏa mãn: .



|  |
| --- |
| **A.** Đường tròn tâm bán kính |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính . |
| **D.** Đường tròn tâm , bán kính . |

**Câu 22.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức với .



|  |
| --- |
| **A.** Hình tròn tâm , . |
| **B.** Đường tròn tâm , . |
| **C.** Hình tròn tâm bán kính . |
| **D.** Đường tròn tâm , bán kính . |

**Câu 23.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức biết rằng số phức z thỏa mãn



|  |
| --- |
| **A.** Hình tròn tâm , . |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính . |
| **D.** Hình tròn tâm bán kính |

**Câu 24.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức với .



|  |
| --- |
| **A.** Hình tròn tâm , . |
| **B.** Đường tròn tâm bán kính |
| **C.** Đường tròn tâm bán kính . |
| **D.** Hình tròn tâm , |

**Câu 25 (Đề minh họa của bộ).** Cho các số phức thỏa mãn. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức là một đường tròn. Tính bán kính *r* của đường tròn đó.



**A.** *r* = 4. **B.** *r* = 5. **C.** *r* = 20. **D**. *r* = 22.

# CHỦ ĐỀ 4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ CHỨNG MINH SỐ PHỨC

**Phương pháp:** Ta nhắc lại một số công thức cơ bản sau:

Cho số phức . Lúc đó



* .







* . Công thức này chứng minh dễ dàng như sau:



## I. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:



**Áp dụng:** Cho ba số phức đều có môđun bằng 1. Chứng minh



**Giải**

Giả sử:



a) Ta có:

và nên



Mà



Vậy .



b) Ta có:



Mặt khác:



Vậy .



c) Ta cần chứng minh bổ đề sau:



Vì nên ta có



Áp dụng bổ đề trên, ta có:

(ĐPCM)



**Áp dụng:** Vì nên



**Lưu ý:** Ta có công thức tổng quát sau: Cho n số phức bất kỳ.



Ta luôn có:



Trước hết ta chứng minh:



Giả sử: và



Trong đó:



Ta có:



Hay



Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp



Với Giả sử



Ta có:



Suy ra:



Mặt khác:



Vậy với đẳng thức đúng.



Giả sử (\*\*) đúng với ta sẽ chứng minh hệ thứ đúng với



Thật vậy:

Đặt , ta có:



Với hai số phức và ta có:



Hệ thức cuối được chứng minh với



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng:

a) ; b)



**Áp dụng:** Tìm mô đun các số phức sau:



**Hướng dẫn giải**

a) **Cách 1.** Đặt



Ta có: và



Từ đó:



Mặt khác:



Do đó:



Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh

**Cách 2.** Vì nên



Suy ra:



b) **Cách 1.** Trước hết ta chứng minh bổ đề:



Thật vậy: hay



Áp dụng bổ đề trên ta có:



**Cách 2.**

Vì nên



**Lưu ý:** Không có công thức: Với mọi số phức : . Tuy nhiên ta có bất đẳng thức sau:



Thật vậy, gọi biểu diễn , biểu diễn thì biểu diễn



Ta có:



\* TH 1: Khi thì :



Do đó:



\* TH 2: Khi thì rõ ràng



Vậy



**Áp dụng:** Ta sẽ áp dụng



Ta có:



Tương tự:



**Ví dụ 3.** a) Chứng minh: Số phức z là số thực khi và chỉ khi



**Vận dụng:** Cho hai số phức đều có mođun bằng 1, . Chứng minh là số thực.



b) Chứng minh: Số phức z là số ảo khi và chỉ khi



**Vận dụng:** Chứng minh hai số phức phân biệt thỏa khi và chỉ khi là số ảo.



**Giải**

Đặt



a) Ta có: z là số thực.



Vậy, z là số thực khi và chỉ khi



**Vận dụng:** Ta có:

, tương tự ta có



Xét



b) Ta có:



Vậy, z là số ảo khi và chỉ khi



**Vận dụng:** Ta có

là số ảo



**Ví dụ 4.** Cho số phức z thỏa mãn là số thực. Chứng minh rằng z là số thực.



**Giải**

Ta biết rằng số phức w là số thực Do đó



là số thực



là số thực.



**Ví dụ 5.** Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng:



**Giải**

a) Ta có



Suy ra:



Vậy z là số thực.

b) Ta có



Vậy z là số thực.

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng



c) Với mọi số phức Chứng minh rằng:



**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



Mặt khác:



Từ (\*) và (\*\*) ta suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta có



Tương tự



Cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được



**Ví dụ 7.** Chứng minh rằng nếu số phức thì



**Giải**

Ta có:

, mặt khác ta có: .



Do đó:



Đặt lúc đó ta được



**Ví dụ 8.** Chứng minh rằng nếu thì .



**Giải**

Giả sử theo giả thiết ta có



Khi đó:



Do đó:



**Ví dụ 9.** Cho và là hai số phức thỏa Chứng minh rằng với mọi số thực a, ta có:



**Giải**

Giả sử với . Khi đó



Ta có:



(2) đúng, dẫn đến điều phải chứng minh.

**Ví dụ 10.** Chứng minh rằng với mỗi số phức , có ít nhất 1 trong hai bất đẳng thức sau xảy ra hoặc



**Hướng dẫn giải**

Giả sử ta có đồng thời .



Đặt . Lúc đó



Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được:

(vô lý). Từ đó ta được điều phải chứng minh. **Ví dụ 10\*.** Cho là ba số thực phân biệt sao cho . Chứng minh rằng: Nếu là các số thực thì và



**Hướng dẫn giải**

Vì là ba số thực phân biệt và nên



đều khác không



và .



Nếu là các số thực thì ta có



Do đó:

Tương tự:.



Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức



Ta có:



Tương tự:



Suy ra:



## II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Cho số phức .



**1.1.** Phần thực của số phức z bằng:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**1.2.** Phần ảo của số phức z:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



**Vậy chọn đáp án 1.1.D và 1.2 B**

**Câu 2.** Cho số phức. Khẳng định nào sau đây đúng



|  |  |
| --- | --- |
| **A. và .** | **B. và .** |
| **C. và .** | **D. và .** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Vậy và .



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 3.** Cho z là số phức thỏa mãn là số ảo. Tìm khẳng định đúng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

là số ảo



Vậy Vậy chọn đáp án B.



**Câu 4.** Cho . Khẳng định nào sau đây **sai**



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** là số thực | **B.**  là số thực |
| **C.**  là số ảo | **D.**  là số thực |

**Hướng dẫn giải**

**Định hướng:** Ta sử dụng kết quả sau: và z là số ảo khi và chỉ khi



Ta có:



Vậy là số thực



B) Vậy là số thực



C) . Vậy là số ảo



D) Vậy là số ảo. Vậy đáp án D sai.



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 5.** Cho số phức z thỏa mãn là số thực. Khẳng định nào sau đây **sai**



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.**  là số ảo | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

là số thực



Vậy là số thực.



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 6.** Đẳng thức bằng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Suy ra:



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 7.** Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

|  |
| --- |
| **A.** |
| **B.** |
| **C.** |
| **D.** |

**Hướng dẫn giải**



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 8.** Cho số phức thỏa điều kiện . Tìm khẳng định đúng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy chọn đáp án C.

**Câu 9.** Gọi z là số phức khác 0 sao cho Tìm khẳng định đúng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

, mặt khác ta có:



.



Do đó:



Đặt lúc đó ta được:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 10.** Cho thỏa . Tìm khẳng định đúng



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử: với



Theo đề:



Từ (1)



Từ (2)



Vậy .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 11\*.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện Tìm khẳng định đúng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Hay: (\*)



Đặt với Từ (\*) suy ra:



Xét các trường hợp:

* Nếu thì nên:



Do đó (mâu thuẫn).



* Nếu thì nên:



Suy ra (mâu thuẫn).



* Nếu thì (thỏa mãn)



Vậy . **Vậy chọn đáp án B.**



**Cách 2.** Casio nhanh chống bằng cách thử trực tiếp.

# CHỦ ĐỀ 5. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Phương pháp**

* Tìm số phức thật ra là tìm phần thực x và phần ảo y của nó.



* Chú ý rằng: , khi là số thực



* ,



* . Khi đó:



* . Khi đó là số ảo (thuần ảo) khi , là số thực khi .



* Trong trường hợp tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất ta làm như sau:
* *Bước 1:* Tìm tập hợp điểm các điểm biểu diễn của *z* thỏa mãn điều kiện.



* *Bước 2:* Tìm số phức *z* tương ứng với điểm biểu diễn sao cho khoảng cách *OM* có giá trị lớn nhất ( hoặc nhỏ nhất )



## I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Tìm số phức z thỏa mãn



d) ; e)



**Giải**

a) Đặt . Phương trình trở thành :



Vậy số phức cần tìm là .



b) Đặt



Phương trình trở thành:



Với thay vào (\*) ta được:



Với thay vào (\*) ta được:



Vậy các số phức cần tìm là



c) Đặt Phương trình trở thành



Với , (1)



với , (1)



Vậy số phức cần tìm là: .



d) Giả sử . Khi đó:



* TH1: ta được



* TH2:



Vậy có 3 số phức thỏa mãn là:



e) Giả sử



Vậy phương trình cho có 5 nghiệm



**Cách 2:**



hoặc



Khi thì , do đó là một nghiệm của phương trình



Khi nên phương trình hay



Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm .



f) Gọi số phức . Điều kiện:



Ta có:



Giải hệ ta được: hoặc (loại)



Thử lại ta thấy thỏa mãn bài toán. Vậy số phức cần tìm là .



**Ví dụ 2.** Tìm số phức z thỏa mãn phương trình

a) ; b) ;



**Giải**

a) Đặt . Ta có phương trình



Gọi



Ta có



* Với



* Với



Vậy



b) Đặt



Khi đó:



Do đó



Nếu thì (vô lý). Do đó . Dẫn đến



Vậy số phức z cần tìm là:



c) Đặt . Ta có:



thay vào (\*)



, thay vào (\*) .



Vậy



**Ví dụ 3 .** Tìm phần thực và phần ảo của số phức thỏa mãn:



a) ; b) .



c) ; d) .



**Giải**

a) Ta có:



Vậy số phức z đã cho có phần thực là 2, phần ảo là .



b) Đặt .



Lúc đó:



Vậy phần thực của là , phần ảo là .



c) Đặt , ta có:



Vậy số phức z cần tìm có phần thực bằng 7 và phần ảo bằng 17.

Phần thực của số phức cần tìm là , phần ảo là 1.



d) Đặt . Từ giả thiết ta có:



Vậy số phức z có phần thực bằng 1, phần ảo bằng .



**Ví dụ 3.** a) Cho số phức z thỏa mãn . Tìm phần thực và phần ảo của số phức .



b) Tìm phần thực và phần ảo của số phức , biết rằng .



**Giải**

a) Giả sử . Từ giả thiết suy ra



.



Do đó .



b) Gọi .



Ta có



Do đó .



Vậy phần thực là -4, phần ảo là 3.

**Ví dụ 4.** a)Tìm số phức z thỏa mãn và là số thuẩn ảo.



b) Tìm số phức z thỏa mãn và z là số ảo.



c) Tìm số phức z thỏa mãn và phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo.



d) Cho số phức z thỏa mãn là số thực và



e) Tìm số phức z biết và là số thuần ảo.



**Giải**

a) Đặt .



Ta có:



Mặt khác: là số thuần ảo nên



Ta có hệ:



Vậy các số phức cần tìm là:



b) Đặt .



Ta có:



Mặt khác: là số ảo nên .



Thay vào (\*) ta được



Vậy các số phức cần tìm là:



c) Đặt . Ta có:



Mặt khác: Số phức có phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo nên thay vào phương trình (\*) ta được:



Vậy số phức cần tìm là: .



d) Gọi



Ta có



là số thực



ta có



(thỏa mãn)



Vậy có hai số phức z thỏa mãn là



e) Đặt và , khi đó ta có:



Số phức này là số ảo, do đó ta có:



.



Thay vào (\*) ta có .



**Ví dụ 5.** a) Tìm số phức z thỏa mãn và



b) Tìm số phức z thỏa mãn: và .



c) Tìm số phức z biết: và



d) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời: và



e) Tìm số phức z thỏa mãn và .



f) Tìm số phức z thỏa mãn và .



**Giải**

a) Gọi z = a + bi ,



Ta có:



Từ giả thiết ta có:



và



Giải hệ (1) và (2) ta được



Vậy các số phức cần tìm là: hoặc



b) Gọi , ta có:



Từ (1) và (2) tìm được .



Vậy các số phức cần tìm là và .



c) Ta có:



Đặt



Dẫn đến:



Kết hợp với giả thiết ban đầu:



Nên kết hợp lại ta được số phức:



d) Gọi . Từ bài toán suy ra:



.



Vậy



e) Đặt , ta có:



Mặt khác



Thay (2) vào (1) được . Kết hợp với (1) có



Vậy có hai số phức thỏa mãn bài toán là và .



f) Gọi



Ta có



Từ (1) và (2) ta có hệ



Vậy .



**Ví dụ 6.** a) Cho số phức z thỏa mãn phương trình . Tính mô-đun của z.



b) Tìm mô-đun của số phức z biết .



c) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức . Tính mô-đun của số phức z.



d) Tìm mô-đun của số phức z, biết rằng



e)Cho hai số phức thỏa các điều kiện sau: và Hãy tính



**Giải**

a) Ta có:



Gọi



b) Đặt . Khi đó theo giả thiết ta có:



c) Đặt



Vậy .



d) Gọi . Ta có:



Vậy



**Cách 1.**



Ta có:



Vậy



**Cách 2.** Đặt



Ta có



Lúc đó:



Do đó:



**Ví dụ 7.** a) Tìm số phức z thỏa mãn: .



b) Tìm số phức z thỏa mãn .



c) Tìm số phức z thỏa mãn



d) Tìm số phức z thỏa mãn .



e) Tìm số phức z thỏa mãn .



**Giải**

a) Ta có:



* Giải (1): Đặt . Phương trình (1) trở thành:



Với thay vào (\*) ta được: (vô nghiệm)



Với thay vào (\*) ta được:



Vậy



* Giải (2): Đặt . Phương trình (2) trở thành:



Với thay vào (\*\*) ta được:



Vậy ta được



Với thay vào (\*\*) ta được:



Vậy ta được



b) Điều kiện: .



Giả sử . Khi đó trở thành:



Nếu thì , thỏa mãn điều kiện.



Nếu thì , khi đó không thỏa mãn điều kiện.



Vậy số phức cần tìm là .



c) Đặt với ). Ta có



+) Với tac có thỏa mãn (1). Suy ra



+) Với tac có không thỏa mãn (1), loại



d) Đặt với . Khi đó



Vậy hoặc



e) Ta có



**(1).**



+) Gỉa sử .



Lúc đó: **(1)**



Vậy số phức cần tìm là **.**



**Ví dụ 8.** a) Tính môđun của số phức z biết và z có phần thực dương.



b) Tìm số phức z có phần ảo bằng 164 và thỏa : .



c) Tìm số phức z thỏa mãn hai điều kiện: và là một số thuần ảo.



d) Tìm số phức z thỏa mãn: là số thực và .



**Giải**

a) Giả sử



Thế vào phương trình thứ hai ta được:



Suy ra môđun của số phức z là:



b) Gọi



Theo giả thiết, ta có



c) Giả sử . Theo bài ra ta có:



Số phức .



w là một số ảo



Vậy



d) Giả sử



Khi đó:



Từ (1) và (2) ta được hoặc



Vậy



**Ví dụ 9.**  a) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện . Tìm số phức z có mođun nhỏ nhất.



b) Tìm số phức z thỏa mãn là số thực và đạt giá trị nhỏ nhất.



c) Trong các số phức z thỏa mãn , tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.



d)Trong các số phức z thỏa mãn , tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.



**Giải**

a) Đặt . Khi đó



Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức đã cho nằm trên đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính



Ta có: khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn và gần O nhất.



Đó là điểm (Bạn đọc tự vẽ hình).



Ta có: Kẻ



Theo định lý talet ta có:



Vậy



b) Giả sử . Khi đó:



Để là số thực thì hay . Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn là số thực là đường thẳng có phương trình .



Để nhỏ nhất thì M phải là hình chiếu của lên .



Từ đó tìm được nên .



c) Áp dụng công thức:



Ta có:



. Giải bất phương trình ta có



Vậy đạt được khi



d) Giả sử . Khi đó:



và



Vậy thỏa mãn đề bài.



## II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm số phức z thỏa mãn đẳng thức: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1.**

Giả sử



Ta có



. Vậy . **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 2.** Số số phức z thỏa mãn đẳng thức: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Hướng dẫn giải**

Đặt , suy ra



.



Thay vào phương trình đã cho ta có



Vậy .**Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 3.**  **Số** số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Hướng dẫn giải**

Gọi . Ta có



Vậy hoặc . **Vậy chọn đáp án C**



**Câu 4.** Biết là hai số phức thỏa điều kiện: . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Có hai số phức cần tìm



Suy ra: . **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 5.** Tìm số phức z thỏa mãn



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có:



Với , ta có , thỏa mãn (1). Suy ra .



Với , ta có , không thỏa mãn (1).



Vậy .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 6.** Biết là số phức thỏa mãn: . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi , ta được:



Vậy . Suy ra .



**Câu 7.** Biết là số phức thỏa mãn: thỏa mãn phương trình . Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện . Gọi . Phương trình đã cho tương đương với:



Vậy hoặc . Suy ra:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 8.** Tìm mô đun số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Giả sử



Vậy số phức cần tìm là . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 9**. Tìm số phức z thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Ta có



Phương trình trở thành :



Vậy z cần tìm là: **Vậy chọn đáp án D.**



**Câu 10**. Tìm môđun số phức z thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình trở thành :



Vậy z cần tìm là **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 11**. Tìm Số số phức thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi ta có:



Kết luận . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 11**. Biết là số phức thỏa điều kiện: Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi , khi đó (\*) trở thành:



Vậy . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 12 .** Tìm số phức z thỏa điều kiện



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Phương trình đã cho trở thành:



Vậy **Vậy** chọn đáp án C.



**Câu 13.** Biết là các số phưc thỏa mãn điều kiện . Tìm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Phương trình đã cho trở thành:



Với thay vào phương trình (\*) ta được:



Với thay vào phương trình (\*) ta được:



Vậy Suy ra: . **Vậy chọn đáp án D.**



**Câu 13.** Tìm số số phức thỏa mãn điều kiện .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình



Từ (2) hoặc



* Với



Suy ra hoặc hoặc



* Với



Suy ra



Vậy phương trình hoặc hoặc



**Vậy chọn đáp án B.**

**Cách khác:** Ta giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

Phương trình (1)



hoặc



* Với



* Với phương trình (1)



Thử lại: Ta thế các giá trị của z vừa tìm được vào phương trình (1).

Với ta có phương trình (1) được nghiệm đúng.



Với ta có và



Vậy phương trình được nghiệm đúng.



Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là:



**Câu 14.** Biết là số phức thỏa điều kiện . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình trở thành:



Vậy số phức z cần tìm là: . Suy ra .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 15.** Biết là các số phức thỏa điều kiện. Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình trở thành

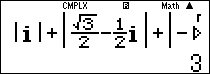


Vậy số phức z cần tìm là: .



Suy ra .



****

**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 17.** Biết là số phức thỏa điều kiện . Tìm số phức có phần ảo âm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt Phương trình



Từ



* Với Suy ra Vậy



* Với



* + Với



* Với



* + Với



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 18.** Biết là số phức thỏa điều kiện Tìm số phức có phần thực dương



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình



* Với



Suy ra



* Với



(vô nghiệm)



Vậy số phức z cần tìm là:

và



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 19.** Tìm số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt .



Ta có :



Như vậy phương trình đã cho trở thành :



Vậy phương trình có 1 nghiệm



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 20.** Tìm số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Suy ra:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 21\*. Số** số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Xét là nghiệm của phương trình



Xét . Đặt , từ giả thiết ta có:



Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta có



Thế (3) vào(1), ta được: (do )



Vậy ta có hai số phức cần tìm là



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 22.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử với và a, b không đồng thời bằng 0.



Khi đó



Khi đó phương trình



. Lấy (1) chia (2) theo vế ta có , thế vào (1) ta có



Với (loại)



Với . Ta có số phức . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 23.** Tìm số phức z biết .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Theo đề cho ta suy ra:



Số phức cần tìm là . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 24.** Tính mô- đun của số phức biết (i là đơn vị ảo).



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt , ta có



. Vậy mô-đun của số phức bằng .



**Câu 25.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức . Tính mô-đun của z.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử . Ta có:



Vậy . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 26.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện . Tính mô-đun của z.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

cĐặt . Khi đó:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 27.** **Số** số phức z thỏa và là số thực là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Theo giả thiết ta có:



Vậy .



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 28.** Tìm nghịch đảo của số phức z, biết thỏa mãn và là số thuần ảo.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử thì



Với hoặc , ta có:



Vì là số thuần ảo nên



Kết hợp ta có . Vậy số phức đó là .



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 29.** Tìm mo đun số phức z thỏa mãn và là số thực.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử .



Suy ra .



Từ giả thiết là số thực nên ta có .



Khi đó



Vậy số phức cần tìm là và . Từ đây suy ra .



Vậy chọn đáp án

**Câu 30.** Tính mô-đun của số phức z, biết và z có phần thực dương.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử



Do . Thế vào (2) ta được:



Giải phương trình (3) ta được . Do nên .



Vậy . Vậy chọn đáp án D.



**Câu 31.**  Tìm z thỏa mãn điều kiện :



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Vậy nghiệm của phương trình là: **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 32.** Tìm số số phức z thỏa mãn: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 5 | **B.** 3 | **C.** 4 | **D.** 2 |

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: *Nếu làm bằng cách gọi* , thay vào và tính toán vế trái, rồi đồng nhất phần thực và phần ảo của 2 vế sẽ rất dài và dẫn tới hệ đẳng cấp bậc 4 rất cồng kềnh. Áp dụng cách tính căn bậc hai bằng máy tính cầm tay , ta có cách giải ngắn gọn:



Đặt . Phương trình đã cho trở thành:



Lần lượt tay vừa tìm được vào công thức (\*), ta tìm được:



. **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 33.** Biết là các số phức thỏa mãn và là số thuần ảo. Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 51 | **B.** 30 | **C.** 41 | **D.** 22 |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Do đó



Như thế

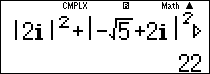


Để là số thuần ảo thì



Vậy có ba số phức thỏa mãn yêu cầu đề toán là và





**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 34.** Tìm số phức z thỏa mãn: và là số thuần ảo.



|  |  |
| --- | --- |
| **A. ,** | **B. ,** |
| **B. ,** | **D. ,, ,** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Với hoặc



Với hoặc



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 35.** Tìm số phức z có phần ảo âm, biết và số phức có phần ảo bằng 1.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Ta có



Vì ;



có phần ảo bằng 1 nên



Thay (2) vào (1) ta được:



Với



Với



Vậy có hai số phức là và .



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 36.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn và là số thực.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 5 | **B.** 3 | **C.** 4 | **D.** 2 |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Có



w là số thực



Từ (2) có , thay vào (1) được phương trình:



Thay vào (\*) tìm được y tương ứng từ đó tìm được các số phức: ; ; .



**Câu 37.** Tìm môđun số phức z biết là một số thuần ảo và



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó:



u là số thuần ảo khi và chỉ khi:



Ta có:



Từ (1) và (2) ta có: . Vậy chọn đáp án B.



**Câu 39.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện , tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi  ; Gọi là điểm biểu diễn số phức .



Ta có :



Đường tròn có tâm I(1;2). Đường thẳng *OI* có phương trình



Số phức *z* thỏa mãn điều kiện và có môdun nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm biểu diễn số phức đó thuộc đường tròn (*C*) và gần gốc tọa độ *O* nhất, điểm đó chỉ là một trong hai giao điểm của đường thẳng *OI* với (*C*), khi đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ

hoặc



Chọn nên số phức



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 40.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử . Từ giả thiết:



Tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm bán kính .



Gọi M là điểm biểu diễn của z, ta có:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 41.** Cho số phức z thỏa mãn là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử .



Từ giả thiết:



Ta có



Tập hợp biểu diễn của z là đường thẳng . Gọi M là điểm biểu diễn của z.



Tìm được . Suy ra: . **Vậy chọn đáp án B.**



# CHỦ ĐỀ 5. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Phương pháp**

* Tìm số phức thật ra là tìm phần thực x và phần ảo y của nó.



* Chú ý rằng: , khi là số thực



* ,



* . Khi đó:



* . Khi đó là số ảo (thuần ảo) khi , là số thực khi .



* Trong trường hợp tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất ta làm như sau:
* *Bước 1:* Tìm tập hợp điểm các điểm biểu diễn của *z* thỏa mãn điều kiện.



* *Bước 2:* Tìm số phức *z* tương ứng với điểm biểu diễn sao cho khoảng cách *OM* có giá trị lớn nhất ( hoặc nhỏ nhất )



## I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Tìm số phức z thỏa mãn



d) ; e)



**Giải**

a) Đặt . Phương trình trở thành :



Vậy số phức cần tìm là .



b) Đặt



Phương trình trở thành:



Với thay vào (\*) ta được:



Với thay vào (\*) ta được:



Vậy các số phức cần tìm là



c) Đặt Phương trình trở thành



Với , (1)



với , (1)



Vậy số phức cần tìm là: .



d) Giả sử . Khi đó:



* TH1: ta được



* TH2:



Vậy có 3 số phức thỏa mãn là:



e) Giả sử



Vậy phương trình cho có 5 nghiệm



**Cách 2:**



hoặc



Khi thì , do đó là một nghiệm của phương trình



Khi nên phương trình hay



Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm .



f) Gọi số phức . Điều kiện:



Ta có:



Giải hệ ta được: hoặc (loại)



Thử lại ta thấy thỏa mãn bài toán. Vậy số phức cần tìm là .



**Ví dụ 2.** Tìm số phức z thỏa mãn phương trình

a) ; b) ;



**Giải**

a) Đặt . Ta có phương trình



Gọi



Ta có



* Với



* Với



Vậy



b) Đặt



Khi đó:



Do đó



Nếu thì (vô lý). Do đó . Dẫn đến



Vậy số phức z cần tìm là:



c) Đặt . Ta có:



thay vào (\*)



, thay vào (\*) .



Vậy



**Ví dụ 3 .** Tìm phần thực và phần ảo của số phức thỏa mãn:



a) ; b) .



c) ; d) .



**Giải**

a) Ta có:



Vậy số phức z đã cho có phần thực là 2, phần ảo là .



b) Đặt .



Lúc đó:



Vậy phần thực của là , phần ảo là .



c) Đặt , ta có:



Vậy số phức z cần tìm có phần thực bằng 7 và phần ảo bằng 17.

Phần thực của số phức cần tìm là , phần ảo là 1.



d) Đặt . Từ giả thiết ta có:



Vậy số phức z có phần thực bằng 1, phần ảo bằng .



**Ví dụ 3.** a) Cho số phức z thỏa mãn . Tìm phần thực và phần ảo của số phức .



b) Tìm phần thực và phần ảo của số phức , biết rằng .



**Giải**

a) Giả sử . Từ giả thiết suy ra



.



Do đó .



b) Gọi .



Ta có



Do đó .



Vậy phần thực là -4, phần ảo là 3.

**Ví dụ 4.** a)Tìm số phức z thỏa mãn và là số thuẩn ảo.



b) Tìm số phức z thỏa mãn và z là số ảo.



c) Tìm số phức z thỏa mãn và phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo.



d) Cho số phức z thỏa mãn là số thực và



e) Tìm số phức z biết và là số thuần ảo.



**Giải**

a) Đặt .



Ta có:



Mặt khác: là số thuần ảo nên



Ta có hệ:



Vậy các số phức cần tìm là:



b) Đặt .



Ta có:



Mặt khác: là số ảo nên .



Thay vào (\*) ta được



Vậy các số phức cần tìm là:



c) Đặt . Ta có:



Mặt khác: Số phức có phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo nên thay vào phương trình (\*) ta được:



Vậy số phức cần tìm là: .



d) Gọi



Ta có



là số thực



ta có



(thỏa mãn)



Vậy có hai số phức z thỏa mãn là



e) Đặt và , khi đó ta có:



Số phức này là số ảo, do đó ta có:



.



Thay vào (\*) ta có .



**Ví dụ 5.** a) Tìm số phức z thỏa mãn và



b) Tìm số phức z thỏa mãn: và .



c) Tìm số phức z biết: và



d) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời: và



e) Tìm số phức z thỏa mãn và .



f) Tìm số phức z thỏa mãn và .



**Giải**

a) Gọi z = a + bi ,



Ta có:



Từ giả thiết ta có:



và



Giải hệ (1) và (2) ta được



Vậy các số phức cần tìm là: hoặc



b) Gọi , ta có:



Từ (1) và (2) tìm được .



Vậy các số phức cần tìm là và .



c) Ta có:



Đặt



Dẫn đến:



Kết hợp với giả thiết ban đầu:



Nên kết hợp lại ta được số phức:



d) Gọi . Từ bài toán suy ra:



.



Vậy



e) Đặt , ta có:



Mặt khác



Thay (2) vào (1) được . Kết hợp với (1) có



Vậy có hai số phức thỏa mãn bài toán là và .



f) Gọi



Ta có



Từ (1) và (2) ta có hệ



Vậy .



**Ví dụ 6.** a) Cho số phức z thỏa mãn phương trình . Tính mô-đun của z.



b) Tìm mô-đun của số phức z biết .



c) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức . Tính mô-đun của số phức z.



d) Tìm mô-đun của số phức z, biết rằng



e)Cho hai số phức thỏa các điều kiện sau: và Hãy tính



**Giải**

a) Ta có:



Gọi



b) Đặt . Khi đó theo giả thiết ta có:



c) Đặt



Vậy .



d) Gọi . Ta có:



Vậy



**Cách 1.**



Ta có:



Vậy



**Cách 2.** Đặt



Ta có



Lúc đó:



Do đó:



**Ví dụ 7.** a) Tìm số phức z thỏa mãn: .



b) Tìm số phức z thỏa mãn .



c) Tìm số phức z thỏa mãn



d) Tìm số phức z thỏa mãn .



e) Tìm số phức z thỏa mãn .



**Giải**

a) Ta có:



* Giải (1): Đặt . Phương trình (1) trở thành:



Với thay vào (\*) ta được: (vô nghiệm)



Với thay vào (\*) ta được:



Vậy



* Giải (2): Đặt . Phương trình (2) trở thành:



Với thay vào (\*\*) ta được:



Vậy ta được



Với thay vào (\*\*) ta được:



Vậy ta được



b) Điều kiện: .



Giả sử . Khi đó trở thành:



Nếu thì , thỏa mãn điều kiện.



Nếu thì , khi đó không thỏa mãn điều kiện.



Vậy số phức cần tìm là .



c) Đặt với ). Ta có



+) Với tac có thỏa mãn (1). Suy ra



+) Với tac có không thỏa mãn (1), loại



d) Đặt với . Khi đó



Vậy hoặc



e) Ta có



**(1).**



+) Gỉa sử .



Lúc đó: **(1)**



Vậy số phức cần tìm là **.**



**Ví dụ 8.** a) Tính môđun của số phức z biết và z có phần thực dương.



b) Tìm số phức z có phần ảo bằng 164 và thỏa : .



c) Tìm số phức z thỏa mãn hai điều kiện: và là một số thuần ảo.



d) Tìm số phức z thỏa mãn: là số thực và .



**Giải**

a) Giả sử



Thế vào phương trình thứ hai ta được:



Suy ra môđun của số phức z là:



b) Gọi



Theo giả thiết, ta có



c) Giả sử . Theo bài ra ta có:



Số phức .



w là một số ảo



Vậy



d) Giả sử



Khi đó:



Từ (1) và (2) ta được hoặc



Vậy



**Ví dụ 9.**  a) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện . Tìm số phức z có mođun nhỏ nhất.



b) Tìm số phức z thỏa mãn là số thực và đạt giá trị nhỏ nhất.



c) Trong các số phức z thỏa mãn , tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.



d)Trong các số phức z thỏa mãn , tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.



**Giải**

a) Đặt . Khi đó



Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức đã cho nằm trên đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính



Ta có: khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn và gần O nhất.



Đó là điểm (Bạn đọc tự vẽ hình).



Ta có: Kẻ



Theo định lý talet ta có:



Vậy



b) Giả sử . Khi đó:



Để là số thực thì hay . Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn là số thực là đường thẳng có phương trình .



Để nhỏ nhất thì M phải là hình chiếu của lên .



Từ đó tìm được nên .



c) Áp dụng công thức:



Ta có:



. Giải bất phương trình ta có



Vậy đạt được khi



d) Giả sử . Khi đó:



và



Vậy thỏa mãn đề bài.



## II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm số phức z thỏa mãn đẳng thức: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1.**

Giả sử



Ta có



. Vậy . **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 2.** Số số phức z thỏa mãn đẳng thức: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Hướng dẫn giải**

Đặt , suy ra



.



Thay vào phương trình đã cho ta có



Vậy .**Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 3.**  **Số** số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Hướng dẫn giải**

Gọi . Ta có



Vậy hoặc . **Vậy chọn đáp án C**



**Câu 4.** Biết là hai số phức thỏa điều kiện: . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Có hai số phức cần tìm



Suy ra: . **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 5.** Tìm số phức z thỏa mãn



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có:



Với , ta có , thỏa mãn (1). Suy ra .



Với , ta có , không thỏa mãn (1).



Vậy .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 6.** Biết là số phức thỏa mãn: . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi , ta được:



Vậy . Suy ra .



**Câu 7.** Biết là số phức thỏa mãn: thỏa mãn phương trình . Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện . Gọi . Phương trình đã cho tương đương với:



Vậy hoặc . Suy ra:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 8.** Tìm mô đun số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Giả sử



Vậy số phức cần tìm là . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 9**. Tìm số phức z thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Ta có



Phương trình trở thành :



Vậy z cần tìm là: **Vậy chọn đáp án D.**



**Câu 10**. Tìm môđun số phức z thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình trở thành :



Vậy z cần tìm là **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 11**. Tìm Số số phức thỏa điều kiện:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi ta có:



Kết luận . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 11**. Biết là số phức thỏa điều kiện: Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi , khi đó (\*) trở thành:



Vậy . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 12 .** Tìm số phức z thỏa điều kiện



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Phương trình đã cho trở thành:



Vậy **Vậy** chọn đáp án C.



**Câu 13.** Biết là các số phưc thỏa mãn điều kiện . Tìm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Phương trình đã cho trở thành:



Với thay vào phương trình (\*) ta được:



Với thay vào phương trình (\*) ta được:



Vậy Suy ra: . **Vậy chọn đáp án D.**



**Câu 13.** Tìm số số phức thỏa mãn điều kiện .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình



Từ (2) hoặc



* Với



Suy ra hoặc hoặc



* Với



Suy ra



Vậy phương trình hoặc hoặc



**Vậy chọn đáp án B.**

**Cách khác:** Ta giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

Phương trình (1)



hoặc



* Với



* Với phương trình (1)



Thử lại: Ta thế các giá trị của z vừa tìm được vào phương trình (1).

Với ta có phương trình (1) được nghiệm đúng.



Với ta có và



Vậy phương trình được nghiệm đúng.



Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là:



**Câu 14.** Biết là số phức thỏa điều kiện . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình trở thành:



Vậy số phức z cần tìm là: . Suy ra .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 15.** Biết là các số phức thỏa điều kiện. Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình trở thành

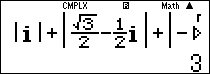


Vậy số phức z cần tìm là: .



Suy ra .



****

**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 17.** Biết là số phức thỏa điều kiện . Tìm số phức có phần ảo âm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt Phương trình



Từ



* Với Suy ra Vậy



* Với



* + Với



* Với



* + Với



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 18.** Biết là số phức thỏa điều kiện Tìm số phức có phần thực dương



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Phương trình



* Với



Suy ra



* Với



(vô nghiệm)



Vậy số phức z cần tìm là:

và



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 19.** Tìm số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt .



Ta có :



Như vậy phương trình đã cho trở thành :



Vậy phương trình có 1 nghiệm



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 20.** Tìm số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Suy ra:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 21\*. Số** số phức z thỏa mãn .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Xét là nghiệm của phương trình



Xét . Đặt , từ giả thiết ta có:



Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta có



Thế (3) vào(1), ta được: (do )



Vậy ta có hai số phức cần tìm là



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 22.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử với và a, b không đồng thời bằng 0.



Khi đó



Khi đó phương trình



. Lấy (1) chia (2) theo vế ta có , thế vào (1) ta có



Với (loại)



Với . Ta có số phức . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 23.** Tìm số phức z biết .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Theo đề cho ta suy ra:



Số phức cần tìm là . **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 24.** Tính mô- đun của số phức biết (i là đơn vị ảo).



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt , ta có



. Vậy mô-đun của số phức bằng .



**Câu 25.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức . Tính mô-đun của z.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử . Ta có:



Vậy . **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 26.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện . Tính mô-đun của z.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

cĐặt . Khi đó:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 27.** **Số** số phức z thỏa và là số thực là:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Theo giả thiết ta có:



Vậy .



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 28.** Tìm nghịch đảo của số phức z, biết thỏa mãn và là số thuần ảo.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử thì



Với hoặc , ta có:



Vì là số thuần ảo nên



Kết hợp ta có . Vậy số phức đó là .



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 29.** Tìm mo đun số phức z thỏa mãn và là số thực.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử .



Suy ra .



Từ giả thiết là số thực nên ta có .



Khi đó



Vậy số phức cần tìm là và . Từ đây suy ra .



Vậy chọn đáp án

**Câu 30.** Tính mô-đun của số phức z, biết và z có phần thực dương.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử



Do . Thế vào (2) ta được:



Giải phương trình (3) ta được . Do nên .



Vậy . Vậy chọn đáp án D.



**Câu 31.**  Tìm z thỏa mãn điều kiện :



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



Vậy nghiệm của phương trình là: **Vậy chọn đáp án A.**



**Câu 32.** Tìm số số phức z thỏa mãn: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 5 | **B.** 3 | **C.** 4 | **D.** 2 |

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: *Nếu làm bằng cách gọi* , thay vào và tính toán vế trái, rồi đồng nhất phần thực và phần ảo của 2 vế sẽ rất dài và dẫn tới hệ đẳng cấp bậc 4 rất cồng kềnh. Áp dụng cách tính căn bậc hai bằng máy tính cầm tay , ta có cách giải ngắn gọn:



Đặt . Phương trình đã cho trở thành:



Lần lượt tay vừa tìm được vào công thức (\*), ta tìm được:



. **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 33.** Biết là các số phức thỏa mãn và là số thuần ảo. Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 51 | **B.** 30 | **C.** 41 | **D.** 22 |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Do đó



Như thế

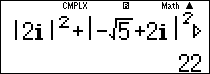


Để là số thuần ảo thì



Vậy có ba số phức thỏa mãn yêu cầu đề toán là và





**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 34.** Tìm số phức z thỏa mãn: và là số thuần ảo.



|  |  |
| --- | --- |
| **A. ,** | **B. ,** |
| **B. ,** | **D. ,, ,** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Với hoặc



Với hoặc



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 35.** Tìm số phức z có phần ảo âm, biết và số phức có phần ảo bằng 1.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt



Ta có



Vì ;



có phần ảo bằng 1 nên



Thay (2) vào (1) ta được:



Với



Với



Vậy có hai số phức là và .



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 36.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn và là số thực.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 5 | **B.** 3 | **C.** 4 | **D.** 2 |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Có



w là số thực



Từ (2) có , thay vào (1) được phương trình:



Thay vào (\*) tìm được y tương ứng từ đó tìm được các số phức: ; ; .



**Câu 37.** Tìm môđun số phức z biết là một số thuần ảo và



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó:



u là số thuần ảo khi và chỉ khi:



Ta có:



Từ (1) và (2) ta có: . Vậy chọn đáp án B.



**Câu 39.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện , tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi  ; Gọi là điểm biểu diễn số phức .



Ta có :



Đường tròn có tâm I(1;2). Đường thẳng *OI* có phương trình



Số phức *z* thỏa mãn điều kiện và có môdun nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm biểu diễn số phức đó thuộc đường tròn (*C*) và gần gốc tọa độ *O* nhất, điểm đó chỉ là một trong hai giao điểm của đường thẳng *OI* với (*C*), khi đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ

hoặc



Chọn nên số phức



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 40.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử . Từ giả thiết:



Tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm bán kính .



Gọi M là điểm biểu diễn của z, ta có:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 41.** Cho số phức z thỏa mãn là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử .



Từ giả thiết:



Ta có



Tập hợp biểu diễn của z là đường thẳng . Gọi M là điểm biểu diễn của z.



Tìm được . Suy ra: . **Vậy chọn đáp án B.**



# CHỦ ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

## BÀI TOÁN 1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT SỐ PHỨC

**I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG**

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau đây với ẩn z:

a) b)



**Giải**

a) Ta có:



Vậy số phức z cần tìm là:



b) Ta có:



Vậy số phức z cần tìm là:



**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau đây với ẩn z:

a) b)



**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



**Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau đây với ẩn z:



**Giải**

a) Ta có



b) Ta có



**Ví dụ 4.** Giải phương trình sau:



**Giải**

Ta có:



Vậy nghiệm của phương trình là:



**Ví dụ 5.** a) Cho số phức z thỏa mãn . Tính mô-đun của số phức .



b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện . Tìm mô-đun của số phức .



**Giải**

a) Đặt . Theo đề ra ta có: nên .



Khi đó .



Vậy .



b) Ta có:

.



Khi đó:



b) Ta có:

.



Từ đó . Suy ra .



**Ví dụ 6.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức . Tính mô-đun của z.



**Giải**

**Cách 1.** Đặt , khi đó . Theo bài ra ta có:



**Cách 2.** Ta có:



Suy ra:



II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Giải phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 2.** Giải phương trình .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy **Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 2.** Giải phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 3.** Tìm nghiệm của phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .



Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành:



Vậy z cần tìm là: .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 4.** Tìm nghiệm của phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện:



Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 5.** Tìm nghiệm của phương trình: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Giải (1):



Giải (2):



Vậy phương trình có 2 nghiệm là và .



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 6.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: Ta có: .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 7.** Tìm nghiệm của phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 8.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện . Tính mô-đun của số phức .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Nên .. Vậy .



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 9.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện . Tính mô-đun của z.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy chọn đáp án C.

## BÀI TOÁN 2. CĂN BẬC HAI SỐ PHỨC, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

**Phương pháp**

**1. Ta nhắc lại căn bậc hai của số phức**

**Định nghĩa:** Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn được gọi là một căn bậc hai của w.Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình



a) Trường hợp w là số thực

* Căn bậc hai của 0 là 0.
* Xét số thực



Khi , ta có



Phương trình hoặc



Vậy số thực a dương có hai căc bậc hai là và



Khi , ta có



Phương trình hoặc



Vậy số thực a âm có hai căn bậc hai là và



Ví dụ: -1 có hai căn bậc hai là i và –i.



có hai căn bậc hai là ai và –ai.



b) Trường hợp



Đặt ,



z là căn bậc hai của w



Giải hệ phương trình này, ta luôn tính được hai nghiệm



Mỗi nghiệm (x;y) của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai của số phức



**Kĩ thuật MTCT tìm căn bậc hai của số phức**

Giả sử ta cần tìm căn bậc hai số phức



* Bước 1: Nhập vào màn hình và ấn phím {lưu lại số phức}



* Bước 2: Nhập vào màn hình rồi ấn phím



* Bước 3: Ấn phím nếu màn hình không hiển thị đầy đủ. Lúc này máy sẽ hiển thị số phức dạng



* Bước 4: Kết luận căn bậc hai cần tìm là



**Ví dụ:** Tìm căn bậc hai của số phức



**Hướng dẫn thực hành**

|  |  |
| --- | --- |
| * ***Bước 1:*** Nhập vào màn hình và ấn phím |  |
| * ***Bước 2:*** Nhập vào màn hình rồi ấn phím ta được kết quả là |  |
| * ***Bước 3:*** Bỏ qua vì màn hình đã hiển thị |  |
| * ***Bước 4:*** Kết luận căn bậc hai cần tìm là |

**2. Phương trình bậc hai**

Xét phương trình: (A,B,C là số phức ) (1)



Ta có



* Nếu có 2 căn bậc hai là và , phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là: và



* Nếu phương trình (1) có nghiệm kép



**Chú ý:**

* Ta chứng minh được với mọi phương trình bậc hai hệ số thực, nếu và là một nghiệm thì cũng là nghiệm của phương trình đó.



* Do tính chất của phép nhân số phức, định lí Vi-et vẫn đúng cho phương trình bậc hai với ẩn Do đó các cách tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai vẫn áp dụng được.



Chẳng hạn:

;



**KĨ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ PHỨC**

* Bước 1: Ghi vào màn hình



* Bước 2: Ấn CALC và khai báo các hệ số

**Ví dụ:** Giải phương trình



Dùng MTCT

Vậy hai nghiệm của phương trình là:



**I. MỘT SỐ VÍ SỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG**

**Ví dụ 1.** Tìm căn bậc hai của số phức



**Giải**

a) Gọi z là căn bậc hai của , ta có:



hoặc



Vây -9 có hai căn bậc hai là 3i và -3i.

b) Gọi là căn bậc hai của 3+4i, ta có:



Từ (2) và thay vào (1) ta được:



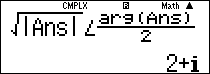
Với



Vậy có hai căn bậc hai là và



**Dùng MTCT**



Vậy có hai căn bậc hai là và



c) Gọi , là căn bậc hai của



Lúc đó:



Từ (2) và thay vào phương trình (1) ta được



Với



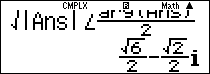
Với



Vậy có hai căn bậc hai của là và



**Dùng MTCT**



Vậy có hai căn bậc hai của là và



d) Gọi là căn bậc hai của



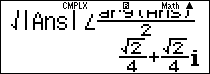
Ta có:



Vậy có hai căn bậc hai là và



Dùng MTCT



Vậy có hai căn bậc hai là và



**Nhận xét:** Mọi số phức đều có hai căn bậc hai đối nhau.

**Ví dụ 2**. a)Tìm số phức thỏa mãn:



b) Tìm số phức thỏa mãn:



**Giải**

a) Đặt , ta có:



Từ (2) và thay vào (1) ta được



Với



Với



Vậy có hai số phức z thỏa mãn là



b) Ta có và



Suy ra:



Theo kết quả trên ta có hoặc



Đặt



* Trường hợp 1: Với ta có



Từ (2) và thay vào (1) ta được



Với



Với



Vậy



* Trường hợp 2: Với ta có



Từ (2) và thay vào (1) ta được



Với



Với



Vậy



Kết luận: Có 4 số phức w thỏa mãn là:



,



**Ví dụ 3.** a) Tìm số phức z thỏa mãn



b) Tìm số phức z thỏa mãn



**Giải**

a) Ta có:



* Với ta đặt ta có:



Từ (2) và thay vào (1) ta được



* Với



* Với



Vậy



Kết luận:



b) Theo kết quả câu a ta có:



Xét 4 trường hợp:

* Trường hợp 1:



* Trường hợp 2:



* Trường hợp 3:



* Trường hợp 4:



Kết luận:

hoặc hoặc



hoặc .



**Ví dụ 4.** Giải các phương trình bậc hai sau đây:

a) b)



c) d)



**Giải**

a) Phương trình: có các hệ số nên phương trình có hai nghiệm là



b) Phương trình



(chú ý là )



c) Phương trình



d) Phương trình có:



Phương trình có hai nghiệm là



MTCT

**Ví dụ 5.** Giải các phương trình bậc hai hệ số phức sau đây:

a) b)



c) ; d)



**Giải**

a) Phương trình có:



Đặt



Ta có



Từ (2) và thay vào (1) ta được



Với ; Với Vậy

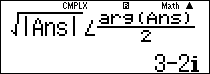


Phương trình có hai nghiệm là



**Lời bình:** Việc tìm căn bậc hai của số phức ta dùng MTCT cho nhanh





b) Phương trình có:



Phương trình có hai nghiệm là:



c) Phương trình có:



Đặt



Từ (2) và thay vào (1) ta được:



Với ; Với Vậy



Phương trình có nhiệm là:



d) Phương trình có các hệ số thỏa mãn



Suy ra phương trình có hai nghiệm là



**Ví dụ 6.** Giải phương trình sau trên tập số phức :

b)



**Giải**

a) Điều kiện



Phương trình cho tương đương với: hay



*Cách 1:* Phương trình này có biệt số



hoặc



*Cách 2:* Gọi là căn bậc hai của , khi đó hay suy ra



hoặc



b) Ta có:



Phương trình có hai nghiệm là: và



**Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau:



**Giải**

a) Phương trình đã cho trở thành



Với



Với



Vậy nghiệm của phương trình là:



b) **Cách 1.** Ta có:



Vậy nghiệm của phương trình là:



**Cách 2.** Đặt . Phương trình đã cho trở thành



.



Ta có:



Phương trình (\*) có hai nghiệm:



Với



Với



**Ví dụ 8.** a) Hãy giải phương trình sau trên tập hợp số phức .



b) Giải phương trình:



**Giải**

a) Viết lại phương trình về dạng:



Khai triển, rút gọn, nhân tử hóa



Giải các phương trình, thu được và rồi kết luận.



Đặt . Khi đó phương trình trở thành:



Vậy phương trình có các nghiệm:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm hoặc



**Ví dụ 9.** a) Gọi là hai nghiệm của của phương trình bậc hai hệ số phức



Chứng minh rằng: và



**Áp dụng 1:** Biết phương trình bậc hai có hai nghiệm là Tính B vá C.



b) Cho hai số phức có tổng và tích Chứng minh rằng và là hai nghiệm của phương trình bậc hai



**Áp dụng 2:** Tìm hai số phức có tổng bằng 4 và tích bằng



**Giải**

a) Phương trình có Gọi là một căn bậc hai của Phương trình có hai nghiệm là:



Ta có :



và



Áp dụng 1: có hai nghiệm là



Áp dụng kết quả trên ta có:



Từ (1)



Từ (2)



Vậy và



b) Hiển nhiên là hai nghiệm của phương trình bậc hai



Áp dụng 2: Gọi hai số phức phải tìm là và Theo giả thiết ta có



và



Do đó và là hai nghiệm của phương trình bậc hai hay



Phương trình trên tương đương với:



Vậy phương trình có hai nghiệm là



**Ví dụ 10.** Cho phương trình bậc hai hệ số thực (1), với



a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có một nghiệm thực thì nghiệm còn lại cũng là số thực.



b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có một nghiệm thực không là số thực thì cũng là một nghiệm.



**Áp dụng:** Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết phương trình có 1 nghiệm là .



**Giải**

a) Ta biết rằng phương trình bậc hai (1) có hai nghiệm là và Theo công thức Vi-et ta có



Vì nên và ta cũng có Vậy



b) Ta có là nghiệm của phương trình nên:



( Vì liên hiệp của số thực là chính số thực đó suy ra



Vậy cũng là nghiệm của phương trình .



Áp dụng: Theo chứng minh trên, phương trình bậc hai hệ số thực có 1 nghiệm là thì nghiệm kia là



Ta có và



Vậy là hai nghiệm của phương trình bâc hai: hay



**Ví dụ 11.** Biết là hai nghiệm của phương trình .



Hãy tính:



**Giải**

Theo định lý Vi-et ta có:



Do đó:



**Ví dụ 12.** Gọi là hai nghiệm phức của phương trình ; M, N lần lượt là các điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng MN.



**Giải**

Phương trình đã cho có nên có hai nghiệm .



Từ đó .



Đáp số: .



**Ví dụ 13.** a) Giải phương trình:



b) Tìm số phức B để phương trình bậc có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.



**Giải**

a) Ta có



Giải (1): Ta có



Giải (2):



Vậy nghiệm của phương trình là .



**Ví dụ 14.** a)Tìm để phương trình nhận số phức làm nghiệm.



b) Tìm tất cả các số thực a, b sao cho số phức là nghiệm của phương trình .



**Giải**

a) Theo đề, ta có:



b) Tính .



Suy ra



Từ đó, có hệ



**Ví dụ 15.** Tính mô-đun của số phức , biết số phức là nghiệm của phương trình .



**Giải**

Ta có:



Vì là nghiệm của phương trình nên:



Ta có



**Ví dụ 16.** Cho phương trình , với a là tham số. Tìm để (1) có hai nghiệm thỏa mãn là số ảo, trong đó là số phức có phần ảo dương.



**Giải**

Từ giả thiết suy ra không phải là số thực. Do đó , hay



Suy ra



Ta có là số ảo là số ảo



Đối chiếu với điều kiện (\*) ta có giá trị của a là .



**Ví dụ 17.** a)Tìm để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn .



b) Gọi là hai nghiệm phức phân biệt của phương trình Tìm số phức m sao cho .



c)Trên tập số phức, tìm m để phương trình bậc hai: có tổng bình phương hai nghiệm bằng .



**Giải**

a) là nghiệm của phương trình: nên nếu gọi



với



Giả thiết cho:



Mặt khác theo Viet ta có :

hoặc



b) Xét phương trình . Ta có



Phương trình có hai nghiệm phân biệt



Theo định lý Vi-ét, ta có



Mặt khác



c) Giả sử là nghiệm của phương trình đã cho và với .



Theo bài toán ta có: Suy ra dẫn tới hệ:



hoặc



**II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP RÈN LUYỆN KĨ NĂNG**

**Câu 1.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có: Phương trình đã cho có hai nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 2.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có: . Phương trình đã cho có hai nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 3.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là:



**Câu 4.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có: . Ta tìm căn bậc hai của



Ta có:



Từ đó, phương trình có hai nghiệm phức là:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 5.** Tìm nghiệm của phương trình.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Suy ra



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 6.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có là một căn bậc hai của



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm



**Câu 7.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 8.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 9.** Tìm nghiệm của phương trình.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 10.** Tìm nghiệm của phương trình: .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 10.** Tìm nghiệm của phương trình:.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** , |

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương với:



Ta có



Suy ra



và



vậy phương trình có hai nghiệm là và .



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 12.** Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z): nhận làm một nghiệm.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Theo đề, làm một nghiệm của phương trình:



Nên



Vậy,



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 13.** Cho z1, z2 là các nghiệm phức của phương trình : Tính giá trị của biểu thức .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình:



Lúc đó: .



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 14.** Gọi z1 và z2 lần lượt là nghiệm của phương trình: . Tính giá trị của biểu thức



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Phương trình có hai nghiệm là: và



và .



Vậy



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 15.** Gọi là hai nghiệm phức của phương trình . Tính giá trị của biểu thức .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có .



Do đó phương trình có hai nghiệm là .



.



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 16.** Gọi và là hai nghiệm phức của phương trình . Tính giá trị của biểu thức .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Phương trình đã cho có hai nghiệm là và .



Nếu thì



Nếu thì



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 17.** Gọi và là hai nghiệm phức của phương trình . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giải phương trình ta được



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 18.** Tìm nghiệm của phương trình :



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Giải (1):



Giải (2): có



Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:



**Câu 19.** Biết là nghiệm của phương trình



**19.1.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**19.2.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**19.3.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**19.4.** Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Theo định lý Vi-et ta có:



Do đó:



**Câu 20.** Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình . Tính độ dài đoạn thẳng .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình: có .



Phương trình có hai nghiệm .



.



Vậy .



**Câu 21.** Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn điều kiện . Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy chọn đáp án A

**Câu 22.** Gọi lần lượt là hai nghiệm của phương trình và thỏa mãn . Tìm giá trị của biểu thức



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương với:



Do nên ta có và



Ta có



**Câu 23**. Gọi lần lượt là hai nghiệm của phương trình . Tính giá trị của biểu thức



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Định hướng:** Ta sẽ tiến hành giải phương trình đầu tiên để tìm ra sau đó tiến hành lắp vào biểu thức cần tính ta có: . Đến đây vì mũ 10 lơn nên ta sẽ tiến hành làm từng lớp một, tức là:



**Từ đó ta có lời giải như sau:**

Phương trình đã cho tương đương với:



Do Q là biểu thức đối xứng với nên không mất tính tổng quát, giả sử



Lúc đó:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Lưu ý:** Cũng có thể dùng dạng lượng giác của số phức để giải quyết bài toán này.

**Câu 24.** Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn . Tính .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có hoặc



Với ta có



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 25.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Phương trình đã cho có hai nghiệm



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 26.** Tìm nghiệm của phương trình



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 31.** Biết phương trình không có nghiệm thực. Tìm những giá trị có thể có của



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Nếu phương trình có một nghiệm thực r thì:



Từ phương trình (2) ta có:

* Nếu thì từ (1) suy ra phương trình này không có nghiệm thực.



* Nếu thì từ (1) suy ra



Vậy phương trình đã cho không có nghiệm thực khi và chỉ khi



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 32.**Cho và là các số phức thỏa mãn Giả sử là các nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện với m là số phức.



**32.1.** Tìm giá trị lớn nhất của



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**32.2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

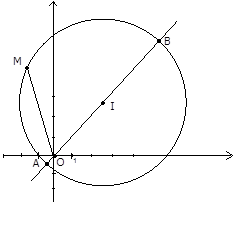
**Hướng dẫn giải**

Sử dụng định lý Viet ta có



Do đó:



Từ suy ra Do đó điểm M biểu diễn số phức m trên mặt phẳng phức thuộc đường tròn tâm I(4;5) và bán kính R=7. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của OM. Đường thẳng OI cắt đường tròn tại hai điểm A,B với Onằm giữa Avà I. Vì nên:



**32.1.** Giá trị lớn nhất của khi khi đó: **Vậy chọn đáp án A.**



**32.2.** Giá trị nhỏ nhất của khi khi đó:



**Vậy chọn đáp án B.**



**Câu 33.** Tìm mô-đun của số phức biết số phức là nghiệm của phương trình .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Do đó



Theo giả thiết ta có



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 34.** Cho a,b,c là 3 số phức phân biệt khác 0 và . Nếu một nghiệm của phương trình có môđun bằng 1 thì khẳng định nào sau đây đúng



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Giả sử là nghiệm của phương trình với . Theo định lý Viet ta có Suy ra



Bởi vì



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 35.** Tìm nghiệm của phương trình:.



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C. ,** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình đã cho trở thành



Với



Với



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 36.** Tìm nghiệm của phương trình:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Phương trình đã cho trở thành



Với



Với



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 37.** Tính giá trị của biết là nghiệm phức của phương trình .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Phương trình cho



Giải : ta có



Suy ra



Do đó:



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 38.** Gọi là bốn nghiệm của phương trình trên tập số phức, tính tổng: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Không mất tính tổng quát ta gọi 4 nghiệm của phương trình là:



Thay vào biểu thức



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 39.** Cho là các nghiệm của phương trình: . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**



**Vậy chọn đáp án C.**

## DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

**Phương Pháp**

Theo định lý cơ bản của đại số, phương trình bậc ba có đúng 3 nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

1. Để giải phương trình bậc ba tổng quát (1), ta cần biết một nghiệmcủa phương trình. Khi đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình tích



Muốn xác định ta có thể dùng một trong hai cách:



**Cách 1:** Ta thực hiện phép chia đa thức cho thương sẽ là



**Cách 2:** Dùng sơ đồ Horner sau đây để xác định hệ số A,b,c của đa thức thương là .



1. Đôi khi ta có thể xác định bằng cách nhẩm nghiệm như sau:



Nếu thì phương trình có 1 nghiệm là=1.



Nếu thì phương trình có 1 nghiệm là .



1. Việc biến đổi thành phương trình tích có thể thực hiện dễ dàng nếu ta có thể đặt nhân tử chung.
2. Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức hệ số thực có 1 nghiệm phức thì cũng là 1 nghiệm. Như vậy:



* Mọi phương trình bậc ba hệ số thực có ít nhất một nghiệm thực, nghĩa là
* Hoặc có 3 nghiệm thực
* Hoặc có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (không thực) liên hợp nhau.
* Muốn giải phương trình bậc 3 hệ số thực, ta thường phải tìm nghiệm thực của phương trình rồi biến thành phương trình tích. Nghiệm thực này có thể tính chính xác nhờ máy tính bỏ túi (nếu là nghiệm hữu tỉ).
* Nếu biết phương trình bậc 3 hệ số thực có 1 nghiệm không là số thực thì cũng là nghiệm, nên phương trình phải có dạng



Chia cho sẽ tìm được thừa số



Như vậy phương trình có 3 nghiệm là



I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

a) biết 1 nghiệm là .



b) biết 1 nghiệm là .



c) biết 1 nghiệm là



**Giải**

a) Chia đa thức cho ta được thương là . Do đó, phương trình đã cho viết thành:



Vậy phương trình có 3 nghiệm:



b) Chia đa thức cho ta được thương là . Do đó, hương trình đã cho viết thành:



Giải (1):



Giải (2): Ta có:



Ta đi tìm căn bậc hai của



Đặt



Từ (ii) suy ra:



Từ (1) suy ra:



(loại) hoặc



Với



Với



Như vậy:



Phương trình có 2 nghiệm là:



Vậy nghiệm của phương trình là:



c) Chia đa thức cho ta được thương là: . Do đó, phương trình đã cho viết thành:



Giải (1):



Giải (2): Ta có



Đặt



Tư (ii) suy ra:



Từ (i) suy ra:



hoặc (loại)



Với



Với



Như vậy:



Phương trình (2) có 2 nghiệm là



Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là:



**Ví dụ 2.**Giải các phương trình:

a) và biết phương trình có 1 nghiệm là



b) và biết phương trình có 1 nghiệm là



c)Tìm các số a, b, c để phương trình nhận và làm nghiệm.



**Giải**

a) Theo đề: là nghiệm cuả phương trình nên



Với phương trình đã cho trở thành:



Vì phương trình có 1 nghiệm là ta chia đa thức



cho ta được thương là . Do đó, phương trình tương đương với



Vậy phương trình có 3 nghiệm



b) Ta có: là nghiệm của phương trình nên



Với phương trình đã cho trở thành:



Biết là 1 nghiệm, chia đa thức cho ta được thương là: . Do đó, phương trình: tương đương với:



Giải (1):



Giải (2):



Vậy phương trình có 3 nghiệm là:.



c) Vì và là nghiệm của phương trình nên



**Ví dụ 3.** a) Cho phương trình: , gọi lần lượt là 3 nghiệm của phương trình (1) trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức: .



**b**)Giải phương trình sau trong tập hợp số phức:



**c)**  Giải phương trình sau trên tập số phức .



**Giải**

a) Ta có:

có 3 nghiệm là:



Lúc đó:



b) Ta có:



Vậy nghiệm của phương trình là:



**c)** Ta có:



Vậy nghiệm của phương trình là: .



**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuần ảo .



**Giải**

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo.

Đặt (a là số thực khác 0), thay vào phương trình ta được:



Vậy phương trình đã cho có nghiệm thuần ảo là .



**Ví dụ 5.** Giải phương trình: , trên tập số phức, biết phương trình có nghiệm thuần ảo.



**Giải**

Giả sử là một nghiệm của phương trình. Khi đó, ta có:



là một nghiệm của phương trình nên ta biến đổi phương trình đã cho về dạng:



Vậy phương trình đã cho có nghiệm



II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm nghiệm củaphương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| A. | B. |
| C. | D. |

**Hướng dẫn giải**

Các hệ số của phương trình thỏa mãn:



Vậy phương trình nhận là nghiệm.



Phương trình



Giải (1):



Giải (2): Ta có



Phương trình (2) có 2 nghiệm là



Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 2.** Tìm nghiệm củaphương trình .



|  |
| --- |
| **A.** |
| **B.** |
| **C.** |
| **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Các hệ số của phương trình thỏa mãn:



nên phương trình nhận là 1 nghiệm.



Phương trình



Giải (1):



Giải (2):



Phương trình (2) có hai nghiệm là:

,



Kết luận: phương trình có 3 nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án D**.

**Câu 3.** Biết là nghiệm của phương trình



Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Phương trình tương đương với:



Vậy phương trình có 3 nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 4.** Biết là nghiệm của phương trình . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

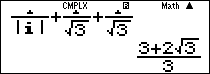
**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy nghiệm của phương trình là:





**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 5.** Tìm nghiệm của phương trình



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy phương trình nhận là nghiệm.



Chia đa thức cho ta được thương là . Do đó, phương trình tương đương với:



Giải (1): .



Giải (2): . Ta có:



Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là:



Vậy phương trình có 3 nghiệm là:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 6.** Tìm nghiệm của phương trình .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy phương trình: có 1 nghiệm là z=3.



Chia đa thức cho z-3 ta được thương là . Do đó, phương trình tương đương với:



Giải (1):



Giải (2): Ta có:



Do đó phương trình (2) có hai nghiệm:



Vậy phương trình có 3 nghiệm là:



**Câu 7.** Cho phương trình biết phương trình có 1 nghiệm là Tìm tổng mô đun hai số phức còn lại



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Phương trình: hệ số thực có 1 nghiệm là



Suy ra cũng là nghiệm.



Do đó phương trình phải có dạng:



Chia đa thức cho ta được thương là

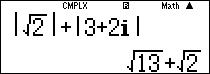


Phương trình tương đương với



Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là:





Vậy chọn đáp án D.

**Câu 8.** Cho phương trình và biết phương trình có nghiệm thuần ảo. Tìm b



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là ai ai thỏa mãn phương trình:



Ta có:



Với (loại)



Với



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 9.** Cho phương trình và biết phương trình có ngiệm thực. Tìm các nghiệm của phương trình



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi x là nghiệm thực của phương trình: ta có:



Suy ra phương trình có dạng:

với z=2 là nghiệm thực của phương trình.



Chia đa thức cho z-2 ta được thương là . Do đó, phương trình tương đương với:



Giải (1):



Giải (2): Ta có: . Phương trình (2) có hai nghiệm là:



Vậy phương trình có 3 nghiệm là:



**Câu 10.** Tìm nghiệm của phương trình:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi phương trình thành: .



Đặt thì phương trình trở thành:



.



* Với :



* Với :



* Với :



Vậy phương trình có 3 nghiệm:



**Vậy chọn đáp án C.**

## DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN SỐ PHỨC

**Phương Pháp**

* Với dạng phương trình trùng phương, ta đặt , sẽ đưa về phương trình bậc hai theo w. Giải phương trình này, ta tính w rồi lại giải phương trình để tính z.



* Nếu thì phương trình có 1 nghiệm là . Chia cho , phương trình tương đương với phương trình



* Nếu thì phương trình có 1 nghiệm là . Chia cho , phương trình P(z)=0 tương đương với phương trình



Như vậy ta nên viết các hệ số của phương trình để xem phương trình có rơi vào hai trường hợp đặc biệt này không.

* Trường hợp phương trình hệ số thực, nếu biết 1 nghiệm (không là số thực) thì cũng là nghiệm. Do đó phương trình có dạng:



Khi khai triển phương trình này và đồng nhất với phương trình đã cho sẽ tìm được hệ số b và c.

Giải phương trình: ta được nghiệm



Như vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là:



I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình:



**Giải**

a) Phương trình: ta coi là phương trình bậc hai theo , phương trình có 2 nghiệm là hoặc



b) Đặt phương trình (1) trở thành



Phương trình (2)



Với



Với



Vậy phương trình (1) có 4 nhiệm là:



c) (1)



Đặt phương trình trở thành



(2)



Phương trình (2) có 2 nghiệm là:



Với



Với



Vậy phương trình có 4 nghiệm là:



**Ví dụ 2.** Cho phương trình bậc bốn hệ số thực

Biết phương trình có 1 nghiệm .Tính m và nghiệm còn lại.



**Giải**

Ta có là nghiệm của phương trình:



Phương trình trở thành (1)



Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức hệ số thực nhận là 1 nghiệm phức, không thực, thì cũng là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình nhận 2 nghiệm là Do đó phương trình (1) phải có dạng:



Đồng nhất hệ số của hai phương trình (1) và (2) ta được



Vậy phương trình



Vậy phương trình có 4 nghiệm:



**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng phương trình: có hai nghiệm là số thuần ảo.



**Giải**

Đặt



là nghiệm của phương trình nên



Vậy là nghiệm của phương trình.



**Ví dụ 4.** Phương trình có 4 nghệm không thực với các giá trị thực a, b, c, d. Biết tích hai trong bốn nghiệm đó là và tổng của hai nghiệm còn lại là . Tìm giá trị của b



**Giải**

Gọi 4 nghiệm của phương trình là Khi đó nên ta suy ra (\*).



Theo bài ra ta có .



Vì nên cũng như phải là các số phức liên hợp, do đó .



Theo (\*) thì



Vậy giá trị cần tìm của b là 51.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình sau trên tập hợp số phức:



**Giải**

Biến đổi phương trình đã cho về dạng:



Vậy nghiệm của phương trình là:



**Ví dụ 6.** Giải phương trình sau trên tập số phức:



**Giải**

Nhận xét không là nghiệm của phương trình (1) vậy



Chia hai vế PT (1) cho ta được : (2)



Đặt . Khi đó



Phương trình (2) có dạng : (3)



PT (3) có 2 nghiệm



Với ta có



Có



PT(4) có 2 nghiệm:



Với ta có:



Có



PT(5) có 2 nghiệm:



Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:



Vậy phương trình có các nghiệm



**II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN**

**Câu 1.** Tìm tổng mô đun các nghiệm của phương trình biết phương trình có nghiệm thực



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi là nghiệm thực của phương trình, ta có:



(1)



Như vậy phương trình được biến đổi thành phương trình tích có dạng:



Đồng nhất phương trình (1) và (2) ta được:



Vậy phương trình (1) tương đương với:



Giải (i):

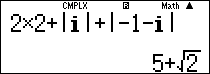


Giải (ii): Ta có: . Phương trình (ii) có hai nghiệm



Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:





**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 2.** Biết phương trình có có nghiệm thuần ảo. Tìm tổng mô đun của các nghiệm phức có phần ảo dương.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là ta có:



Vậy 2 nghiệm thuần ảo của phương trình là và phương trình có dạng phương trình tích:



Đồng nhất phương trình này với phương trình đã cho ta được:



Phương trình trở thành:



Kết luận: Phương trình đã cho có 4 nghiệm là:



Suy ra: **Vậy chọn đáp án C.**



**Câu 3.** Cho phương trình: Phương trình có bao nhiêu nghiệm thực



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Các hệ số của phương trình là:



Ta có Suy ra phương trình có 1 nghiệm: .



Chia đa thức cho , ta biến đổi:



Phương trình (2) lại có các hệ số thỏa mãn:



Do đó phương trình (2) có 1 nghiệm z= -1.



Suy ra (3) có 2 nghiệm là



Kết luận: Phương trình (1) có 4 nghiệm là:



**Câu 4.**  Cho là nghiệm phức của phương trình . Tính giá trị của biểu thức: .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Giảita có



Suy ra



Do đó



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 5.** Biết là nghiệm của phương trình



Tìm .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy không phải là nghiệm của phương trình nên

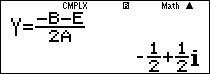


**Giải (\*) {**Kĩ thuật MTCT}

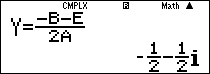
Ghi vào màn hình:



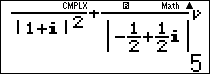
Ta được nghiệm của phương trình:

Chỉ cần thay đổi các hệ số của phương trình ta tìm được nghiệm của phương trình (2)

Suy ra:



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 6.** Giải phương trình:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy là nghiệm của phương trình nên



# CHỦ ĐỀ 7. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

**Phương pháp**

* Ta nhắc lại cách giải hệ phương trình bằng định thức như sau:

; ;



Nếu thì hệ có nghiệm duy nhất:



Nếu và hoặc thì hệ vô nghiệm



Nếu thì hệ có vô số nghiệm.



* Ngoài phương pháp định thức trên ta có thể sử dụng phương pháp cộng đại số, phương pháp rút thế...
* Ngoài ra ta còn có thể dựa vào tính chất tập hợp điểm số phức để giải và biện luận hệ phương trình.

## I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

**Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau trên tập số phức:



**Giải**

a) Ta có các định thức



Vậy hệ phương trình có nghiệm với



b) Ta có các định thức



Vậy hệ phương trình có nghiệm với



**Ví dụ 2.** Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn và :



a) b)



**Giải**

a) Ta có:



b) Hệ phương trình



Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm



**Ví dụ 3.** Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn và :



a) b)



**Giải**

a) Ta có:



Đặt hệ phương trình trở thàn



Vậy phương trình có 1 nghiệm là :



b) Ta có:



Đặt và thì hệ phương trình trở thành



Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là :



**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình trên tập số phức: .



**Giải**

Ta có:



Khử x ta có hệ:



Lúc đó: Vậy hệ có nghiệm là:



**Ví dụ 5.** Tìm số phức thỏa mãn



**Giải**

Ta có:



Ta có



Nên là nghiện phương trình:



Ta được nghiệm:



Nên là nghiện phương trình:



Vậy nghiệm của hệ phương trình là:



**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình hai ẩn:



**Giải**

Từ (2) suy ra: Từ (1) suy ra:



Do đó: nên tức là



Suy ra: tức là Từ và suy ra nên bằng 1 hoặc bằng -1.



Từ và (2) suy ra tức hoặc .



Mà (1): nên và



Vậy hệ có hai nghiệm .



**Ví dụ 7.** Giải hệ phương trình:



**Giải**

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: ,(dễ thấy không thỏa mãn).



Thế vào phương trình thứ hai cảu hệ ta được:



Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:



**Nhận xét:** Việc biến đổi phương trình bậc 4 có nghiệm thực thì không quá khó khăn, có thể dùng máy tính để nhẩm nghiệm và đoán nhân tử chung. Thế nhưng với phương trình bậc 4 nghiệm phức (và không có nghiệm thực) thì việc dùng máy tính để nhẩm nghiệm rồi đoán nhân tử chung là không thể. Vậy nên ta phải dùng kĩ thuật giải phương trình bậc 4 để phân tích nhân tử chung một cách nhanh chóng:

.



Bây giờ ta thêm vào 2 vế một lượng là (để vế trái được một bình phương đúng):



**(\*)**



**Muốn vế phải là một bình phương đúng (hoặc có thể là lượng âm của bình phương đúng:**  ) thì:



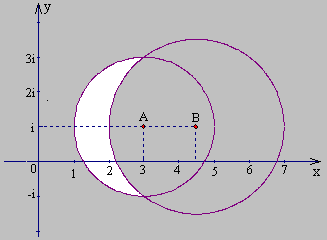
Vì lí do “thẩm mỹ” nên chúng ta chọn. Thay vào **(\*):**



**Ví dụ 8.**  Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức *z* :



**Giải**

 Gọi là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức. Tập hợp các điểm M có tọa vị *z* thỏa mãn (1) là hình tròn tâm , bán kính ( kể cả biên ).



Ta có



Tập hợp các điểm M có tọa độ *z* thỏa mãn (2) là phần của mặt phẳng nằm bên ngoài hình tròn tâm, bán kính( kể cả biên ).

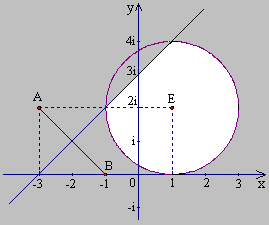


Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là giao của hai tập hợp trên. Đó là “ hình trăng lưỡi liềm ” không bị bôi đen trong hình vẽ.

**Ví dụ 9.**  Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức *z*:



**Giải**

****Gọi là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức. Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (1) là nửa mặt phẳng không chứa điểm A có bờ là đường trung trực của đoạn thẳng AB ( kể cả đường trung trực ), với và . Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (2) là hình tròn tâm, bán kính ( kể cả biên ).



Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho làgiao của hai tập hợp trên. Đó là phần hình tròn kể cả biên không bị bôi đen trong hình vẽ

**Ví dụ 11*.*** Cho ba số phức thỏa mãn hệ



Tính giá trị biểu thức



**Giải**

Vì , do đó có thể đặt:



Suy ra



Mà nên



Ta có



Suy ra hoặc hoặc hoặc , do đó hai trong ba số bằng nhau.



Giả sử thì hay ta có .



Do đó



Vậy hoặc hoặc .



## II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm nghiệm của hệ phương trình: .



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Vậy nghiệm của hệ phương trình là:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 2.** Tìm nghiệm của hệ phương trình



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Từ phương trình thứ (2) ta có: thay vào phương trình thứ nhất ta được:



Lúc đó: .



Vậy nghiệm của hệ phương trình là: .



**Câu 3.** Tìm số nghiệm của hệ phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Từ phương trình thứ nhất ta được: thế vào phương trình thứ (2) ta được:



Ta có



Do đó



**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 4.** Số nghiệm của hệ phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Vậy chọn đáp án D.

**Câu 5.** Tìm nghiệm của hệ phương trình



|  |
| --- |
| **A.** |
| **B.** |
| **C.** |
| **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Ta có hệ tương đương:



Do đó ta có hệ mới: nên u, v là nghiệm của phương trình



Vậy nghiệm của hệ phương trình là:



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 6.** Cho hệ phương trình . Tính



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

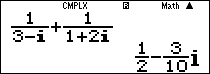


Theo định lý Vi-et thì là nghiệm của phương trình



Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm là





Vậy chọn đáp án D.

**Câu 7.** Giải hệ phương trình hai ẩn:



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Theo định lí Vi-et là nghiệm của phương trình:



Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm là



**Câu 8.** Cho ba số phức thỏa mãn hệ



Tính giá trị của biểu thức với n là số nguyên dương.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Vì nên . Do đó



Vậy là ba nghiệm của phương trình:



Chứng tỏ trong ba số phức phải có một số bằng 1 và hai số còn lại đối nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử khi đó :



Vậy ta có tổng S=1

**Chú ý:** Có thể giải bài toán bằng cách sử dụng biểu diễn hình học số phức hoặc dùng dạng lượng giác ( ví dụ dưới đây)

**Câu 9.** Giải hệ phương trình:



|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:



Nhân (2) với 3 rồi cộng với (3) ta được



Lúc đó hệ phương trình trở thành:



Giải hệ trên ta được:



**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 10.**  Tìm số nghiệm của hệ phương trình



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Ta có lưu ý sau:** Chứng minh rằng nếu 3 số phức thõa mãn: thì một trong 3 số đó phải bằng 1.



**Thật vậy**

Ta có:



* Nếu thì



* Nếu thì , gọi điểm P biểu diễn số phức thì P sẽ không trùng với O và nên đường trung trực của OP cắt đường tròn đơn vị rại hai điểm và cũng là hai điểm biểu diễn Do đó hoặc hoặc .



Vậy hoặc hoặc



**Áp dụng:** giải hệ phương trình trên thì có một ẩn bằng 1 và tổng hai ẩn còn lại bằng 0.

Xét thì có nên



Từ giả thiết nên hay thì có hoặc



Vậy hệ có 6 nghiệm là hoán vị các phần tử của bộ ba



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 11.** Cho hệ phương trình Tìm khẳng định đúng



|  |
| --- |
| **A.** Hệ có nghiệm duy nhất |
| **B.** Hệ đã cho vô nghiệm |
| **C.** Nghiệm của hệ là những số thực |
| **D.** Thành phần nghiệm của hệ có một số thực và một số phức |

**Hướng dẫn giải**

Xét hệ phương trình



Ta có (\*)



Từ (\*) ta có , vì thế . Do đó nên hệ có dạng



Thử lại thấy thỏa mãn, vậy hệ đã cho có nghiệm



**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 12.**  Tìm số phức z thỏa mãn :



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi số phức



Hệ



Vậy số phức cần tìm là : . **Vậy chọn đáp án D.**



**Câu 13.** Tìm tham số m để hệ phương trình phức có nghiệm duy nhất:

, (ẩn z là số phức)



|  |  |
| --- | --- |
| A. , | B. , |
| C. , | D. , |

**Hướng dẫn giải**

Gọi



Theo giả thiết, ta có



là hệ phương trình tọa độ giao điểm của đường tròn (C):



Và đường thẳng :



Đường tròn (C) có tâm và bán kính .



Hệ phương trình có nghiệm duy nhất tiếp xúc với (C).



Đặt , ta có



Vậy giá trị cần tìm là hay



**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 14.**  Tìm nghiệm của hệ phương trình sau với ẩn là số phức *z* và là tham số thực khác 0.



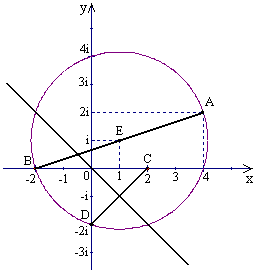
|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Hướng dẫn giải**

Gọi *A*, *B* theo thứ tự là các điểm trong mặt

phẳng phức biểu diễn số phức là , . Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức *z* thỏa mãn (1) là đường tròn đường kính AB, trừ hai điểm A và B. Đường tròn này có tâm E biểu diễn số phức và bán kính nên có phương trình là



Gọi C, D theo thứ tự là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức . Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức *z* thỏa mãn (2) là đường trung trực của đoạn thẳng CD. Đường trung trực này đi qua trung điểm của đoạn thẳng CD và nhận làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình là . Suy ra giao điểm của đường tròn và đường trung trực là nghiệm của hệ đã cho. Đó là các điểm thỏa mãn (\*) và (\*\*), tức là nghiệm của hệ phương trình sau:



hoặc .



Vậy nghiệm của hệ phương trình là:



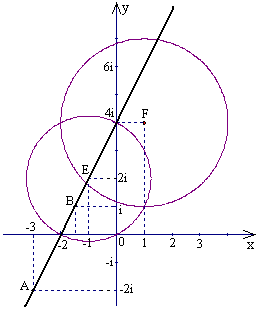
**Vậy chọn đáp án A.**

**Câu 15.** Số nghiệm của hệ phương trình sau với *z* là ẩn số :



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 0 | **B.** 1 | **C.** 2 | **D.** 4 |

**Hướng dẫn giải**

Gọi E là điểm trong mặt phẳng phức có tọa vị là . Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức *z* thỏa mãn (1) là đường tròn tâm E, bán kính . Phương trình đường tròn này là: (\*). Gọi A, B theo thứ tự là các điểm biểu diễn số phức . Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức *z* thỏa mãn (2) là đường tròn Appollonius chia đoạn thẳng AB theo tỷ số . Đường tròn Appollonius có tâm F là điểm có tọa độ và có bán kính



Phương trình đường tròn Appollonius là : (\*\*)



Suy ra nghiệm của hệ đã cho là giao điểm của hai đường tròn (\*) và (\*\*), tức là các điểm thỏa mãn hệ phương trình sau:



hoặc .



Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là và .



**Vậy chọn đáp án C.**

# CHỦ ĐỀ 8. DẠNG LƯỢNG GIÁC SỐ PHỨC

## Bài toán 1: Viết số phức dưới dạng lượng giác

**Phương pháp**

1. Để viết số phức dưới dạng lượng giác



Trước hết ta biến đổi:



Như vậy: . Đặt và



Từ đó suy ra là 1 acgumen của .



1. **Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:**



**\***



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) 5; b) -3 b)7i; d) .



**Giải**

a)



b)



c)



d)



**Ví dụ 2.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) b) c) d)



**Giải**

a)



b)



c)



d)



**Ví dụ 3.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) b)



c)



**Giải**

a)



b)



c)



**Ví dụ 4.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) ; b) c)



**Giải**

a) Ta có:



b)



c)



**Ví dụ 5.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) b)



**Giải**

a) Ta có:



b)



**Cách khác:**



Mà



Do đó:



**II. Bài tập tự luyện**

**Bài tập 1.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) b)



c) d)



**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



c) Ta có:



d) Ta có



**Bài tập 2.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) ; b) ;



c) d)



**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



c)



d)



**Bài tập 3.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



**Bài tập 4.** Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:



b) Ta có:



c) Ta có:



**Bài tập 5.** Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:



* Khi thì dạng lượng giác là



* Khi thì dạng lượng giác là



* Khi thì không có dạng lượng giác.



b) Ta có



* Khi thì dạng lượng giác là



* Khi thì dạng lượng giác là



* Khi thì không có dạng lượng giác.



## Bài toán 2: Áp dụng công thức Moivre để thực hiện các phép tính

**Phương pháp**

**\***



**\***



**\***



**\***



**\***



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Tính các giá trị của số phức sau và viết kết quả của chúng dưới dạng



b) ;



**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có



c) Ta có



**Ví dụ 2.** Tìm số nguyên dương n bé nhất để là số thực.



**(Trích đề thi thử số 1 năm 2012, TT 46/1 Chu Văn An, Huế)**

**Giải**

Ta có:



Do đó



Số đó là số thực khi và chỉ khi



Số nguyên dương bé nhất cần tìm là .



**Ví dụ 3.** Tính giá trị các biểu thức sau:

; b)



c) d)



**Giải**

a) Ta có



b) Ta có



c) Ta có



d) Ta có



**Ví dụ 4.** Tính giá trị các biểu thức sau

a)



b) ; c) .



**Giải**

a) Ta có



b) Ta có



c) Ta có



**Ví dụ 5.** a) Chứng minh số phức là số thực.



**(Trích Trường THPT Kon Tum, lần 3 – 2012)**

b) Tìm tất cả số nguyên dương n thỏa mãn là số thực.



**(Trích Trường THPT Quế Võ số 1, lần 4 – 2013)**

**Giải**

a) Ta có:



b) Ta có



**Ví dụ 6.** Giả sử z là số phức thỏa mãn . Tìm số phức



**(Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh – 2012)**

**Giải**

Từ giả thiết ta có



Với ta có:



Với ta có:



**Ví dụ 7.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm phần thực và phần ảo của .



**(Trích Trường THPT Phan Bội Châu, Nghệ An lần 2 – 2013)**

**Giải**

Đặt



Do đó



Phần thực của z là 16, phần ảo của z là 16.

**Ví dụ 8.** Gọi là hai nghiệm của phương trình . Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho .



**(Trích Trường THPT Nguyễn Văn Cừ, Bắc Ninh lần 3 – 2013)**

**Giải**

Phương trình (1). (1) có



Do đó các căn bậc hai của là .



Vậy (1) có các nghiệm là



**Ví dụ 9.** Cho là hai nghiệm phức của phương trình . Tìm phần thực, phần ảo của số phức: , biết có phần ảo dương.



**(Trích Trường THPT Can Lộc, Hà Tĩnh lần 2 – 2014)**

**Giải**

Vì nên phương trình có hai nghiệm phức: (do có phần ảo dương)



Ta có:



Do đó:



Vậy phần thực bằng 1, phần ảo bằng 0.



Vì n là số nguyên dương nhỏ nhất nên từ (\*) suy ra .



**Ví dụ 10.** Cho số phức z biết . Viết dạng lượng giác của . Tìm phần thực và phần ảo của số phức



**Giải**

**Cách 1:** Ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:



Do đó:



Suy ra:



Vậy số phức có phần thực là và phần ảo là



**Cách 2:** Dạng lượng giác của số phức



Ta có:



Áp dụng công thức Movie, ta có



Vậy phần thực của số phức w là và phần ảo của số phức w là



**II. Bài tập rèn luyện**

**Bài tập 1.** Tính các giá trị của số phức sau và viết kết quả của chúng dưới dạng



; b);



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có



b) Ta có



c) Ta có



**Bài tập 2.** Cho số phức . Tìm m nguyên để là số thực, là số ảo



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



**Bài tập 3.** Cho số phức . Tính .



**(Trích Trường THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – 2013)**

**Giải**

Ta có



Suy ra



**Bài tập 4.** Cho số phức z thỏa mãn: . Tìm phần thực của số phức .



**(Trích Trường THPT Chuyên Trần Phú, lần 2 – 2013)**

**Giải**

Gọi số phức thay vào (1) ta có:



Vậy phần thực của là



**Bài tập 5.** Gọi là hai nghiệm phức của phương trình . Tìm phần thực, phần ảo của số phức .



**(Trích Trường THPT Chuyên Quảng Bình, lần 2 – 2014)**

**Giải**



Ta có



Áp dụng công thức Moa-vrơ:



. Phần thực của w là -1, phần ảo là 0.



**Bài tập 6.** Cho các số phức z thỏa mãn: . Chứng minh rằng z có phần thực bằng 1.



**(Trích Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị - 2014)**

**Giải**

Ta có không thỏa mãn phương trình nên .



nên đặt



Nên



Vậy z luôn có phần thực là 1.

**Bài tập 7.**  Biết rằng số phức thỏa mãn . Hãy tính



**Hướng dẫn giải**

Từ



**Bài tập 8.** Cho Tính



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



a) Ta có



Do đó:



b) Ta có



Vậy



**Cách 2.** Ta có thể xem B là tổng của cấp số nhân 4 số hạng liên tiếp, số hạng đầu là 1, công bội là . Suy ra ta có:



Với Vậy



c) Ta có



Vậy



d) Ta có là tổng của cấp số nhân có 9 số hạng, số hạng đầu bằng 1, công bội là



Do đó:

với



Do đó:



e) Ta có là tổng của cấp số nhân có 11 số hạng, số hạng đầu bằng 1, công bội là



Do đó:



Với



Và



.



Vậy



f) Ta có



Với



Vậy .



**Bài tập 9.** Chứng minh rằng:

a) và



b) Cho số phức .



Tính



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có



b) Theo câu a) ta có



Ta có



Do đó:



Vậy .



**Bài tập 10.** Tìm phần thực của số phức . Trong đó n thỏa mãn: .



**Giải**

Phương trình: có nghiệm duy nhất là (vì VT của phương trình là một hàm số đồng biến nên đồ thị của nó cắt đường thẳng tại một điểm duy nhất)



Ta có:



Suy ra .



Bài tập 11. Cho số phức . Viết z dưới dạng lượng giác. Tìm phần thực và phần ảo của số phức .



**Giải**

Ta có:



Khi đó:



Vậy phần thực của w là , phần ảo là .



**Bài tập 12.**Tìm điều kiện đối với các số phức a,b,c sao cho với mọi số phức z thỏa mãn thì là số thực.



**Lời giải**

Vì là số thực nên ta có các giá trị đặc biệt:



* Chọn thì (1)



* Chọn thì (2)



* Chọn thì (3)



* Chọn thì (4)



Từ (1) và (2) ta có Nhưng từ (3) và (4) ta có do đó



Khi đó, từ (1) và (3) thì



Vì nên đặt ta có:



khi và chỉ khi



Điều đó xảy ra khi và chỉ khi .



Vậy giá trị cần tìm là và c là một số thực tùy ý.



**Bài toán 3. Tìm môđun và acgumen của số phức**

**Phương pháp:** Nhìn chung các bài tập này có cách giải như sau:

Giả sử ta cần tìm một acgumen của số phức z. Ta cần biến đổi sao cho z có dạng



1. Với ta có mô đun của là



Và 1 acgumen của là thỏa ;



1. Với thì có mô đun là và 1 acgumen của là



1. Với



1. Với



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Cho số phức . Tìm một acgumen của số phức z.



**Giải**



Do neân . Vậy, một acgumen của z là



**Ví dụ 2.** Cho số phức z có mô đun bằng 1 và là một acgumen của z



a) Tìm một acgumen của



*b)* Tìm một acgumen củanếu



**Hướng dẫn**

Từ giả thiết suy ra



a) Ta có



Vậy một acgumen của z là



b) Ta có :



* Nếu thì . Lúc đó là một acgumen của



* Nếu thì . Lúc đó là một acgumen



**Ví dụ 3.** Tìm môđun và một acgumen của các số phức sau:

a) ; b)



c) ; d)



e)



**Giải**

a)



Vậy



b)



Vậy



c)



Vậy



d)



Vậy



e)



Vậy



**Ví dụ 4.** Tìm môđun và một acgumen của các số phức sau:

a) b)



c) d)



**Giải**

Ta kí hiệu r và lần lượt là môđun và acgumen của số phức z, ta có



a)



Vậy



b)



Vậy



c)



Vậy



d)



Vậy



**Ví dụ 5.** Gọi là hai nghiệm của phương trình: có phần thực âm. Tính môđun và acgumen của các số phức sau:



a) b)



c) d)



**Giải**

Ta gọi r và lầ lượt là môđun và acgumen của số phức w.



Giải phương trình: ta được 2 nghiệm là:



có phần thực âm và



a) Ta có: ;



Suy ra:



Vậy w có môđun và một acgumen là:



b) Ta có



Suy ra:



Vậy có môđun và acgumen là



c) Ta có theo câu b) và



Suy ra



Vậy có môđun và một acgumen là:



**Cách khác:** Trong trường hợp này, ta có thể áp dụng công thức Vi-et:



Ta có:



d)



Với



và



Suy ra



Vậy có môđun và acgumen là:



**Ví dụ 6.** Tìm môđun và một acgumen của số phức z thỏa mãn phương trình:



**Giải**

Ta có



Đặt



Ta có:



Chọn ta được



Vậy có 2 số phức z thỏa mãn là:



có môđun , một acgumen là và có môđun , một acgumen là



**Ví dụ 7.** Trong các acgumen của số phức , tìm acgumen có số đo dương nhỏ nhất.



**(Trích Ebooktoan.com số 13 – 2013)**

**Giải**

Ta có



Theo công thức Moavơrơ ta có: . Từ đó suy ra z có các họ acgumen là: . Ta thấy với thì acgumen dương nhỏ nhất của z là .



**Ví dụ 8.** Tìm acgume âm lớn nhất của số phức .



**Giải**



Aps dụng công thức Moa vro, ta có:



Các acgumen của z đều có dạng . Ta có hay



Acgumen âm lớn nhất của z tương ứng với



Vậy acgumen cần tìm của z là



**Ví dụ 9.** Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: .



**(Trích Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ – 2013)**

**Giải**

Ta có:



Giả sử



Từ (1) và (2) suy ra:



Cho ta nhận được các giá trị acgumen tương ứng của số phức là



Từ đó phương trình đã cho có 4 nghiệm lần lượt là:

hay



hay



hay



hay



**Nhận xét:** Dạng lượng giác luôn phát huy được ưu thế của mình khi xử lí các biểu thức lũy thừa bậc cao của số phức.

**Ví dụ 10.** Gọi là nghiệm của phương trình . Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho



**Giải**

Đặt (1). Biệt thức của (1) là



.



Vậy (1)có các nghiệm là và



Vì n là số nguyên nhỏ nhất nên từ suy ra:



**Ví dụ 11.** Tìm số phức z thỏa mãn: biết có một acgument bằng một acgument của cộng với . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .



**Giải**

Đặt . Khi đó có một acgument bằng acgument của cộng với nên với .



Suy ra



Ta có:



do (\*)



Ap dụng bất đẳng thức Cosi,ta được:



Suy ra , đẳng thức xảy ra khi



Vậy, giá trị lớn nhất của T là , đạt khi



**II. Bài tập áp dụng**

**Bài tập 1**. Tính môđun và một acgumen của số phức sau



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có



Vậy



b) Ta có



Vậy



c) Ta có



Vậy



d)



Ta có



Suy ra



Vậy



**Bài tập 2.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm mô-đun của số phức .



**(Trích đề thi thử Người Thầy – 2013)**

**Giải**

Gọi . Ta có:



, thay vào (2) ta có



Suy ra



Do đó



Vậy



**Bài tập 3.** Tìm số phức z biết rằng và có một acgumen bằng .**(THPT Chuyên Đại học Vinh, lần 2 – 2013)**



**Giải**

Ta có



Đặt . Khi đó:



Theo bài ra ta có: . Suy ra



Từ giả thiết của bài toán ta có:



Từ đó ta có .



**Bài tập 4.** Viết dạng lượng giác của số phức z biết và có một acgumen bằng . **(THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội lần 3 – 2013)**



**Giải**

Ta có /



Gọi là một acgumen của z. Ta có



Từ đó suy ra:



Chọn sao cho



Vậy z có dạng lượng giác là .



**Bài tập 5.** Tìm số phức z biết là số thực và có một acgumen là . **(THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An lần 1 – 2013)**



**Giải**

Vì và có một acgumen là nên có một acgumen là , suy ra z có một acgumen là .



Gọi



Ta có là số thực khi và chỉ khi:



. Vậy .



**Bài tập 6.** Tìm số phức z sao cho có một acgumen bằng và **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc khối B, D, lần 5 – 2013)**



**Giải**

Đặt



có một acgumen bằng



Lại có:



Từ (1) và (2) suy ra .



**Bài tập 7.** Trong các số phức z thỏa mãn , số phức nào có nhỏ nhất. Khi đó acgumen của nó bằng bao nhiêu?



**(Trích GSTT Group lần 4 – 2014)**

**Giải**

Đặt



Áp dụng Bunhia copski:



nhỏ nhất khi



Dấu “=” xảy ra khi:



. Acgumen của z là: .



**Bài tập 8.** Tìm số phức z thỏa mãn và có một acgumen bằng . **(Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh, lần 3 – 2014)**



**Giải**

Đặt .



Suy ra . Khi đó:



Theo giả thiết ta có . Khi đó .



Suy ra



(vì )



Vậy .



**Bài tập 9.** Xét số phức z thỏa điều kiện



a) Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức thỏa (\*)



b) Trong các số phức z thỏa (\*) tìm số số phức có acgumen dương và nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**

b) Kẻ tiếp tuyến OK với đường tròn. Dễ thấy nên



Vậy



**Bài tập 10.** Tìm số phức sao cho và có một acgumen bằng .



**Hướng dẫn giải**

Từ



Lúc đó: . Vì có 1 acgumen bằng nên có dạng



Từ (1) và (2) suy ra



Vậy



**Bài tập 11.** Xác định tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z sao cho sao cho số phức có một acgument bằng



**Hướng dẫn giải**

Giả sử thì



Do có một acgument bằng nên ta có



Do đó:



Từ (1) và (2) ta suy ra và



## Bài toán 4. Áp dụng công thức Moavrơ để tính căn bậc n của số phức

**Phương pháp**

1. **Tính căn bậc hai của số phức w:** Căn bậc hai của số phức là số phức w thỏa



\*Căn bậc hai của 0 bằng 0

\* Với



Đặt thì



**\***Số phức có 2 căn bậc hai đó là và



**TT có căn bậc n:**



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Tìm căn bậc hai của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác



**Giải**

Ta có



Đặt là một căn bậc hai của w, ta có:



Vậy w có hai căn bậc hai là: và



**Ví dụ 2.** Tính căn bậc ba của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác:



Giải

Ta có:



w có môđun và một acgumen



Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có: Môđun và một acgumen



Lấy thì có ba giá trị:



Vậy có 3 căn bậc ba là:



**Ví dụ 3.** Tính căn bậc bốn của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác:



**Giải**

Ta có: có môđun và một acgumen



Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có: môđun và một acgumen



Lấy ta có 4 giá trị của



**II. Bài tập rèn luyện**

**Bài tập 1.** Tìm căn bậc hai của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Vậy w có 2 căn bậc hai là:



**Bài tập 2.** Tìm căn bậc ba của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



w có môđun R=1 và acgumen



Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có: môđun và một acgumen



Với k = 0,1,2 ta có ba giá trị của **.**



Vậy có 3 căn bậc 3 là:



**Bài tập 3.** Tính căn bậc bốn của



**Hướng dẫn giải**

Ta có: có:



Lấy ta có 4 giá trị cuả



Vậy có 4 căn bậc 4 là:



**Bài tập 4.** Tính căn bậc năm của



**Hướng dẫn giải**

Căn bậc năm của số phức là số phức z thỏa mãn



Vì . Đặt ta có



Lấy ta được 5 giá trị của :



Vậy có 5 căn bậc năm của i là:



**Bài tập 5.** a) Viết dưới dạng lượng giác.



b) Tính và suy ra các căn bậc bốn của



**Hướng dân giải**

a)



b)



Các căn bậc 4 của là :



MỤC LỤC

[**CHỦ ĐỀ 9. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC 3**](#_Toc479104573)

[**Bài toán 1. Sử dụng số phức vào giải hệ phương trình 3**](#_Toc479104574)

[**Bài toán 2: Ứng dụng số phức vào chứng minh các công thức, đẳng thức lượng giác 10**](#_Toc479104575)

[**Bài toán 3: Ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức 20**](#_Toc479104576)

[**Bài toán 4. Ứng dụng giải toán khai triển hay tính tổng nhị thức Niutơn 23**](#_Toc479104577)

[**Bài toán 5. Ứng dụng giải toán đa thức và phép chia đa thức 27**](#_Toc479104578)

# CHỦ ĐỀ 9. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC

## Bài toán 1. Sử dụng số phức vào giải hệ phương trình

Xét hệ phương trình:



Lấy (2) nhân sau đó cộng (trừ) (1) vế theo vế ta được :



Đặt , biểu diễn (\*) thông qua các đại lương



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình sau:



**Giải**

Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai nhân i ta được



là một căn bậc ba của số phức



Ta có:

có ba căn bậc ba là



Vậy với ta được nghiệm của phương trình là:



**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình sau: .



**Giải**

Hệ đã cho tương đương với



Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ 2 nhân i ta đươc



là một căn bậc 3 của .



Ta có:

nên có ba căn bậc ba là



Vậy với ta được nghiệm của phương trình là:



**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình:.



**Giải**

**Cách 1.** Lấy (2) nhân sau đó cộng với (1) ta được



Đặt . Lúc đó: .



Vậy, nghiệm của hệ phương trình là:.



**Cách 2.** Ta thấy không là nghiệm của hệ phương trình



* Nhân (1) với , nhân (2) với ta được



trừ vế theo vế ta được



* Nhân (1) với , nhân (2) với ta được



cộng vế theo vế ta được



Ta được hệ



**Đáp số:**



**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình: .



**Giải**

Lấy (2) nhân sau đó cộng với (1) ta được



Đặt . Lúc đó phương trình (\*) trở thành



Vậy, nghiệm của hệ phương trình là .



**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình với nghiệm với : .



**Giải**

Điều kiện: . Đặt .



Hệ đã cho có dạng: . Đặt . Ta có.



Từ hệ đã cho ta có



Giải phương trình (\*), ta có suy ra các nghiệm:



Vì nên ta có: , suy ra nghiệm của hệ là:



**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình trên tập số phức: .



**(Đề thi học sinh giỏi Romania năm 2002)**

**Giải**

Xét hệ phương trình



Rõ ràng và x,y,z đôi một khác nhau.



Từ (1) và (2) ta có



Hay



Tương tự hệ đã cho trở thành (4)



Cộng vế với vế ta được



Kết hợp với (4) ta có: Suy ra



Đặt thì từ và x,y,z đôi một khác nhau nên



với



Mà nên



Ta có nên a=1



Vậy các số phức cần tìm là các hoán vị của



**II. Bài tập rèn luyện**

**Bài tập 1.** Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực: .



Hướng dẫn giải

Đây là hệ đẳng cấp bậc ba. tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường ta sẽ đi đến giải phương trình bậc ba:



Phương trình này không có nghiệm đặc biệt!

Xét số phức . Vì ,nên từ hệ đã cho ta có , tương tự cách làm ở chương 1, ta tìm được 3 giá trị của là:



,,



Từ đó suy hệ đã cho có 3 nghiệm là:



**Bài tập 2.**  Giải hệ phương trình trong tập số thực: .



**Hướng dẫn giải**

Xét số phức



Vì , nên từ hệ đã cho suy ra:



(\*)



Các số phức thỏa mãn (\*):



Vậy các nghiệm cần tìm của hệ là:



**Bài tập 3.** Giải hệ phương trình với nghiệm với : .



**Lời giải**

Điều kiện Đặt . Ta có:



Vì hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau, nên hệ đã cho tương đương với:



Phương trình có hai nghiệm nên hệ đã cho có các nghiệm hoặc



**Chú ý:**Muốn giải được các hệ phương trình bằng phương pháp sử dụng số phức, cần nhớ một công thức cơ bản của số phức, đăc biệt là với mỗi số phức thì ta có là bình phương mođun và .



**Bài tập 4.** Giải hệ phương trình với nghiệm với : .



**Hướng dẫn giải**

Từ hệ suy ra



Bài hệ này không có ngay dàng giống ví dụ trên, tuy nhiên với mục đích chuyển mẫu số về dạng nình phương mođun của số phức, chỉ cần đặt với



Hệ đã cho có dạng:



Đặt . Ta có:



Hệ đã cho tương đương với:



Giải phương trình (\*), ta có suy ra các nghiệm là



Vì nên do đó



Vậy nghiệm cần tìm là



**Bài tập 5.** Giải hệ phương trình: .



**Hướng dẫn giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với



Nhận thấy là một nghiệm của hệ phương trình



Nếu thì hệ đã cho viết thành



Suy ra:



Đặt ta có phương trình



Với ta được nghiệm của hệ là



Với ta được nghiệm của hệ là



Với ta được nghiệm của hệ là



**Bài tập 6.**Giải hệ phương trình:



**(Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 1996)**

**Hướng dẫn giải**

Từ hệ suy ra



Đặt



Hệ đã chho có dạng:



Đặt



Ta có:



Hệ đã cho tương đương với:



Giải (\*): Vì nên các nghiệm:



Ta có nghiệm và do đó nghiệm của hệ là:



hoặc



## Bài toán 2: Ứng dụng số phức vào chứng minh các công thức, đẳng thức lượng giác

**Phương pháp**

Cho dạng lượng giác số phức ;;.



Ta có các công thức sau:



Công thức Moa-vrơ :



Nếu với . Lúc đó



**I. Các ví dụ điển hình thường găp**

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:



**Giải**

Đặt . Ta có:



Mặt khác: .



Từ (1) và (2) ta được:



**Nhận xét:** Ta có bài toán tổng quát sau: Biểu diễn theo các lũy thừa của vơi n là số nguyên dương bất kỳ.



Áp dụng công thức Moivre ta có



Mặt khác, theo công thức khai triển nhị thức Newton:



Từ đó suy ra:



Trong đó:



**Cụ thể:**Với ta có:



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng:

a) ; b)



**Giải**

XétTa có



Mặt khác:



Từ (1) và (2) suy ra:

và



**Ví dụ 3.** Cho . Tính



**Giải**

Đặt . Khi đó:



Mà nên ,



suy ra:



Ta lại có nên .



**Chú ý:** Ta cũng có kết quả .



**Ví dụ 4.** Tính tổng với và



**Giải**

Đặt Theo công thức nhân và cộng thức Moivre ta có:



(Vì nên ).



Vậy



Xét phần thực và phần ảo của hai vế ta được:



**Nhận xét:** Từ hai loại công thức trên, xét các trường hợp riêng:

a) Nếu thì suy ra:







b) Nếu thì ta có:



**Ví dụ 5.** Chứng minh các công thức:



**Giải**

Ta có:



Do đó là nghiệm dương của phương trình



Vậy suy ra



**Nhận xét:** Áp dụng công thứcta tính được biểu thức



Để làm được bài toán này trước hết ta chứng minh công thức sau:



Thật vậy:



Sử dụng công thức



Ta có:



**Ví dụ 6.** Giải phương trình:



**Giải**

Đặt thì



Phương trình đã cho trở thành



(\*)



Vì không là nghiệm nên với ta có:



(\*)



Hay nên với Vì nên không nhận giá trị k=3.



Vậy nghiệm của phương trình đã cho là



Vậy nghiệm cần tìm của hệ đã cho hoặc



**Ví dụ 7.**Chứng minh rằng



**Lời giải**

Đặt Khi đó:



Mặt khác (do ),



nhưng nên suuy ra



Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 8.** Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện



Chứng minh rằng



**(Đề nghị IMO năm 1989)**

**Giải**

Đặt



Ta có



. Do đó nên



Vì nên



Vậy



Từ đó ta có



**II. Bài tập rèn luyện**

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng:

a)



**Hướng dẫn giải**

Xét , ta có , nên z là nghiệm khác -1 của phương trình . Ta có:



+)



nên



+)



Do đó xét phần thực của đẳng thức ta suy ra được:



;



**Bài tập 2.** Hãy biểu diễn qua



**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Sử dụng khai triển nhị thức Niu-ton cho vế phải và tách phần thực và phần ảo ta có



Từ đó suy ra:



**Bài tập 3.** Cho là các số thực thỏa mãn và



Chứng minh rằng:



và



**Giải**

Đặt , ta có:



nên



Vì thế:



=



Nên



Từ đó ta suy ra đều phải chứng minh.

**Bài tập 4.** Giải phương trình



**Lời giải**

Ta có không là nghiệm của phương trình.



Đặt với



Ta có



Vậy phương trình đã cho trở thành:



* Nếu thì nên



Vì và nên



Do đó nghiệm của phương trình đã cho là



* Nếu thì nên:



Vì và nên



Suy ra nghiệm cần tìm là



Vậy các nghiệm của phương trình là: và



**Bài tập 5.** Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện



Chứng minh rằng:

a)



**Giải**

Đặt



Suy ra



a) Ta có: nên lượng giác:



Từ đó ta được: và



b) Với thì



Mặt khác, từ suy ra



Vì thế:



Do đó



Vậy nên



**Bài tập 6.** Chứng minh rằng:



**Giải**

Xét số phức có



Ta có



Đẳng thức cần chứng minh trở thành



Rút gọn và chú ý ta có



Hay: (đúng)



Vậy đẳng thức được chứng minh.

**Bài tập 7.** Giả sử và là nghiệm của phương trình và . Chứng minh



**Giải**

Ta có . Không mất tính tổng quát, lấy . Theo giả thiết .



Lúc đó :



Tương tự :



Do đó . Mặt khác :



Từ đó ta có được :



## Bài toán 3: Ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức

Cho số phức . Lúc đó môđun của số phức



Cho các số phức . Ta có các bất đẳng thức thường dùng sau :



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi ta luôn có :



.



**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với



Xét .



Ta có



Mặt khác :



Áp dụng : ta được



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi ta có :



**Giải**

Xét



Ta có :



Áp dụng : ta được



**Ví dụ 3.** Cho thỏa mãn . Chứng minh rằng:



**Giải**



Theo giả thiết: . Do đó:



Áp dụng : ta được



.



**Ví dụ 4.** Cho a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn điều kiện :

.



Chứng minh rằng :



**Giải**

Từ giả thiết ta có :



Xét



Ta có :



Vì nên



**II. Bài tập áp dụng**

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng với mọi ta luôn có :



**Hướng dẫn giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với



Xét số phức :



Lúc đó :



Vì



**Bài tập 2.** Chứng minh rằng với ta luôn có



**Hướng dẫn giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với



Xét



Vì



**Bài tập 3.** Chứng minh rằng với mọi , ta luôn có :



**Hướng dẫn giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với



Xét



Ta luôn có :



**Bài tập 4.** Chứng minh rằng với ta luôn có



**Hướng dẫn giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với



Xét



Ta có :



Vì nên



## Bài toán 4. Ứng dụng giải toán khai triển hay tính tổng nhị thức Niutơn

**Phương pháp**

Ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Niutơn



Ta lưu ý rằng : thì



**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Tính tổng



**Giải**

Ta có:



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng



**Lời giải.**



**Ví dụ 3.** Tính các tổng sau



**Giải**

Xét khai triển



Lấy đạo hàm hai vế



Thay bởi ta được



Mặt khác:



Vậy



**II. Bài tập rèn luyên**

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng:



**Giải**

Xét khai triển nhị thức Newton:



Vì nên ta có:



(1)



Mặt khác, theo công thức Moivre thì:

(2)



Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Bài tập 2.** Tính tổng



**Hướng dẫn giải**

Chú ý rằng nên:



Vì



và nên:



Vậy ta có



**Bài tập 3.** Tính tổng



**Giải**

Đặt thì



Do đó ta có:



Vì nên:



Vậy



**Nhận xét:** Cho n là giá trị cụ thể, suy ra được nhiều biểu thức lượng giác đẹp.



## Bài toán 5. Ứng dụng giải toán đa thức và phép chia đa thức

**Phương pháp**

**I. Các ví dụ điển hình thường gặp**

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng đa thức chia hết cho đa thức với mọi số tự nhiên n.



Vì nên có nghiệm là



Đặt Ta có:



**Giải**

Trong các bài toán về phép chia đa thức, muốn chứng minh chia hết cho, ta chứng minh mọi nghiệm của đa thức đều là nghiệm của đa thức . Cách làm này gặp phải khó khăn nế như không có nghiệm thực, tuy nhiên số phức giáp ta giải quyết vấn đề này.



Vậy cũng là nghiệm của , do đó chia hết cho



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 và số thực thỏa mãn , đa thức chia hết cho đa thức .



**Giải**

Xét phương trình nên có nghiệm là hai số phức liên hợp.



Đặt ta có:



Suy ra hay Vậy chia hết



**Ví dụ 3.**  Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức chia hết cho đa thức .



**Lời giải**

Các nghiệm cuả đa thức là:



Đặt Vì là hai số phức liên hợp, nên chỉ cần tìm n sao cho (khi đó sẽ bằng không).



Ta có: nên



Vậy đa thức chia hết cho đa thức khi và chỉ khi n là số nguyên dương không chia hết cho 3.



**Ví dụ 4.** Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức chia hết cho đa thức .



**Lời giải**

Các nghiệm của đa thức là:



Đặt



Vì do đo



Vậy giá trị cần tìm của n là những số nguyên dương chia cho 6 dư 1 hoặc chia 6 dư 5.

**Ví dụ 5.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

a)  **;** b)



**Giải**

a) Ta có



Mà:



Nên



b) Ta có:



Bằng cách giải các phương trình bậc hai , ta phân tích được thành tích:



Mặt khác:



Vậy



**II. Bài tập áp dụng**

**Bài tập 1.** Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho đa thức

chia hết cho đa thưc



**Hướng dẫn giải**

Các nghiệm của đa thức là:



Đặt , ta có , nhưng



* Nếu thì .



Nếu thì



Vậy không tồn tại số nguyên dương n để đa thức chia hết chho đa thức



**Bài tập 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

a) ; b)



**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:



Vì











Vậy



b)



Ta có:







Vì vậy

