**CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN**

**1.1. DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP.**

1. Cho dãy số  xác định bởi : . Xác định số hạng tổng quát của dãy đã cho.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:.

.

Dự đoán: .

Chứng minh theo quy nạp ta có.

, công thức  đúng với . Giả sử công thức  đúng với  ta có .

Ta có: .

Công thức  đúng với .

Vậy, **.**

1. Cho dãy số biết . Xác định số hạng tổng quát của dãy.

**Hướng dẫn giải**

.

Đặt .

.

Dãy cấp số nhân với công bội là .

Nên .

Do đó .

1. Cho dãy số xác định bởi.Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số theo .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Với mọi , ta có.

.

.

Dãy số  là cấp số nhân có công bội  và.

**.**

1. Cho hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện:.

(1) , .

(2) , .

a/Chứng minh: , .

b/Tìm biểu thức .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Câu a.

Vì  nên từ giả thiết (1) ta được: , .

Kết hợp giả thiết (2) ta được .

 do đó: , .

Câu b.

,.

Suyra:.

Thử lại thỏa các điều kiện, nên .

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

b)Cho dãy số  có . Tìm số hạng tổng quát .

**Hướng dẫn giải**

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

Gọi d là công sai, số hạng thứ 2 là a. Khi đó 3 số hạng đầu của csc là .

Theo giả thiết ta có hệ: .

.

Vậy có 2 cấp số thỏa mãn có 3 số hạng đầu là: -4;3;10 hoặc 10;3;-4.

b)Cho dãy số  có . Tìm số hạng tổng quát .

Ta có: .

 (1).

Đặt**.**

(1) trở thành:  (2).

Đặt .

(2) trở thành:  là csn có .

Từ đó ta có: .

1. Cho dãy số  xác định bởi : .

Chứng minh :  là số chính phương với mọi n nguyên dương.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Đặt  thì .

Khi đó  .

Ta có : .

Suy ra : .

Suy ra :  .

Từ hệ thức  và là các số chính phương suy ra là số chính phương với mọi n nguyên dương.

1. Cho dãy số  tăng, và . Xét dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng tồn tại .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng thấy rằng dãy  tăng ngặt.

Trường hợp 1. Nếu .

 vậy dãy .

bị chặn trên do đó tồn tại .

Trường hợp 2. Nếu .

 thật vậy .

. Ta chứng minh (\*\*).

Xét hàm số  Trên đoạn  rõ ràng hàm số thoả mãn điều kiện của định lí Lagrăng nên tồn tại số  thoả mãn  đpcm.

Từ đó ta có.

dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

1. Cho dãy số  được xác định bởi :  và.

 với mọi .

Tính giới hạn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

.

.

=.

Do đó ta suy ra : .

Ta chứng minh . Thật vậy với , ta có .

Giả sử với  ta có : .

Ta có :  theo (\*) hay  trong.

.

1. Cho hàm số  thỏa mãn điều kiện  với mọi . Chứng minh rằng  với mọi .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

Từ (1) suy ra  (2).

Khi đó .

Xét dãy ,  được xác định như sau:  và .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo *n* rằng với mỗi  luôn có.

với  (3).

Thật vậy, khi  thì theo (2), ta có ngay (3).

Giả sử mệnh đề (3) đúng với . Khi đó.

.

Vậy (3) đúng với .

Tiếp theo ta chứng minh . Thật vậy, ta thấy ngay . Do đó:, suy ra dãy  tăng ngặt.

Dãy  tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt  thì  với , suy ra . Vậy .

Do đó từ (3) suy ra  với mỗi  (đpcm).

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây.

1.  với mọi .

2.  với mỗi .

**Hướng dẫn giải**

 và bởi vì  cho nên .

.

.

.

Dùng quy nạp theo  ta CM được .

Cố định  ta có .

Xét dãy  ta có:.

.

Vậy .

Vậy .

Kết hợp (1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp (2) và (4) ta được . Thử lại  ta thấy đúng. Vậy .

Kết hợp (1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp (2) và (4) ta được . Thử lại  ta thấy đúng.

1. Cho dãy số xác định bởi . Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

Trước hết, bằng quy nạp, ta dễ dàng có  và dãy số đã cho là dãy tăng.

Ta có :.

.

Giả sửvới . Ta có: .

Theo nguyên lý quy nạp ta có .

Ta có : thật vậy :  ;.

Do đó .

Ta có với thì.

Do đó  thì .

Suy ra .

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

1. Cho dãy sốxác định như sau .

a) Xác định số hạng tổng quát .

b) Tính .

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi ta được:với  khi đó:.

nghĩa là dãy là một cấp số cộng của .

.

.

1. Cho dãy số được xác định như sau.

,.

với mọi . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của dãy ta được.

.

Do đó . Từ đó .

1. Cho dãy số  xác định bởi .

Đặt . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Cho dãy số  xác định bởi .

Đặt . Tính .

Ta có .

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được .

.

Từ  suy ra .

Do đó .

Ta chứng minh .

Thật vậy, ta có .

Suy ra  là dãy tăng, ta có .

Giả sử ngược lại  bị chặn trên và là dãy tăng nên  thì . Khi đó  (vô lý). Suy ra  không bị chặn trên, do đó .

Vậy .

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số  biết**.**

**.**

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên ta có:.

.

.

.

Đặt ,  thu được.

.

.

Đặt ,  thu được.

.

.

Do đó.

.

Như vậy ,.

Từ đó, với , ta có.

.

.

Vậy  .

1. Cho dãy số  xác định bởi .

Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số theo .

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên.

.

.

.

.

Đặt , khi đó ta có: .

Lại có: .

Từ đẳng thức trên ta có công thức tổng quát của dãy  là: .

Từ đó ta có công thức tổng quát của dãy  là: .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi .

a)Xác định số hạng tổng quát của dãy số .

b)Tính tổng .

**Hướng dẫn giải**

a)Dễ thấy .

Từ .

Đặt  thì có: .

Đặt  thì ta có:. Từ đây suy ra  là cấp số nhân với , công bội là 3.

Nên: .

b)**.**

**.**

.

1. Cho dãy số  được xác định bởi  và  với mọi .

a)Chứng minh rằng: .

b)Tính tổng  theo .

**Hướng dẫn giải**

a)Khi :  đúng.

Giả sử  đúng với .

Ta chứng minh: .

Thật vậy: .

b)**.**

.

1. Cho dãy số(un) xác định như sau: .

**a)** Chứng minh: .

**b)** Tính: .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: .

(Vì  dương).

b) Đặt , ta có: , .

Ta chứng minh:  (\*).

Với :  đúng.

Giả sử (\*) đúng với , , hay ta có: .

Ta có: .

Vậy (\*) đúng với . Vậy .

Cho , ta có: .

.

1. Cho dãy số thực  với  .

a) Chứng minh  với mọi .

b) Tính tổng .

**Hướng dẫn giải**

a) *Dùng phương pháp qui nạp*.

, .

Giả sử .

Ta có: .

.

Vậy  với mọi .

b).

.

1. Cho dãy số  với .

Tìm số dư khi chia  cho .

**Hướng dẫn giải**

Xét dãy số  với .

Ta có  với mọi .

Xét phương trình đặc trưng:.

Phương trình trên có nghiệm.

 có dạng . Vì  nên .Ta có:.

Ta có: .

Ta có  là số nguyên tố Theo định lý Fecma ta có:.

.

Suy ra ,.

Vậy khi chia  cho  ta được số dư là .

Suy ra khi chia  cho  ta được số dư là .

1. Cho dãy số .

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

Ta có: ; Chứng minh:  bằng phương pháp quy nạp.

Ta có:.

Giả sử:  và . Chứng minh: .

Ta có: . Vậy .

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số .

Ta có: .

Đặt , ta được: .

Ta được: là cấp số nhân có công bội .

Suy ra: .

Vậy .

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy biết rằng:.

 ().

**Hướng dẫn giải**

Từ đề bài ta có: với mọi .

Ta có:  với mọi .

Đặt  ta được với mọi .

Vì phương trình đặc trưng của dãy có hai nghiệm phân biệt  nên với mọi .

Với  ta có . Suy ra với mọi .

Ta có với mọi .

Kết hợp với , ta suy ra với mọi .

1. Cho dãy số .

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

b) Lập công thức tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

**a) Chứng minh dãy số**  **là dãy số giảm**.

Ta có: .

Giả sử:  với k >1. Cần chứng minh: .

Ta có: .

Mà .

 ⇒(điều phải chứng minh).

**b) Lập công thức tổng quát của dãy số** .

Ta có .

Xét dãy số , ta có: .

 là cấp số nhân .

.

1. Cho dãy số .

**a)** Chứng minh rằng .

**b)** Lập công thức tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

a) **Chứng minh rằng** .

Ta có: .

Giả sử: ; Cần chứng minh: .

Ta có: . Vậy .

**b)Lập công thức tổng quát của dãy số** .

Đặt  ta có .

.

 là cấp số nhân .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi: .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy.

b) Tìm số dư khi chia  cho .

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt  ta có: .

Khi đó .

Lại có:.

.

.

.

Do đó . Hay .

Vậy .

b) Ta có  chia cho 2015 dư 1.

1. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: . Đặt , khi đó ta được dãy  xác định như sau:  và .

Vì .

Bằng quy nạp ta chứng minh được: .

**.**

**1.2. DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI.**

1. Cho dãy số biết . Xác định số hạng tổng quát của dãy.

**Hướng dẫn giải**

.

.

Dãy cấp số nhân với công bội là.

Nên .

Do đó .

1. a) Tính giới hạn .

b) Cho dãy số (un) xác định bởi : . Tìm công thức tính theo .

**Hướng dẫn giải**

a) Tính giới hạn .

Ta có: .

.

Vậy .

b) Ta có:.

.

Dự đoán: .

Chứng minh:.

Ta có: , công thức (1) đúng với .

Giả sử công thức (1) đúng với  ta có: .

Ta có: .

Công thức (1) đúng với .

Vậy  .

1. Cho dãy số  xác định bởi:. Tìm công thức của số hạng tổng quát ?.

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Thay vào giả thiết:.

.

Ta có .

Đặt .

.

Ta có .

Suy ra .

1. Cho dãy số  xác định bởi:   Tìm công thức số hạng tổng quát  theo .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  Khi đó .

Với mọi đặt   .

Suy ra, dãy số  là cấp số cộng có  và công sai .

Do đó,  .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi:  Tìm công thức số hạng tổng quát  theo .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi , ta có.

.

Xét dãy số  với  Ta có:  Do đó, dãy số  là một cấp số nhân có công bội  và số hạng đầu bằng .

Suy ra .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi:  Tìm công thức số hạng tổng quát  theo .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi , ta có.

.

.

dãy số  là cấp số nhân có công bội  và .

.

1. Cho dãy số (un) xác định bởi: .

Xét dãy số  với . Chứng minh dãy số  là một cấp số cộng. Tìm số hạng tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  thay vào hệ thức truy hồi ta có.

.

hay  và . Suy ra dãy số  là một cấp số cộng có  và công sai .

Ta có .

Do đó . Thử lại thấy dãy số này thỏa mãn.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số  là .

1. Cho dãy số  xác định bởi:.

.

Tìm công thức của số hạng tổng quát ?.

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Thay vào giả thiết:.

.

Ta có .

Đặt .

.

Ta có .

Suy ra.

.

**1.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy dãy đã cho là dãy số dương, do đó không có số hạng nào của dãy bằng 0. Từ công thức truy hồi của dãy ta có .

Đặt , ta được dãy số .

Dễ thấy dãy  là dãy số dương và . Do đó.

 Vậy ta có .

Xét hàm số . Ta có  Do đó có hai dãy con đơn điệu của dãy  và hai dãy con này đều bị chặn nên chúng có giới hạn. Giả sử  và  thì ta có hệ.

.

Ta thấy chỉ có  thỏa mãn và đây là giới hạn cần tìm.

1. Tìm số các dãy số  thỏa mãn điều kiện: .

**Hướng dẫn giải**

 Viết lại  với .

Nhận xét: .

Vì vậy: .

 Với  tồn tại duy nhất α:  và .

Lúc đó: ; .

Quy nạp ta được: .

.

⇔ .

Vì  nên .

Do  nên: .

Từ đó có tất cả  giá trị u1 thỏa bài toán: .

Do đó có tất cả  dãy số  thỏa điều kiện đã cho.

1. Cho  là các nghiệm dương của phương trình  được sắp theo thứ tự tăng dần. Tính .

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số , với . Ta có  =>  tăng từ  đến .

Suy ra: trong khoảng  phương trình  có nghiệm duy nhất .

 với =>  => .

 =  = .

1. Cho dãy số xác định như sau: . Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử tồn tại , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  nên  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay  nói riêng  từ đó ta được .

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được  (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy  tăng, bị chặn trên bới , do đó dãy  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn và .

1. Cho hai dãy số  và  được xác định như sau:.

, ;, .

Chứng minh rằng  và  có cùng giới hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:.

; (2).

Từ (1), (2) tồn tại  và .

Ngoài ra: .

.

Vậy hai dãy  có cùng giới hạn chung là .

1. Cho dãy số (xn) thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh   với mọi n  1 (1).

Thật vậy:  đúng.

Giả sử (1) đúng với  .

 = .

.

 (đpcm).

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi .

Ta có  với mọi  1.

Vậy  có giới hạn.

1. Tam giác mà 3 đỉnh của nó là ba trung điểm của ba cạnh tam giác  được gọi là tam giác trung bình của tam giác .

Xây dựng dãy các tam giác    sao cho tam giác  là một tam giác đều cạnh bằng 1 và với mỗi số nguyên  tam giác  là tam giác trung bình của tam giác . Với mỗi số nguyên dương , kí hiệu  tương ứng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng dãy số  là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó?.

**Hướng dẫn giải**

+  là một cấp số nhân với công bội  và số hạng đầu .

+ Số hạng tổng quát: .

1. Cho dãy số  được xác định bởi:  và  với mọi  Xét dãy số  mà:  với mọi .

a) Chứng minh rằng dãy số  là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b) Cho số nguyên dương . Hãy tính tổng  số hạng đầu tiên của dãy số  theo . Từ đó, hãy suy ra số hạng tổng quát của dãy số .

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết  là một cấp số cộng với số hạng đầu  và công sai .

b) + Tổng  số hạng đầu của dãy  là: .

+ Số hạng tổng quát của dãy  là: .

1. Cho dãy số  được xác định bởi .

Tìm số  nhỏ nhất để chia hết cho 2048.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi cuả dãy , đặt , thì dãy () xác định bởi .

Phương trình đặc trưng : , từ đó suy ra : .

.

Do  là số là số lẻ nên .

.

Vậy  là giá trị cần tìm thỏa mãn điều kiện bài toán.

**1.6. SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC**

1. Cho dãy số  định bởi . Tính .

Hướng dẫn giải.

Tính đúng .

.

Từ  ta viết được .

Theo quy nạp từ  và .

Vậy .

1. Cho dãy số xác định như sau: . Tính .

Hướng dẫn giải.

Ta có: .

Nên từ giả thiết ta có: .

Đặt , suy ra .

Theo quy nạp ta dễ dàng suy ra: .

Suy ra: .

.

**1.7. CÁC DẠNG KHÁC**

a/Tìm  sao cho hệcó nghiệm.

b/Với  tìm được ở câu a/,hãy xác định tập hợp tất cả các giá trị của tổng:.

với  và .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Câu a.

Do:.

:Khi đó: . Vậy hệ có nghiệm.

:Chọn  vàcó nghiệm. Nên  là nghiệm của hệ.

:có nghiệm. Nên  là nghiệm của hệ.

:Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi .

Câu b

Ta có: .

Xét hàm: . Ta có: .

Do đó:Dấu đẳng thức xảy ra khi:.

 vì . Dấu đẳng thức xảy ra khi,liên tục trên . Khithì.Vậy , tập giá trị là:.

:Chọn .Thỏa giả thiết:.

liên tục trên;.Vậy tập giá trị là:.

Chọnthỏa giả thiết:với;liên tục trên;.Tập giá trị là:.

1. Kí hiệu  là tập hợp các đa thức bậc  dạng: . Chứng minh: .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Xét đa thức Trêbưsép .

Chứng minh  là đa thức bậc  có hệ tử bậc  là .

Chứng minh bằng quy nạp dựa vào công thức:.

Do đó: . Ta có . Nếu tồn tại  sao cho ,.

. Lúc đó ta xét   đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng ,  đổi dấu  lần tại các điểm , .

Do đó . Vậy .

1. Cho dãy số  không âm thỏa mãn ,

và ,.

Chứng minh rằng  là số nguyên với mọi nguyên tố lớn hơn hoặc bằng .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Viết lại đẳng thức trong đầu bài về dạng .

Từ  không âm dẫn đến , với mọi .

Biến đổi về ,.

1. Cho dãy số dương  thoả mãn:  với mọi số tự nhiên . Chứng minh rằng dãy {xn} hội tụ.

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Từ (1) và (2) suy ra .

Với  tuỳ ý, khi  đủ lớn, ta có .

Nếu  thì .

Nếu  thì .

Mà .

Tóm lại, cả hai trường hợp đều dẫn đến .

Vậy dãy số {xn} hội tụ.

1. Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau:.

.

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên  sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó .

.

.

 (1). Lại có , suy ra .

  (do (1)).

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2).

Chọn , , từ (2) ta có .

Vậy  chia hết cho , .

1. Cho dãy  với n > 0 được xác định bởi:.



a) Chứng minh  chia hết cho  với mọi giá trị nguyên dương của .

b) Đặt . Chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương  để 2015 là một ước của .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có    .

Dễ thấy  với  Bằng quy nạp ta chứng minh dãy  trùng với dãy .

Thật vậy:.

Mệnh đề đúng với  Giả sử mệnh đề đúng đến . Khi đó ta có:.

.

Dùng công thức của dãy Fibonaci :  ta dễ dàng biến đổi vế phải thành .

suy ra .

Vậy mệnh đề đúng với , do đó nó đúng với mọi  nguyên dương.

Điều đó chứng tỏ  luôn chia hết cho  với mọi  nguyên dương.

b) Gọi  là số dư của  cho 2015 với .

Trước tiên ta chứng minh  là một dãy tuần hoàn. Thật vậy: Ta có .

Vì có vô hạn các cặp  .,  nhưng chỉ nhận hữu hạn giá trị khác nhau nên tồn tại ít nhất hai phần tử của dãy trùng nhau. Ta giả sử là  (với  là một số nguyên dương).

Ta chứng minh  tuần hoàn với chu kỳ .

+) Ta có:  .

 .

Tiếp tục như vậy ta chứng minh được:  với mọi  (1).

+) Ta có:  .

.

.

Bằng quy nạp ta chứng minh được: với  (2).

Từ (1) và (2) suy ra là một dãy tuần hoàn.

Bổ sung vào dãy  phần tử  thỏa mãn  suy ra .

Khi đó dãy  là dãy tuần hoàn bắt đầu từ phần tử đầu tiên  Do đó tồn tại vô số phần tử trong dãy  bằng 0.Như vậy câu b) được chứng minh xong.

1. Cho dãy số  được xác định như sau: Chứng minh rằng  khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Công thức tổng quát .

Đặt .

Ta có , .

Đặt . Khi đó ta được dãy  được xác định như sau: .

Do  nên bằng quy nạp ta được:  hay .

Do đó .

Giả sử , trong đó  đều lẻ.

1. Cho dãy số . Chứng minh có nhiều nhất 1 số hạng của dãy là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

So sánh đồng dư của ,  và  theo modun 4 ta có (chú ý ).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 3 | 0 | 3 | 2 |
|  | 2 | 3 | 2 | 3 |

Một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vì vậy từ số hạng thứ 3 trở đi, dãy không có số chính phương nào.

Nếu cả  và  đều chính phương, giả sử ,.

suy ra .

Hơn nữa khi phân tích 2019 thành tích chỉ có 2 cách .

Trường hợp 1: , vô lí do 1009 không là lập phương.

Trường hợp 2: , vô lí do 335 không là lập phương.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là dãy trên có nhiều nhất 1 số chính phương.

1. Cho dãy  thỏa mãn các điều kiện sau :. Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Bằng quy nạp ta chứng minh được , với mọi .

Ta có: .

.

Ta chứng minh rằng nếu  thì  (1).

Thật vậy:.

Với  thì (1) đúng.

Ta có .

Giả sử, tồn tại , mà , điều này chứng tỏ, với mọi  thì . Điều này mâu thuẫn với .

Vậy, với  thì .

Do đó .

1. Cho dãy số xác định bởi: . Tìm  chẵn thỏa mãn và là lập phương của 1 số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét thấy :.

.

Khi đó, giả sử :.

Cần chứng minh: (1) thật vậy ta có.

.

=  suy ra (1) đúng.

 .

Khi đó , giả sử tồn tại  chẵn để là lập phương của 1 số tự nhiên:.

Khi đó . Mặt khác  chẵn suy ra  lẻ suy ra  khi đó đặt.

  mà  nên:.

 (2). Giải hệ (2) ta được hệ không có nghiệm nguyên với mọi  suy ra không tồn tại n chẵn.

Vậy không tồn tại  chẵn để  là lập phương của một số tự nhiên.

1. Cho dãy số  được xác định như sau: Chứng minh rằng  khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Công thức tổng quát .

Đặt .

Ta có , .

Đặt . Khi đó ta được dãy  được xác định như sau: .

Do  nên bằng quy nạp ta được:  hay .

Do đó .

Giả sử , trong đó  đều lẻ.

Từ đẳng thức này ta được  khi và chỉ khi .

1. Cho dãy số thực được xác định như sau: . Chứng minh rằng:  ( kí hiệu  là phần nguyên của số thực ).

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh rằng: , với .

,  quy nạp .Với  đúng giả sử đúng đến . Tức là . Từ đó suy ra.

.

 .

Việc tiếp theo ta chứng minh . Ta có BĐT  thật vậy,.

Xét hàm số  .

 hàm số  giảm trên khoảng.

, ta suy ra  áp dụng.

.

Từ đó: .

**2. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ.**

1. Cho cấp số cộng  với  là số nguyên dương thoã mãn . Tính tổng: .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng chứng minh được số hạng tổng quát của cấp số cộng  là .

Khi đó.

.

1. Cho dãy số thực  được xác định bởi. .. Tìm tất cả các giá trị của  để  với mọi số tự nhiên .

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  với .

Từ  có *.*

Lại từ  có .

Suy ra  và .

Từ đó .

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

.

Mà  nên phải có .

Thử lại với  thì .

Vậy  là giá trị duy nhất cần tìm.

1. Cho dãy số  xác định bởi . Tìm  để  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của xn ta có.

.

Vậy  là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn  là số chính phương.

Đặt .

Ta có .

Khi đó ta tìm được *a* = 201, *b*=1 thì .

Với *a* = 85, *b* =82 thì .

Vậy *n* = 2 thì  là số chính phương.

1. Dãy số xác định như sau:. Chứng minh rằng.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  . (1).

Do  .

Từ đó bằng phép quy nạp ta suy ra  là dãy đơn điệu tăng thực sự, và *un* nhận giá trị nguyên dương lớn hơn hoặc bằng  với mọi .

Ta viết lại điều kiện truy hồi xác định dãy số dưới dạng sau đây:.

 (2).

Từ đó dẫn đến: Bây giờ từ (3), ta có:.

.

Từ (4) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

.

(ở đây  ). Ta sẽ chứng minh (5) đúng với mọi *.* Khi đó nó sẽ đúng với .

Do  nguyên dương với mọi , (5) tương đương.

 (6).

Xét khi . Theo (2), ta có: .

Vì thế theo giả thiết quy nạp suy ra:.

.

Như thế với , ta thu được:.

.

Từ (8) suy ra (6) đúng với mọi .

Vì vậy (5) đúng . Ta có điều phải chứng minh!.

1. Cho dãy : .

a) Chứng minh dãy  hội tụ và tính .

b) Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: .

Đặt  và xét hàm .

Suy ra , như vậy  nghịch biến trên đoạn .

Dẫn đến .

Kết hợp công thức xác định dãy ta được: .

Vậy .

b) *Nhận xét:*  thì .

Dẫn đến  .

 (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với .

Trường hợp , chú ý , kết hợp với (1) thu được:.

.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

1. Cho dãy số  như sau .

a) Chứng minh .

b) Đặt . Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố và n > 2 thì chia hết cho n.

**Hướng dẫn giải**

a) Với , .

, .

Giả sử .

Chứng minh .

Ta có.

.

.

.

Vậy .

b) Đặt . Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố và  thì chia hết cho .

Ta có: .

.

Với  là số nguyên tố  chia hết cho .

Do  là số nguyên tố lớn hơn   chia hết cho .

Vậy .

1. Cho dãy số . Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố và  thì  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  hay .

Khi đó .

Ta được .

Phương trình đặc trưng  có nghiệm .

Khi đó .

Ta có .

Suy ra .

Khi đó .

Ta có  nên  chia hết cho .

Mặt khác  là số nguyên tố nên theo định lý Fermat.

 hay .

Từ đó .

Suy ra  chia hết cho .

Với  là số nguyên tố và .

Suy ra  chia hết cho .

1. Cho dãy số  với .

a) Chứng minh , với mọi .

b) Đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh , với mọi .

.

Giả sử ta có  .

.

Suy ra .

Vậy theo qui nạp  với .

b) Đặt . Tìm .

Ta có:.

.

.

.

 (vì ).

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định như sau:.. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố  thì  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi  ta có: .

Từ đó có: .

Vậy , lại có  nên .

+ Nếu : có ngay đpcm.

+ Nếu  là số nguyên tố lẻ: .

.

Theo Định lí Fermat nhỏ, suy ra  chia hết cho . Mặt khác cũng chia hết cho  nên:  chia hết cho . Từ đó.

chia hết cho .

Vậy bài toán được chứng minh cho mọi trường hợp.

1. Cho dãy số  xác định bởi . Tìm  để  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của xn ta có.

.

Vậy  là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn  là số chính phương.

Đặt .

Ta có .

Khi đó ta tìm được  thì .

Với  thì .

Vậy *n* = 2 thì  là số chính phương.

1. Bài 3. Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên *n* sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó .

.

.

 (1). Lại có , suy ra .

  (do (1)).

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2).

Chọn , , từ (2) ta có.

.

Vậy  chia hết cho , .

1. Cho dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Ta có.

.

Đặt . Ta được dãy số  xác định bởi .

Ta phải chứng minh  là số chính phương.

Thật vậy, xét dãy số  ) xác định bởi .

Hiển nhiên dãy số  là dãy số nguyên.

Ta có .

Ta sẽ chứng minh  (1) bằng quy nạp.

Thật vậy, rõ ràng với , (1) đúng.

Giả sử (1) đúng đến , tức là .

ta chứng minh (1) đúng với *n* = *k*+2, nghĩa là chứng minh .

Thật vậy, theo công thức truy hồi của dãy số , giả thiết quy nạp, tính chất (2) của dãy số , công thức truy hồi của dãy số , ta có.

.

Do đó  là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.

1. Cho dãy sốđược xác định bởi  a là số thực

a))Tìm a sao cho dãy số có giới hạn hữu hạn.

b)Tìm a sao cho dãy sốlà dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

**Hướng dẫn giải**

a)Ta có, trong đó.

Khi .

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi .

b)Từ lý luận phần a) ta suy ra)

.

Bởi vậy điều kiện cần để tồn tại sao cho là .

Ta đi chứng minh là điều kiện đủ để có kết luận trên.

Thật vậy: Với .

.

Vì.

.

Suy ra .

Vậy dãy sốlà dãy số tăng kể từ số hạng nào đó với  và trong trường hợp đó là dãy số tăng từ .