**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN.QUAN HỆ SONG SONG**

**A. LÝ THUYẾT**

**I. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

**1. Mặt phẳng**

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ như mặt phẳng  …

Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.



Đường thẳng và mặt phẳng là tập hợp các điểm. Do đó,

- Nếu điểm  thuộc đường thẳng , ta kí hiệu  và đôi khi còn nói rằng đường thẳng  đi qua điểm .

- Nếu điểm  thuộc mặt phẳng , ta kí hiệu  và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng  đi qua điểm .

- Nếu đường thẳng  chứ trong mặt phẳng , ta kí hiệu  và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng  đi qua (hoặc chứa) đường thẳng .

**2. Quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian**

- Hình biểu diễn của một đường thẳng là một đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì phải được vẽ song song và bằng nhau. Trung điểm của một đoạn thẳng phải được lấy ngay tại điểm chính giữa của đoạn thẳng đó.

- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

**3. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian**

- Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

- Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Như vậy, một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

- Mặt phẳng đó đi qua 3 điểm không thẳng hàng . Kí hiệu là mp.

- Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và một điểm  không thuộc đường thẳng . Kí hiệu: ;

mp.



- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau  và  . Kí hiệu, mp.

- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song ,.

- Tính chất 3: Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.

- Tính chất 4: Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

- Tính chất 5: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

- Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

**3.Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian**

**a) Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng**

Cho đường thẳng  và một mặt phẳng . Có thể xãy ra các khả năng sau:

- Đường thẳng và mặt phẳng  không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng  song song với mặt phẳng , kí hiệu  .



- Đường thẳng và mặt phẳng có đúng một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói ta nói đường thẳng cắt mặt phẳng tại , kí hiệu: 

- Đường thẳng  và mặt phẳng có nhiều hơn một điểm chung.Trường hợp này ta nói đường thẳng  nằm trong mặt phẳngta kí hiệu:  hay .

**b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:**

Cho hai mặt phẳng phân biệt  và  . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Hai mặt phẳng  và không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng  và song song với nhau, kí hiệu  .

- Hai mặt phẳng  và có ít nhất một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng  và có phần chung là một đường thẳng, giả sử đường thẳng đó là  , ta kí hiệu  .

Đường thẳng  được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Như vậy, việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương ứng với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng phân biệt đó. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm phân biệt cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một được thẳng.

**c) Vị trí tương đối của hai đương thẳng:** Cho hai đường thẳng phân biệt  và  . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng  và  cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó  và  hoặc cắt nhau tại một điểm hoạc song song với nhau.

- Các đương thẳng  và  không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta nói các đường thẳng  và  chéo nhau.



**4. Hình chóp và hình tứ diện**

****

**1. Hình chóp:**

Trong mặt phẳng  , cho đa giác lồi  .Lấy điểm  nằrm ngoài mặt phẳng . Lần lượt nối với các đỉnh để được n tam giác  .Hình gồm đa giác và n tam giác và gọi là hình chóp và được kí hiệu là 

Ta gọi S là đỉnh, đa giác là mặt đáy, tam giác gọi là một mặt bên của hình chóp, Các đoạn thẳng gọi là các cạnh bên, các cạnh của đa giác là các cạnh đáy của hình chóp.

-Cách gọi tên: Hình chóp + tên đa giác.

- Ví dụ: hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác….

**Lưu ý:** Hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhaulaf hình chóp đa giác đều.

**b) tứ diện:**

Tứ diện  là hình được thành lập từ bốn điểm không đồng phẳng.Các điểm là các đỉnh của tứ diện, các tam giác được gọi là các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh  và các đoạn thẳng gọi là các cạnh của tứ diện . Trong đó các cặp cạnh  và ,  và DB,  và  thường được gọi là các cặp cạnh đối của tứ diện.

**B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

***DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN GIŨA HAI MẶT PHẲNG***

**Phương pháp:** Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và  ta tiến hành đi tìm hai điểm thuộc cả hai mặt phẳng  và  .

**Lưu ý:**

Một điểm chung của hai mặt phẳng  và  thường tìm được bằng cách: Chọn một mặt phẳng  sao cho các giao tuyến của  và  với có thể dựng được ngay. Giao điểm  của  ( trong ) là điểm chung cần tìm.

Ta thường chứng minh ba điểm thẳng hàng bằng cách chứng minh ba điểm đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

+ Ta cũng có thể chứng minh bà đường thẳng đồng quy bằng cách:

**Cách 1:** Hai trong ba đường thẳng ấy cắt nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng nhận đường thứ ba làm giao tuyến.

**Cách 2:** Tìm một đoạn thẳng  trên một đường thẳng nào đó. Chứng minh hai đường thẳng còn lại chia đoạn  theo cùng một tỉ số đại số.

***DẠNG 2: XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG  VÀ MẶT PHẲNG  .***

**Phương pháp:**

+ Nếu phát hiện ra một đường thẳng  trong mặt phẳng  cắt  tại  thì  chính là giao điểm của  với mặt phẳng  .

+ Nếu chưa phát hiện ra đường thẳng thì ta dựng  bằng cách: Chọn một mặt phẳng  chứa  sao cho giao tuyến của  và  có thể dựng được ngay, giao tuyến đó chính là đường thẳng  cần tìm.

**Hai định lí quan trọng thường dùng:**

**Định lí Ceva:** Cho tam giác  . Các điểm  khác  và theo thứ tự thuộc các đường thẳng  . Khi đó các đường thẳng  hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi 

**Định lí Menelaus :** Cho tam giác  . Các điểm  khác  và theo thứ tự thuộc các đường thẳng  . Khi đó các điểmthẳng hàng khi và chỉ khi  **.**

***DẠNG 3: BÀI TOÁN DỰNG THIẾT DIỆN***

Cho trước khối đa diện  và mặt phẳng  . Nếu có điểm chung với  thì  sẽ cắt một số mặt của  theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng  giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là mặt cắt ( còn gọi là thiết diện) giữa  và .

**Chú ý:**

+ Đỉnh của thiết diện là giao điểm của  với các cạnh của  . Cạnh của thiết diện là các đoạn giao tuyến của  với các mặt của  . Do đó thực chất của việc dựng thiết diện là bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng.

+ Do mỗi cạnh của thiết diện là đoạn giao tuyến của mặt phẳng  với một mặt của  . Do đó số cạnh nhiều nhất mà thiết diện có thể có chính là số mặt của  .

- Đối với hình chóp tam giác ( hoặc tứ diện), thiết diện của nó cắt bởi mặt phẳng  chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác ( ở đay ta quy ước không xét các trường hợp suy biến khi thiết diện là một mặt hoặc một cạnh của hình chóp).

-Đối với hình chóp tứ giác, thiết diện của nó chỉ có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác.

**Các bài toán liên quan đến thiết diện gồm các dạng:**

+ Dựng thiết diện.

+ Xác định hình dạng thiết diện.

+ tính diện tích thiết diện.

+ Tính tỉ số thể tích hai phần do thiết diện phân chia khối thể tích đã cho ( sẽ được trình bày trong Công phá toán tập 3).

1. Cho hình chóp  có đáy là một hình bình hành tâm  . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và  . Gọi  là mặt phẳng qua 3 điểm  .

a) Tìm các giao tuyến của  và  ; và .

b) Tìm giao điểm  của đường thẳng  với mặt phẳng  và giao điểm  của đường thẳng  với mặt phẳng  .

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng  với mặt phẳng  và mặt phẳng  . Từn đó suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi  .

d) Xác định các giao điểm  của các đường thẳng ,  với  . Chứng minh rằng  thẳng hàng.

***Lời giải:*:**

****a) Ta có:



Lại có 

Từ (1) và (2) suy ra

Ta có : 

Từ (3) và (4) suy ra  .

Tương tự ta cũng suy ra  .

b) Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của với 

Ta có :

 là giao điểm của với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của với . Ta có :

 . Suy ra  chính là giao điểm của  với  .

c) Ta có :  .

Ta lại có :  .

Như vậy tứ giác  là thiết diện của hình chóp  cắt bởi mặt phẳng  .

d) Trong mặt phẳng , gọi . Ta có:  nên  .

Vậy  chính là giao điểm của  với  .

Trong mặt phẳng  gọi  .

Ta có nên  ,

, 

Suy ra ba điểm  cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng  và  . Do đó ba điểm  thẳng hàng.

1. Cho tứ diện và các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho  không song song với  . đồng phẳng khi :

**A.  B. **

**C.  D. .**

**Đáp án A.**

***Lời giải:*.**

+ Giả sử  cùng thuộc mặt phẳng  .

Nếu  cắt  tại  thì  là điểm chung của các mặt phẳng  , nên  cũng đi qua 

Áp dụng định lí  cho các tam giác  ta được :

** ;**

**Nhận xét :**

Trường hợp  song song với  thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có  thì  có đồng phẳng hay không ?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé :

Trong mặt phẳng ,  cắt  tại  thì các điểm  đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: . Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể được mở rộng đối với các điểm  bất kì trên các đường thẳng  như sau :

 đồng phẳng khi và chỉ khi  ( khẳng định này dôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian)

1. Cho hình chóp  và  là điểm thuộc mặt bên  . lần lượt là trung điểm của  . Thiết diện của hình chóp cắt bởi  là :

**A.** Tam giác. **B.** Tứ giác**. C.** Ngũ giác**. D.** Lục giác.

**Đáp án C.**

***Lời giải:* :**

Trong mặt phẳng  , gọi  lần lượt là giao điểm của  với 

Dễ thấy thiết diện là hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng  là ngũ giác .

Vậy đáp án đúng là C.

b) Theo cách dựng ta có  là trung điểm của . Do đó 

Suy ra : 

Do 

Tương tự ta có : 

Do đó : 

Diện tích thiết diện là :



Do hai tam giác vuông  và bằng nhau (c.g.c) nên  Vậy tam giác  cân tại Gọi  là trung điểm của 

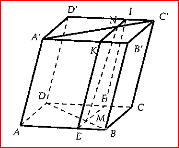
Ta có : 

Diện tích của  bằng :



Vậy đáp án đúng là B.

1. **Đáp án D.**



Trong mặt phẳng , dựng đường thẳng qua  , song song với  cắt  theo thứ tự tại  .

Trong mặt phẳng  dựng đường thẳng qua  song song với  cắt  theo thứ tự tại  Ta có : 

Áp dụng định lý Thales ta có :



Từ đây sauy ra 

Theo cách dựng ta suy ra : 

Từ (1) và (2)

Vậy  luôn song song với mặt phẳng cố định, mặt phẳng đó là 

1. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho  . Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng  . Tính 

**A.**  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

***Lời giải:***

**Đáp án A**.

****

Trong mặt phẳng  , gọi 

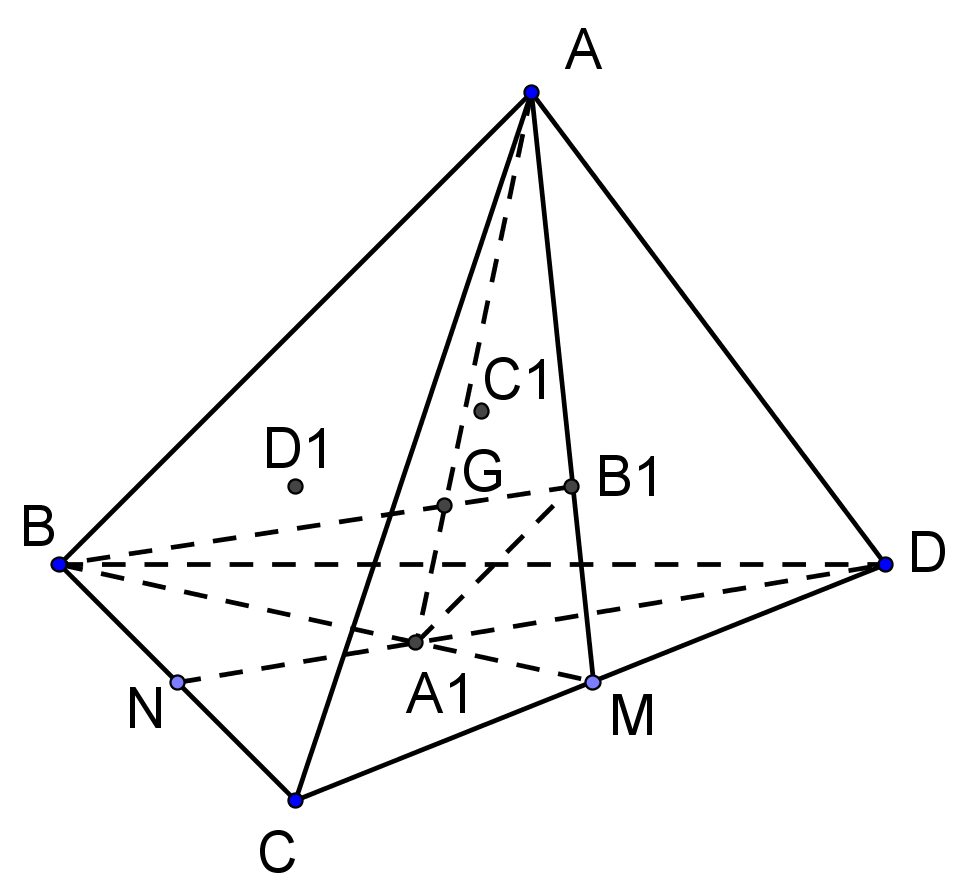
Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác ABC ta có: 

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác SAC ta có: 

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi  tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng  đồng quy tại điểm G và ta có: 

***Lời giải:***

**

**Lưu ý:** Điểm G được gọi là trọng tâm tứ diện ABCD

Gọi M là trung điểm CD. Theo tính chất trọng tâm ta có:  và 

Trong mặt phẳng  , gọi G là giao điểm của 

Theo định lý Thales ta có: 

Tương tự ta có: 

Từ  và  suy ra G, G’, G” trùng nhau, tức là  đồng quy tại điểm G và ta có :



Bài tập tương tự: Cho tứ diện  . Gọi  tương ứng là các trung điểm của  . Chứng minh rằng  đòng quy tại một điểm và điểm đồng quy chính là trọng tâm  của tứ diện 

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

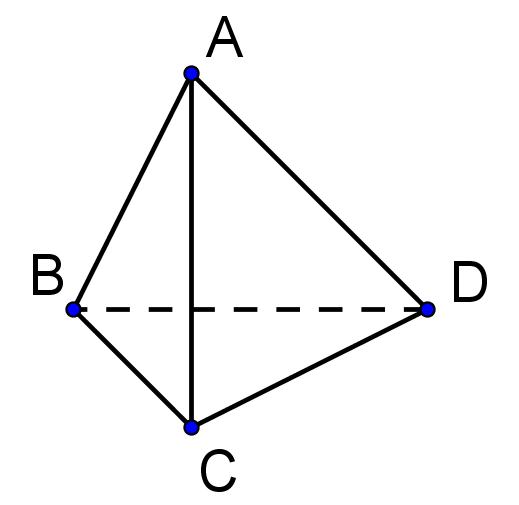
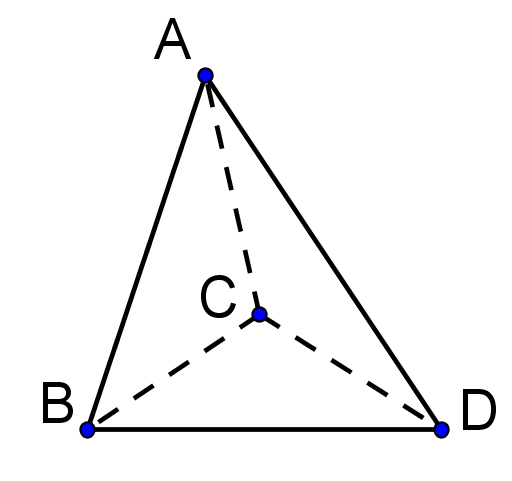
**A.** Dùng nét đứt biểu diễn cho đường bị che khuất.

**B.** Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng.

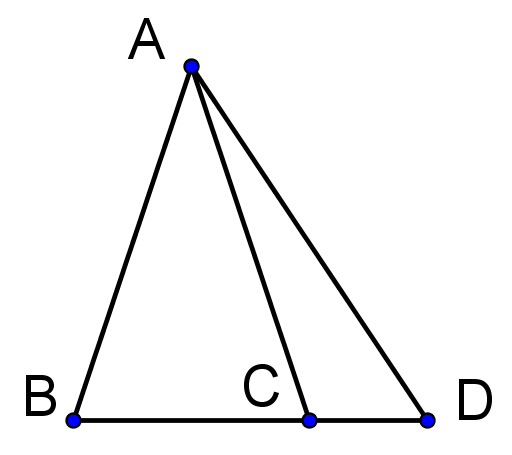
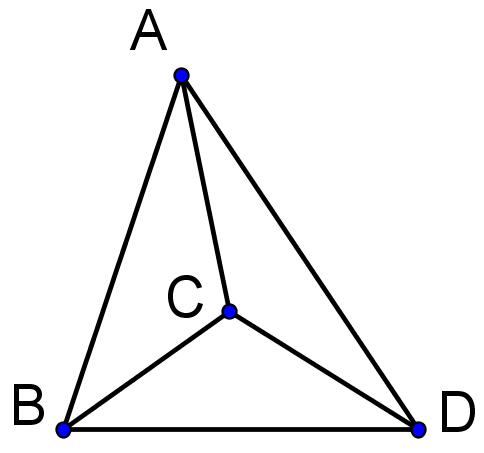
**C.** Hình biểu diễn phải giữ nguyên qua hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng..

**D.** Hình biểu diễn của hai đường cắt nhau có thể là hai đường song song.

1. Trong các hình vẽ sau hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện? (Chọn câu đúng nhất)

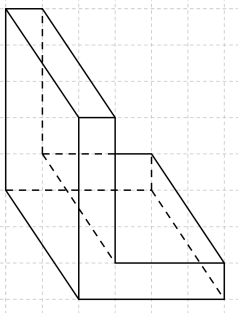
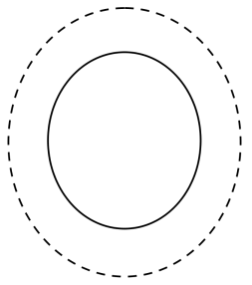
 

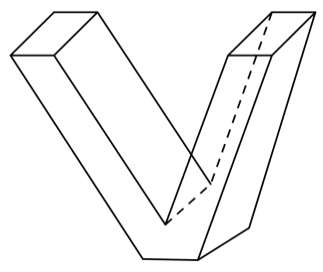
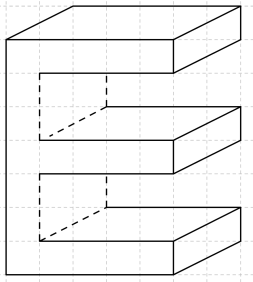
 

**A.**  . **B.**  .

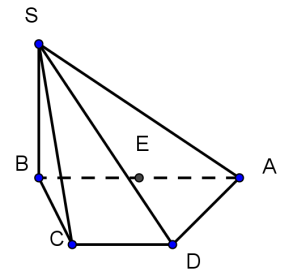
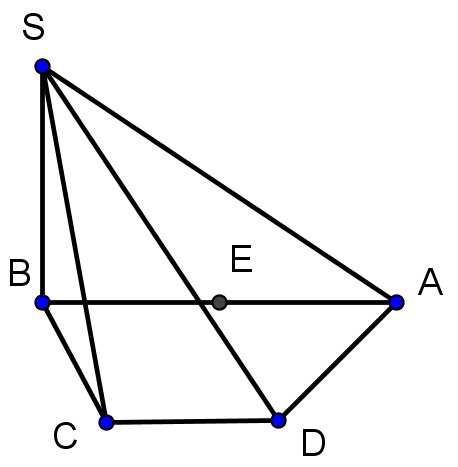
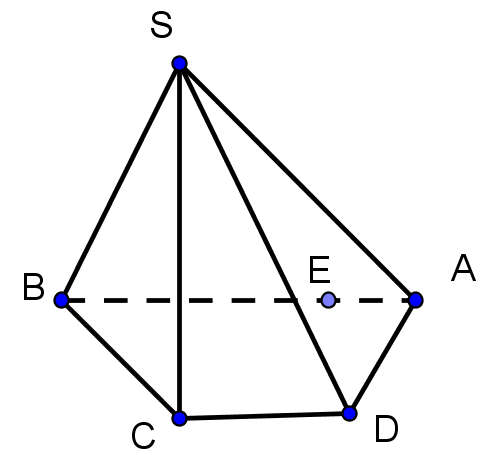
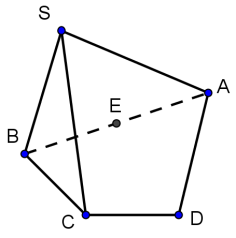
**C.** . **D.** 

1. Hình nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

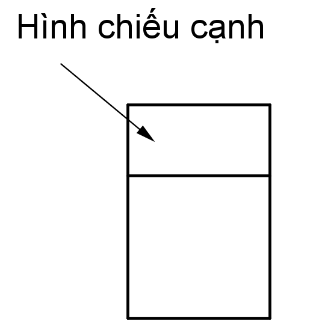
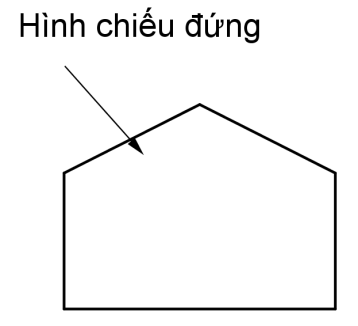
**A.** . **B.** .

**C.**. **D.** 

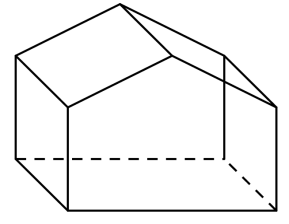
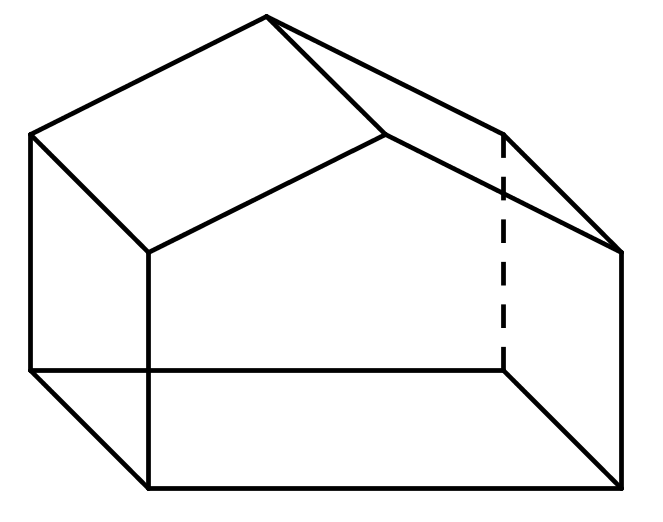
1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang, đáy lớn  gấp đôi đáy nhỏ  ,  là trung điểm của đoạn  . Hình vẽ nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

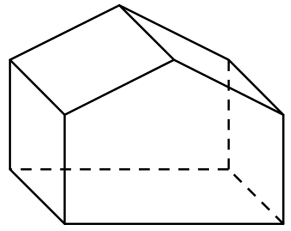
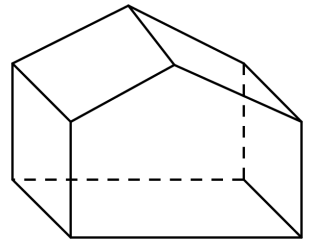
**A.** . **B.** . **C.**. **D.**

1. Một hình không gian có hình chiếu đứng (nhìn từ trước vào (có thể nhìn từ sau) để từ hình 3D chuyển sang hình 2D) hình chiếu bằng (nhìn từ trên xuống) có thể nhìn từ dưới lên)), hình chiếu cạnh (từ trái sang (có thể nhìn từ phải sang)) lần lượt được thể hiện như sau:

Hãy vẽ hình biểu diễn của hình đó?

**A.** . **B.** .

**C.**. **D.** 

1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Qua ba điểm xác định một và chỉ một mặt phẳng.

**B.** Qua ba điểm phân biệt xác định một và chỉ một mặt phẳng.

**C.** Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định hai mặt phẳng phân biệt.

**D.** Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

1. Xét các mệnh đề sau đây:

 Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

 Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

 Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

 Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có duy nhất một điểm chung khác nữa.

Số mệnh đề sai trong các mệnh đề trên là:

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

1. Cho  điểm phân biệt trong không gian  .Biết rằng bốn điểm bất kỳ trong  điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?
2. Tất cả  điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
3. Có đúng  điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
4. Có đúng  điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
5. Không tồn tại mặt phẳng nào chứa tất cả  điểm.
6. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

**A.** Có đúng hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng cho trước..

**B.** Hai mặt phẳng có một điểm chung duy nhất.

**C.** Hai mặt phẳng cùng chứa hai cạnh của một tam giác thì trùng nhau..

**D.** Có đúng hai mặt phẳng phân biệt đi qua ba điểm phân biệt..

1. Cho tứ giác lồi  và điểm  không thuộc mặt phẳng  . Có bao nhiêu mặt phẳng qua  và hai trong số bốn điểm 

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

1. Cho năm điểm  phân biệt trong đó không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm đã cho ?

**A.** 6. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 8.

1. Cho  đường thẳng phân biệt đồng quy tại O trong đó không có ba đường thẳng nào cùng năm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai trong số  đường thẳng trên?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho mặt phẳng  và hai đường thẳng  cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng  . Gọi A là một điểm thuộc đường thẳng  nhưng không thuộc đường thẳng  và  là một điểm nằm ngoài . Khẳng định nào sau đây đúng:

**A.**  và  chéo nhau. **B.**  và  song song .

**C.**  và  cắt nhau. **D.**  và  trùng nhau.

1. Cho tứ diện  lần lượt là trung điểm của  và  . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  song song . **B.**  trùng nhau. **C.**  cắt nhau **D.** chéo nhau

1. Cho hình chóp  có đáy  là một tứ giác ( không song song  ). Gọi  là trung điểm của  ,  là điểm nằm trên cạnh  sao cho  là giao điểm của  và . Cặp đường thẳng nào sau đây cắt nhau:

**A.**  và. **B.**  và . **C.**  và  **D.**  và .

1. Cho bốn điểm  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên  lần lượt lấy các điểm  và  sao cho  cắt  tại  . Điểm  không thuộc mặt phẳng nào sau đây:

**A.** . **B.** . **C.**  . **D.** .

1. Cho tứ diện  . Gọi  lần lượt là trung điểm của  . Khi đó  và  là hai đường thẳng:

**A.** Chéo nhau. **B.** Có hai điểm chung. **C.** Song song **D.** Cắt nhau

1. Cho tứ diện  . Gọi  là trung điểm cạnh  là điểm thuộc cạnh  sao cho  là một điểm thuộc miền trong của tam giác  . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

**A.** Mặt phẳng  chứa đường thẳng 

**B.** Mặt phẳng  đi qua giao điểm của hai đường thẳng  và .

**C.** Mặt phẳng  đi qua điểm  .

**D.** Mặt phẳng chứa đường thẳng  .

1. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì :

**A.** Cùng thuộc một đường tròn **B.** Cùng thuộc một đường thẳng

**C.** Cùng thuộc một eliP **D.** Cùng thuộc một tam giác.

1. Cho hình chóp  có đáy là hình thang  ( là đáy lớn,  là đáy nhỏ). Khẳng định nào sau đây sai:

**A.** Hình chóp  có bốn mặt bên..

**B.** Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là  trong đó  là một điểm thuộc mặt phẳng  .

**C.** Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là  trong đó  là giao điểm của hai đường thẳng  và 

**D.** Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là  trong đó  là giao điểm của  và  .

1. Cho hình chóp  có đáy  là một tứ giác ( không song song  ). Gọi M là trung điểm của  là điểm nằm trên cạnh  sao cho  là giao điểm của  và  . Giả sử đường thẳng  là giao tuyến của  và  . Nhận xét nào sau đây là sai:N

**A.**  cắt . **B.**  cắt . **C.**  cắt . **D.**  cắt .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành  .Mặt phẳng  di động chứa đường thẳng  và cắt các đoạn  lần lượt tại  . Mặt phẳng  di động chứa đường thẳng  và cắt  lần lượt tại  là giao điểm của  là giao điểm của  . Xét các mệnh đề sau:

Đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định..

Đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định.

Đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố dịnh.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

**A.** . **B.** . **C.**  . **D.** .

1. Cho tứ diện đều  có các cạnh bằng  . Gọi  là trung điểm  ,  là điểm thuộc cạnh  sao cho  là điểm thuộc cạnh  sao cho  . Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng  với mặt phẳng  của hình chóp  theo  .

**A.** . **B.**  . **C.**  . **D.** .

1. Cho tứ diện  nằm trên đoạn  sao cho  là điểm nằm trên  sao cho  . Gọi  là giao điểm của  và  . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là:

**A.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**B.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**C.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**D.**  trong đó  thuộc  sao cho 

1. Cho tứ diện  có  là các đường phân giác trong của tam giác  . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là:

**A.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**B.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**C.**  trong đó  thuộc  sao cho 

**D.**  trong đó  thuộc  sao cho 

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm  . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và  . Gọi  là giao điểm của  với  . Tính 

**A.** . **B.** . **C.**  . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi  lần lượt là trung điểm của  và  . Trên đường thẳng  lấy điểm  sao cho  là trung điểm  . Gọi  là giao điểm của  với mặt phẳng  . Tính 

**A.**  . **B.**  . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện  lần lượt thuộc đoạn  Gọi  là giao điểm của  và  . Gọi  là giao điểm của  với  . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  lần lượt là trung điểm của  . Gọi  là giao điểm của  với  là giao điểm của  với  . Tính  ?

**A.** . **B.** . **C.**  **D.**  .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Một mặt phẳng  cắt các cạnh bên  tương ứng tại các điểm  . Gọi  . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.**  . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm  . Gọi  lần lượt là các điểm nằm trên cạnh  sao cho  . Gọi  là điểm trên cạnh  sao cho  .  là giao điểm của  với  . Tính 

**A.**  . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện  .  là điểm thuộc đoạn  sao cho  là các đei63m thuộc đường thẳng  sao cho  là các điểm thuộc đường thẳng  sao cho  thuộc tia đối của tia  sao cho  là trung điểm của  . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Bốn điểm  đồng phẳng **B.** Bốn điểm  đồng phẳng.

**C.** Bốn điểm  đồng phẳng. **D.** Bốn điểm  đồng phẳng.

1. Cho tứ diện  là điểm thuộc đường thẳng  sao cho  là các điểm thuộc đường thẳng  sao cho  là các điểm thuộc đường thẳng  sao cho  là các điểm nằm trên đường thẳng  sao cho  . Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện  có  lần lượt là trung điểm của  và  là điểm thuộc cạnh  ( không là trung điểm  ).

a) Thiết diện của tứ diện bị cắt bởi  là:

**A.** Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

b) Gọi  là giao điểm của  với  là giao điểm của  với  . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  . **B.** . **C.** .  **D.**  .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành,  là trung điểm của  lần lượt là các điểm thuộc cạnh  . Thiết diện của hình chóp cắt bởi  là:

**A.** Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với đáy lớn  là trung điểm của cạnh  là các điểm thuộc cạnh  ( không là trung điểm của  ). Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  là:

**A.** Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

1. Cho hình chóp  với đáy là đa giác lồi  Trên tia đối của tia  lấy điểm  là các điểm nằm trên cạnh  . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  là:

**A.** Đa giác  cạnh. **B.** Đa giác  cạnh. **C.** Đa giác  cạnh. **D.** Đa giác  cạnh.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho  . F là trọng tâm tam giác  là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng  là:

**A.** Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên  . F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp  cắt bởi mặt phẳng  có thể là:

**A.** Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

1. Cho hình chóp  là trung điểm của  thuộc SC sao cho  là một điểm thuộc miền trong tam giác  . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  là:

**A.** Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

1. Cho hình tứ diện  có tất cả các cạnh bằng  . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho  . Diện tích S thiết diện của tứ diện  bị cắt bởi  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện  có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho  . Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện  cắt bởi mặt phẳng  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với  . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm O. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với  . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm của SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng  . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

1. **Đáp án D.**
2. **Đáp án B.**
3. **Đáp án A.**
4. **Đáp án A.**

Theo quy tắc vẽ hình, các đoạn thẳng song song được vẽ bằng các đoạn thẳng song song nên đáp án D bị loại. Trung điểm được vẽ ở chính giữa đoạn nên ý C bị loại. Nét khuất được vẽ bởi nét đứt đoạn, nét với góc nhìn này với đáp án B thì hoặc AB đứt đoạn hoặc SC, SD đứt đoạn. Do đó chỉ có đáp án A đúng.

1. **Đáp án C.**

Hình A, B, D sai khi vẽ các đường không nhìn thấy bằng nét liền.

1. **Đáp án D**.

- Đáp án A, B sai, các em có thể lấy ví dụ ba điểm phân biệt , thẳng hàng , thì có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm đó.

- Đáp án C sai, vì theo tính chất thừa nhận, ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mp đi qua ba điểm.

1. **Đáp án B.**

Theo các tính chất thừa nhận, ta thấy (I), (II), (III) đúng và nếu hai mp có 1 điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa. Điều đó đồng nghĩa với nhận xét (IV) là sai. Như vậy có 1 quy tắc sai.

1. **Đáp án A**.

- Nếu  điểm đã cho cùng thuộc một đường thẳng thì hiển nhiên  điểm thuộc cùng 1 mp. Do đó loại được đáp án B, C, D.

- Nếu  điểm đã cho không cùng thuộc một đường thẳng thì trong chúng phải có 3 điểm không thẳng hàng. Khi đó ba điểm này xác định 1 mp, kí hiệu là mp  . Lấy một điểm trong  điểm còn lại thì theo giả thiết điểm đó phải thuộc mp . Suy ra tất cả các điểm đã cho cùng thuộc 1 mp.

1. **Đáp án C.**

Một đường thẳng cho trước có vô số mp đi q ua.

Hai mp đã có 1 điểm chung thì có vô số điểm chung khác nữa. Còn có trường hợp 2 mp không có điểm chung nào.

Có duy nhất 1 mp đi qua ba điểm phân biệt. Như vậy ta chọn ý C.

1. **Đáp án D**.

Số cách chọn 2 trong 4 điểm  là  .

Vậy có 6 mp đi qua  và 2 trong 4 điểm  .

1. **Đáp án B**.

Chọn 3 trong 5 điểm trên sẽ tạo nên 1 mp. Do đó, số mp tạo bởi 3 trong 5 điểm trên là .

1. **Đáp án A**.

Hai đường thẳng phân biệt cắt nhau tại  xác định 1 mp . Nên số các mp chứa 2 trong  đường thẳng trên là  .

1. **Đáp án A** .

Dễ thấy  không trùng nhau.

Giả sử  không chéo nhau, khi đó  hoặc song song hoặc cắt nhau. Lúc đó, theo cách xác định 1 mp, ta thấy cùng thuộc 1 mp . Các mp  đều chứa đường thẳng  và đi qua điểm  ở ngoài  nên 2 mptrùng nhau. Suy ra điểm  phải thuộc mp  (Vô lý). Như vậy  chéo nhau.

1. **Đáp án D**.

Giả sử  đồng phẳng, suy ra đồng phẳng do đó  cùng thuộc 1 mp (vô lý).

Do đókhông đồng phẳng, do đó  chéo nhau. Chọn đáp án D.

1. **Đáp án B**.



Giả sử  cắt nhau. Khi đó đồng phẳng, suy ra  thuộc mp  (Vô lý). Đáp án A bị loại.

Giả sử  cắt . Khi đó  và  đồng phẳng, suy ra  thuộc  (vô lý). Do đó đáp án C bị loại.

Giả sử  cắt . Khi đó  đồng phẳng. Suy ra,  thuộc mp  (vô lý). Đáp án D bị loại.  cùng nằm trong mp, không song song và trùng nhau.

1. **Đáp án A**.

Do là giao điểm của  và  nên  thuộc các mp chứa  và các mp chứa . Do đó  thuộc 

Giả sử  thuộc  khi đó  thuộc  (vô lý).

1. **Đáp án A**.

Giả sử  đồng phẳng. Do đó  lần lượt thuộc đường thẳng  nên  cũng thuộc mp đó. Như vậy  đồng phẳng(vô lý). Như vậy đáp án B, C, D không thỏa mãn.

1. **Đáp án A**.

Gọi  là giao điểm của  và CD. Khi đó  thuộc  . Vậy đáp án A đúng.

Giả sử  chứa đường thẳng  . Khi đó  cùng thuộc mp . Suy ra  cùng thuộc mp (vô lý). Đáp án B không thỏa mãn.

Giả sử  đi qua điểm  . Do  lần lượt thuộc các đường thẳng  nên thuộc mp . Như vậy 2 mp  trùng nhau. Suy ra  thuộc mp (vô lý). Vậy đáp án C bị loại.

Tương tự ta cũng dễ dàng suy ra đáp án D bị loại.

1. **Đáp án B**.

Giao tuyến của 2mp phân biệt là 1 đường thẳng, nên ba điểm phân biệt cùng thuộc 2 mp phân biệt sẽ nằm trên giao tuyến của 2mp phân biệt.

1. **Đáp án B**.

Hiển nhiên hình chóp  có 4 mặt bên nên đáp án A đúng.

Ta thấy giao tuyến của 2mp  là  ,  là điểm thuộc cả hai mp do đó  . tương tự ta cũng chứng minh được  . Như vậy  thuộc cả hai đường thẳng  (vô lý do  song song). Do vậy đáp án B sai.



Do đó  thuộc giao tuyến của hai mp  .

Tương tự ta cũng dễ thấy  .

Như vậy đáp án C,D đúng.

1. **Đáp án B**.



Gọi  . Ta có:



Lại có 

Do đó 



Vậy  cắt .

Giả sử  cắt  . Khi đó  thuộc mp . Suy ra  thuộc  (vô lý). Vậy không cắt  . Đáp án B sai.

1. **Đáp án D.**



Trong mp , gọi  . Khi đó  cố định.

Như vậy:  cùng nằm trên hai mp  và  , do đó ba điểm  thẳng hàng. Vậy đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định  .

Tương tự, ta có  cùng nằm trên hai mp  và  ,do đó  thẳng hàng. Vậy các đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định  .

Do  .

Tương tự ta cũng có 

Do đó ba điểm  thẳng hàng. Vậy  luôn đi qua điểm cố định  .

Vậy ta chọn đáp án D.

1. **Đáp án A**.



Trong mp  , gọi  .

Trong mp , gọi  .

Khi đó  .

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với ba điểm  thẳng hàng ta có:



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với ba điểm  thẳng hàng ta có:



Áp dụng định lý cosin vào tam giác  ta có:



1. **Đáp án C**.



Trong  , gọi  .

Dễ thấy  thuộc đoạn  nên  cùng hướng.

Do đó đáp án A, D bị loại.

Áp dụng định lý Ceva trong tam giác  với  đồng quy ta có:



Do  cùng hướng nên  .

1. **Đáp án A**.



Do  thuộc đoạn  nên  cùng hướng. Do đó B, D bị loại.

 là phân giác trong của tam giác  nên theo tính chất đường phân giác ta có:



Ta có:  là phân giác trong của tam giác  nên theo tính chất đường phân giác ta có:



Do đó: 

1. **Đáp án B**.

Trong mp  , gọi  . Dễ thấy  .

Do  là đường trung bình của tam giác  nên  là trung điểm AO. Suy ra  và  là đường trung bình của tam giác  . Do đó  .

Áp dụng định lý Thales ta có: 

1. **Đáp án D**.

Trong mp, gọi  .

Dễ thấy .

Do  là đường trung bình của tam giác  nên  là trung điểm DO. Suy ra .

Áp dụng định lý Menelaus vào taam giác  ta có :



1. **Đáp án A**.



Nếu K trùng với trọng tâm G thì  . Do đó C, D bị loại.

Ta có 

Áp dụng định lý bất đẳng thức Cauchy ta có:



1. **Đáp án A**.



Ta có : 

 .

Tương tự ta cũng chứng minh được: 

Và 

Từ (1,2,3) suy ra 

1. **Đáp án A**.



Xét trường hợp đặc biệt  lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khi đó ta dễ dàng loại được đáp án D.

Dựng 

Theo định lý Thales, ta có:



Suy ra: 

Như vậy, ý B bị loại.

Tương tự, ta chứng minh được 

Từ đây ta thấy ngay ý C bị loại và A là đáp án A là đáp án lựa chọn.

*Chú ý:* Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm AC, M, N là hai điểm nằm trên cạnh AB, AC. MN cắt BO tại I. Khi đó:  .

1. **Đáp án A**.



Theo chú ý câu 30 ta có:  .

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác  ta có: 

1. **Đáp án A.**



Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

 nên  đồng phẳng.

 nên  không đồng phẳng.

 nên  không đồng phẳng.

 nên  không đồng phẳng.

1. **Đáp án D**.

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

 nên  đồng phẳng.

 nên  đồng phẳng.

 nên  đồng phẳng.

 nên  không đồng phẳng. Do đó 4 điểm này lập nên 1 tứ diện.

1. **Đáp án B, A.**



a)Do tứ diện ABCD có 4 mặt nên thiết diện không thể là ngũ giác hay lục giác. Nó chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

Trong mp  , gọi  (P không phải là trung điểm đoạn BC nên MP cắt AC)

Trong mp , gọi 

Do  nên 

Ta có: 

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác 

Ta chọn đáp án B.

b)Áp dụng ví dụ 11, do  đồng phẳng nên 

(Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD) . Từ đây suy ra 

Giả sử  . Khi đó ta suy ra 

Suy ra 

Do J là trung điểm của PQ.

Ta có: 

Chứng minh tương tự ta cũng có: 

Từ (1,2,3) suy ra  . Điều này dẫn đến M, N, J thẳng hàng. Như vậy I trùng J.

Điều này suy ra  .

Chọn đáp án A.

1. **Đáp án C**.



Trong mp , gọi 

Trong mp , gọi 

Trong mp , gọi .

Ta có: 

Do đó ngũ giác EHFGJ là thiết diện của hình chóp cắt bởi 

1. **Đáp án C**.



Trong mp , Gọi 

Trong mp , Gọi 

Trong mp , Gọi 

Khi đó ta có:

Do đó ngũ giác EKFHG là thiết diện của hình chóp cắt bởi 

1. **Đáp án D**.

****

Trong mặt phẳng  gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng  gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng  gọi   là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi   là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi   là giao điểm của  với .

Do  nên  là giao điểm của   với mặt phẳng .

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi  là đa giác .

1. **Đáp án C**.

***Cách 1:***



Gọi  là trung điểm của , khi đó , ,  thẳng hàng.

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với . Khi đó .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với . Ta thấy  thuộc  nên  thuộc . Trong , gọi  là giao điểm của  với . Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với . Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Ta có:  .

Vậy ngũ giác  là thiết diện của hình chóp cắt bởi .

***Chú ý:*** Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm  là giao điểm của  với  (thông qua việc dựng giao tuyến  của mặt phẳng  với mặt phẳng ). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác ) của một trong các đường thẳng ; hoặc  với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của  với mặt phẳng .

***Cách 2:***



Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với , .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Ta có: .

Vậy ngũ giác  là thiết diện của hình chóp cắt bởi .

1. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  và . Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  và .

Xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**

****

Trong mặt phẳng  ,  cắt  tại  và cắt đoạn  tại .

Ta có  nên  là giao điểm của  với  ,

 nên  là giao điểm của  với .

Ta có 

Suy ra tứ giác  là thiết diện của hình chóp cắt bởi .

**Trường hợp 2:**

****

Trong mặt phẳng  ,  cắt  tại  và cắt đoạn  tại (cắt  tại một điểm nằm ngoài đoạn ).

Trong mặt phẳng  :

Nếu  song song với  thì ta có:  . Gọi  là giao điểm của  với  .

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác  và  ta có

 . Điều này chỉ xảy ra khi  thuộc đoạn  (vô lí)

Do vây  cắt  , giả sử tại .

Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  .

Ta có 

Suy ra ngũ giác  là thiết diện của hình chóp cắt bởi  .

Vậy thiết diện của hình chóp  cắt bởi mặt phẳng  hoặc là tứ giác hoặc là ngũ giác.

1. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  . Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  . Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  . Trong mặt phẳng  , gọi  là giáo điểm của  với  .

Trong mặt phẳng  , có hai khả năng xảy ra như sau:

***Trường hợp 1:***  cắt đoạn  tại  .



Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với . Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  .

Ta có 

Trường hợp này , ngũ giác  là thiết diện của hình chóp  cắt bởi .

***Trường hợp 2:***  cắt  tại  ( không cắt đoạn  ).



Trong mặt phẳng  , gọi  là giao điểm của  với  ( không thể cắt đoạn  vì giả sử ngược lại  cắt cạnh  tại  , khi đó  sẽ cắt cạnh  (vô lí vì  đã cắt cạnh  )).

Khi đó 

Trường hợp này, tứ giác  là thiết diện của hình chóp cắt bởi .

1. **Đáp án** **A.**

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  và . Suy ra  là giao điểm của  với . Khi đó, tứ giác  là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng .

Trong tam giác  ta có  là trọng tâm của tam giác suy ra  là trung điểm của .

Trong tam giác  có  là trọng tâm của tam giác nên .

Ta có .

Suy ra  là hình thang với đáy lớn .

Ta có:  Áp dụng định lí cosin trong tam giác  ta có:

.

Tương tự ta cũng tính được .

Dễ thấy  là hình thang cân. Do đó:

.

1. **Đáp án** **C.**

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  và .

Ta có: .

Do đó tam giác  là thiết diện của tứ diện cắt bởi .

Dễ thấy  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  và .

Ta có: .

Xét hai tam giác  và  có  chung,  nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra . Vậy tam giác  cân tại .

Áp dụng định lí cosin trong tam giác :

.

Gọi  là trung điểm của đoạn . Ta có .

Suy ra: .

Diện tích thiết diện  là: .

1. **Đáp án** **C.**

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với  và  là trung điểm của .Dễ thấy  chính là giao điểm của  với .

Ta có:  Áp dụng Thales ta có: .

Suy ra  là trung điểm .

 là đường trung bình của tam giác  ta có: .

 là đường trung bình của tam giác  ta có: .

Từ đó suy ra: .

1. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng , gọi  là giao điểm của  với .

Dễ thấy  chính là giao điểm của  với .

Do  là đường trung bình của tam giác  nên  là trung điểm . Suy ra  và  là đường trung bình của tam giác . Do đó: .

Áp dụng định lí Thales ta có: .

1. **Đáp án** **D.**

Trong mặt phẳng , gọi .

Dễ thấy  chính là giao điểm của  với .

Do  là đường trung bình của tam giác  nên  là trung điểm . Suy ra .

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác  ta có:



**ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa**

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

*Định nghĩa:*

Hai đường thẳng phân biệt  trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu  nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

**2. Tính chất**



**Định lí 1:** Trong không gian cho đường thẳng  và điểm  nằm ngoài . Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng  và và song song với đường thẳng d.

***Chú ý:***

Định lí này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lí 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

**Định lí 2 ( Về giao tuyến của ba mặt phẳng):**

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

***Hệ quả:***

Nếu hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng ( nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

***Bước 1:*** Chỉ ra hai mặt phẳng  lần lượt chứa hai đường thẳng song song .

***Bước 2:*** Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng

***Bước 3:*** Khi đó 

**Định lí 3:**

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn 

**3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian**

**a) Định nghĩa**

Góc giữa hai đường thẳng  và  trong không là góc giữa hai đường thẳng và cùng đi

qua một điểm và lần lượt song song với  và .

**b. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian**

*Bước 1:* Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng có sẵn không?

- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:

+ Chọn một điểm O bất kì trong không gian.

+ Qua O dựng đường thẳng . Góc nhọn hay góc vuông tọc bởi  chính là góc giữa  và .

***Lưu ý:***

+ Ta thường lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng  và .

+ Chọn O sao cho góc giữa  là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng

*Bước 2:* Tính góc

Dùng hệ thức lượng trong tam giác, tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin. Trường hợp góc giữa hai đường thẳng  và  bằng  ta nói .

**B. DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG**

***DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẢNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN***

*Phương pháp chung: Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ta sẽ sử dụng một trong các sách sau:*

*+ Cách 1: Chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng, sau đó áp dụng các phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình, định lí Thales đảo, tính chất song song của hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3…*

*+ Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu: Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.*

*+ Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.*

1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trọng tâm của các tam giác . Đường thẳng  song song với đường thẳng:

**A.**  trong đó  là trung điểm . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Lời giải:***

**Đáp án D.**

**Cách 1**: ( Đưa về cùng mặt phẳng và vận dụng kiến thức hình học phẳng)

Gọi  là trung điểm của . Ta có  nên suy ra  và  đồng phẳng.

Do  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  nên ta có:. Suy ra .

**Cách 2**: ( Sử dụng tính chất bắc cầu)

Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Suy ra  (1).

Do  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  nên ta có:. Suy ra  (2).

Từ (1) và (2) suy ra .

**Cách 3**: (Sử dụng định lí giao tuyến của 3 mặt phẳng).

Có lẽ trong ví dụ này cách này hơi dài, song chúng tôi vẫn sẽ trình bày ở đây, để các bạn có thể hiểu và vận dụng cách 3 hợp lí trong các ví dụ khác.

Dễ thấy, bốn điểm , , ,  đồng phẳng.

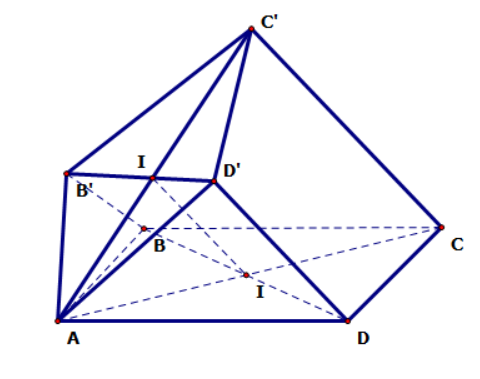
Ta có: .

1. Cho hình bình hành . Gọi , ,  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua , ,  và nằm về một phía của mặt phẳng , đồng thời không nằm trong mặt phẳng . Một mặt phẳng đi qua  và cắt , ,  lần lượt tại , ,  với , . Khi đó  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**.

***Lời giải:***

**Đáp án D.**

Gọi  là tâm của hình bình hành .  là trung điểm của .

Do ,  song song với nhau nên  là hình thang và  là đường trung bình của hình thang đó. Suy ra .

Mặt khác  song song với  (vì cùng song song với ) nên có bốn điểm , , ,  đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng  với  là . Lại có  thuộc ,  thuộc . Do đó , ,  thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra,  là trung điểm đoạn . Do vậy, .

***Nhận xét:*** Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành . Gọi , , ,  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua , , ,  đồng thời không nằm trong mặt phẳng . Một mặt phẳng cắt , , ,  lần lượt tại , , , . Khi đó  là hình bình hành và .

Do đó khi biết 3 trong 4 đối tượng , , ,  ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

1. Cho hình bình hành  tâm . Gọi , , ,  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua , , ,  và nằm về một phía của mặt phẳng , đồng thời không nằm trong mặt phẳng . Một mặt phẳng  di động cắt , , ,  lần lượt tại , , ,  sao cho  ( có độ dài cho trước). Mặt phẳng  luôn đi qua điểm cố định . Mệnh đề nào sau đây đúng?
   1.  nằm trên đường thẳng  song song với  và .
   2.  nằm trên đường thẳng  song song với  và .
   3.  nằm trên đường thẳng  song song với  và .
   4.  nằm trên đường thẳng  song song với  và .

***Lời giải:***

**Đáp án B.**

Theo ví dụ 2, ta có :  nên .

**Bài tập tương tự:** Cho tam giác . Ở về một phía của , người ta kẻ các đường thẳng song song  lần lượt lấy trên  các điểm .

1.  và  lần lượt là trung điểm . Chứng minh rằng  song song với .
2.  và  lần lượt là trọng tâm của tam giác  và . Chứng minh rằng  song song với .
3. Cho hình chóp  có đáy là hình bình hành. Các điểm  thứ tự thuộc các đoạn  và sao cho . Gọi I là giao điểm của  và
4. Chứng minh rằng .
5. Qua M kẻ ( P là điểm trên ). Chứng minh rằng .

***Lời giải:***

1. Ta có 

Trong tam giác  có 

1. Ta có

Trong tam giác  có 

***DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG* (*cách* 2). *THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.***

* *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2)*

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng a và b song song, ta tìm:

+ Một điểm chung của hai mặt phẳng đó.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng qua điểm chung và song song với a và b ( hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

1. Cho hình chóp  có đáy là hình chữ nhật.  .

Gọi  lần lượt là trung điểm của  và. là điểm tùy ý trên cạnh ( không trùng với )

1. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng  và ;và .
2. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng  và . Từ đó suy ra giao điểm N của và . Chứng minh rằng là hình thang cân.

***Lời giải:***

******

1. *Ta có* 

*Tương tự* 

1. *Do* lần lượt là trung điểm của  nên  là đường trung bình của tam giác . Do đó  (1)

*Ta có*  (2)

*Gọi* là giao điểm của với . Ta có:

.

Từ (1) và (2) suy ra . Suy ra là hình thang.

Dễ thấy  vậy là hình thang cân.

Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước

Được xác dịnh bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết:

**Cách 1:** Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

**Cách 2:** Tìm một điểm chung và phương ( song song với một đường thẳng cho trước) của giao tuyến.

1. *Cho tứ diện* . Gọi  lần lượt là trung điểm của và , Gọi E là điểm trên cạnh  với . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng  và tứ diện là:

**A.** Tam giác .

**B.** Tứ giác  với là điểm bất kì trên cạnh.

**C.** Hình bình hành với là điểm bất kì trên cạnh mà .

**D.** Hình thang với là điểm bất kì trên cạnh và .

***Lời giải:***

Trong mặt phẳng , Gọi là giao điểm của đường thẳng qua , song song  với .

Ta có 

Vậy tứ giác là thiết diện của hình chóp cắt bởi .

Lại có 

Suy ra tứ giác  là hình thang .

1. Cho hình chóp , đáy  là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Thiết diện của mặt phẳng  với hình chóp là hình gì?

**A.** Tam giác. **B.** Hình bình hành.

**C**. Hình thang. **D.** Hình thoi.

***Lời giải:***

**Đáp án C.**

Gọi  là trung điểm của . Do , .

Như vậy suy ra  thuộc mặt phẳng .

Ta có: 

Vậy tứ giác  là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng .

Kết hợp với , suy ra  là hình thang.

***DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG***

1. Cho tứ diện  có , , . Xét các khẳng định sau:
2. Cosin của góc giữa hai đường thẳng  và  bằng .
3. Cosin của góc giữa hai đường thẳng  và  bằng .
4. Cosin của góc giữa hai đường thẳng  và  bằng .

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải:***

**Đáp án C.**

Gọi , ,  lần lượt là trung điểm của , , .

Ta có: , , suy ra góc giữa hai đường thẳng  và .

Ta có: .

Do  nên .

Suy ra  cân tại . Vậy .

Xét tam giác  có: .

Vì .

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng  và  bằng .

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa  và  bằng .

***Nhận xét:*** Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị ; ; bằng tổng hai giá trị còn lại. Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều  thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng 

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

1. Cho hai đường thẳng  và  chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Tồn tại hai đường thẳng ,  song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả  và .

**B.** Không thể tồn tại hai đường thẳng ,  phân biệt mỗi đường đều cắt cả  và .

**C.** Không thể tồn tại một đường thẳng cắt cả  và .

**D.** Cả ba câu trên đều sai.

1. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy

**A.** Đôi một cắt nhau. **B.** Đồng quy.

**C.** Hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. **D.** Đôi một song song.

1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:

**A.** Song song với hai đường thẳng đó.

**B.** Song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

**C.** Trùng với một trong hai đường thẳng đó.

**D.** Cắt một trong hai đường thẳng đó.

1. Cho hai đường thẳng  và  chéo nhau. Xét hai đường thẳng ,  mà mỗi đường thẳng đều cắt cả  và ,  cắt  tại ,  cắt  tại  ( không trùng với ). Khi đó hai đường thẳng  và :

**A.** Cắt nhau. **B.** Trùng nhau.

**C.** Song song với nhau. **D.** Hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

1. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó:

**A.** Song song. **B.** Trùng nhau.

**C.** Chéo nhau. **D.** Hoặc song song hoặc trùng nhau.

1. Giả sử , ,  là ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt , , . Trong đó: , , .

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.**  và  cắt nhau hoặc song song với nhau.

**B.** Ba giao tuyến , ,  đồng quy hoặc đôi một cắt nhau.

**C.** Nếu  và  song song với nhau thì  và  không thể cắt nhau, cũng vậy,  và  không thể cắt nhau.

**D.** Ba giao tuyến , ,  đồng quy hoặc đôi một song song.

1. Cho hình chóp  có đáy là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là đường thẳng :

**A.** Đi qua  . **B.** Đi qua điểm  và song song với .

**C.** Đi qua điểm  và song song với . **D.** Đi qua điểm  và song song với .

1. Giả sử có ba đường thẳng , ,  trong đó  và . Hãy chọn câu đúng:

**A.** Nếu mặt phẳng  không trùng với mặt phẳng  thì  và  chéo nhau.

**B.** Nếu mặt phẳng  trùng với mặt phẳng  thì ba đường thẳng , ,  song song với nhau từng đôi một.

**C.** Dù cho hai mặt phẳng  và  có trùng nhau hay không, ta vẫn có .

**D.** Cả ba câu trên đều sai.

1. Cho hai đường thẳng , . Hai đường thẳng này sẽ nằm ở một trong các trường hợp:
   1. Hai đường thẳng phân biệt trong không gian.
   2. Hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng.
   3.  là giao tuyến của  và ,  là giao tuyến của  và , trong đó , ,  là ba mặt phẳng khác nhau từng đôi một.

Tương ứng với mỗi trường hợp trên, số các khả năng có thể xảy ra giữa  và  lần lượt là:

**A.** 3, 2, 2. **B.** 3, 2, 3. **C.** 2, 3, 2. **D.** 3, 2, 1.

1. Xét hình bên dưới:



Các cạnh của hình hộp nằm trên các đường thẳng , ,  như hình vẽ:

1. Đường thẳng  và đường thẳng  cùng nằm trên một mặt phẳng.
2. Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng  và .
3. Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng  và .

Trong ba câu trên:

**A.** Chỉ có (1) và (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) và (3) đúng.

**C.** Chỉ có (2) và (3) đúng. **D.** Cả ba câu trên đều đúng.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang đáy lớn là . Gọi M là trung điểm của ,  là giao điểm của cạnh  và mặt phẳng . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  và  cắt nhau. **B.**  và  chéo nhau.

**C.**  và  cắt nhau. **D.**  và  song song với nhau.

1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Mệnh đề nào sau đây sai?

**A. ** chéo nhau. **B.**  và .

**C.**  là hình bình hành. **D.**  và .

1. Cho hình chóp  với đáy  là hình bình hành. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Đường thẳng nào sau đây không song song với đường thẳng ?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  với đáy  là hình bình hành. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Các điểm nào sau đây không đồng phẳng?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  với đáy  là hình thang với đáy  và  . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và . Mặt phẳng  cắt  lần lượt tại . Mặt phẳng  cắt  lần lượt tại . Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?
2.  và  song song với nhau.
3.  và  song song với nhau.
4. .
5. 

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của .  là điểm trên đoạn  sao cho ,  là giao điểm của  và . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  song song với đường thẳng?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là:

**A.** Đường thẳng  đi qua **** và . **B.** Đường thẳng  đi qua **** và .

**C.** Đường thẳng  đi qua **** và . **D.** Đường thẳng ****.

1. Cho hình chóp ,  là một điểm nằm trong tam giác . Các đường thẳng qua  song song với  cắt các mặt phẳng  lần lượt tại .
2.  có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi  di động trong tam giác ?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1.  nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của  trong tam giác  là:

**A.** Trực tâm . **B.** Trọng tâm .

**C.** Tâm ngoại tiếp . **D.** Tâm nội tiếp .

1. Cho hình chóp  với đáy  là hình bình hành tâm . Mặt phẳng  di động đi qua  và cắt  lần lượt tại .
2. Tứ giác  là hình gì?

**A.** Hình bình hành. **B.** Hình thang.

**C.** Hình thoi. **D.** Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau.

1. Giao điểm của hai đường thẳng  và  luôn chạy trên đường thẳng cố định:

**A.**. **B.** Đường thẳng đi qua .

**C.** Đường thẳng đi qua , song song với . **D.** Đường thẳng đi qua , song song với .

1. Giao điểm của hai đường thẳng  và  luôn chạy trên đường thẳng cố định:

**A.**. **B.** Đường thẳng đi qua .

**C.** Đường thẳng đi qua , song song với . **D.** Đường thẳng đi qua , song song với .

1. Tính ?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện . Gọi  là trọng tâm tam giác  và  là điểm nằm bên trong tam giác . Đường thẳng qua  và song song với  lần lượt cắt các mặt phẳng  tại .
2. Khi  di động trong tam giác , đại lượng  không đổi và bằng:

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Xác định vị trí của  để  đạt giá trị lớn nhất?

**A.**  là trực tâm tam giác . **B.**  là tâm ngoại tiếp tam giác .

**C.**  là trọng tâm tam giác . **D.**  là tâm ngoại tiếp tam giác .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , tâm . Mặt bên  là tam giác đều và . Gọi  là đường thẳng qua  và song song với .
2. Giao điểm  của đường thẳng  với mặt phẳng  chạy trên đường thẳng:

**A.** Qua  và song song với . **B.** Qua  và song song với 

**C.** . **D.** .

1. Diện tích thiết diện của hình chóp  cắt bởi  là:

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , tâm . Mặt bên  là tam giác đều, . Gọi  lần lượt là trung điểm của .  là điểm trên cạnh . Mặt phẳng  cắt  tại .
2.  là hình gì?

**A.** Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau. **B.** Hình thoi.

**C.** Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

1. Đặt . Tìm  theo  để diện tích tứ giác  đạt giá trị nhỏ nhất?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang có cạnh đáy  và . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh .  là trọng tâm của tam giác . Thiết diện của hình chóp  cắt bởi  là một tứ giác. Tìm điều kiện của  để thiết diện đó là hình bình hành?

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh .  là một điểm trên cạnh  ( khác ). Tìm điều kiện của tứ diện  và điểm  sao cho thiết diện của hình chóp cắt bởi là hình thoi?

**A. **. **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Số đo góc giữa hai đường thẳng bằng  thì hai đường thẳng đó:

**A.** Song song. **B.** Chéo nhau.

**C.** Trùng nhau. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

1. Bạn Tùng Chi xác định góc giữa hai đường thẳng  trong không gian như sau:

*Bước 1:* Lấy điểm  bất kì. Qua  dựng đường thẳng  song song với . Trên đường thẳng  lấy điểm  khác .

*Bước 2:* Dựng đường thẳng  song song với song song với . Trên đường thẳng  lấy điểm  khác .

*Bước 3:* Góc giữa hai đường thẳng  và  chính là góc .

Hỏi bạn Tùng Chi có làm đúng không, nếu sai thì sai ở bước nào?

**A.** Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bạn làm đúng.

1. Cho ba đường thẳng  sao cho . Khi đó góc giữa hai đường thẳng  và  bằng:

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có các tam giác ,  đều cạnh ,  là trung điểm của . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  và  biết rằng .

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , . Gọi  lần lượt là trung điểm của các đoạn . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  và .

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với . Các tam giác  vuông tại . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  và .

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện  có . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  và ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D. **.

1. Cho tứ diện  có . Gọi  là trung điểm của đoạn . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  và .

**A. **. **B.** . **C.** . **D.** .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

1. Đáp án D.

• Đáp án A sai. Giả sử  cắt  lần lượt tại ,  cắt  lần lượt tại . Suy ra  đồng phẳng, hay  đồng phẳng, vô lí.

• Đáp án B, C sai, chúng ta có thể dễ dàng thấy một ví dụ là tứ diện  có  và  đếu cắt hai đường thẳng chéo nhau  và .

1. Đáp án C.
2. Đáp án B.
3. Đáp án D.
4. Đáp án D.
5. Đáp án B.
6. Đáp án C.
7. Đáp án D.

• Đáp án A sai vì nếu  và  không trùng nhau thì  đôi một phân biệt. theo tính chất bắc cầu suy ra .

• Đáp án B, C sai, vì ta có thể lấy ví dụ .

1. Đáp án B.

• Trường hợp  có thể xảy ra giữa hai đường thẳng là chéo nhau, song song, cắt nhau.

• Trường hợp  có thể là song song, cắt nhau.

• Trường hợp  có thể là song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Như vậy, tương ứng với mối trường hợp, số các khả năng có thể xảy ra giữa  là .

1. Đáp án C.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy  chéo nhau, nên không có mặt phẳng nào chứa cả . Do đó  sai. Vậy đáp án A, B, C sai.

Đường thẳng  cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án  đúng.

Đường thẳng  cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án  đúng.

1. Đáp án D.

Ta có: .

1. Đáp án A.



Do  lần lượt là trung điểm của  nên .

Do  lần lượt là trung điểm của  nên .

Suy ra , do đó  đồng phẳng. Do đó  không thể chéo nhau.

1. Đáp án D.

Do  là đường trung bình của tam giác  nên .

Tương tự, do  là đường trung bình của tam giác  nên .

 là hình bình hành nên . Do đó:  và .

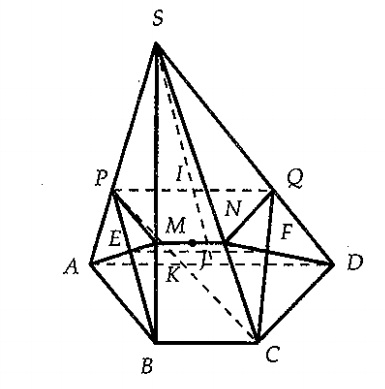
 không song song với  vì giả sử ngược lại thì  và  trùng nhau (vô lí).

1. Đáp án A.

Do  lần lượt là trung điểm của  nên , , . Do đó  đồng phẳng;  đồng phẳng;  đồng phẳng.

 không đồng phẳng vì giả sử ngược lại thì  sẽ thuộc mặt phẳng , suy ra  thuộc mặt phẳng  (vô lí).

1. Đáp án B.



Ta có , suy ra .

Do .

Ta có: , suy ra .

Do .

Từ đó suy ra  và  song song với nhau.

Ta có: .

Suy ra . Gọi  là giao điểm của  với .

Do .

Theo định lý Thalet ta có: . Do  song song với  nên theo định lý Thalet ta có : .

Tương tự ta cũng có: .

Từ đây suy ra .

1. Đáp án C.

Ta có: .

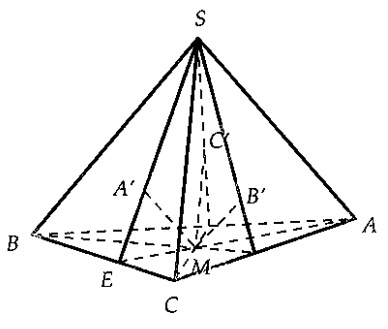
Dễ dàng chứng minh được các đường thẳng còn lại không song song với .

1. Đáp án C.

Do  lần lượt là trung điểm của  nên  là đường trung bình của tam giác . Suy ra .

Ta có: .

1. Đáp án C, B.



a) Do  nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử  là giao điểm của mặt phẳng này với . Khi đó  thẳng hàng và ta có: .

Tương tự ta có: . Vậy . Vậy đáp án đúng là .

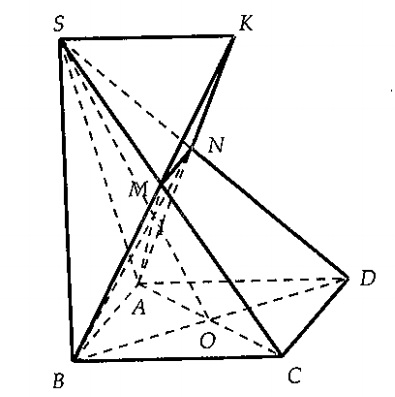
b) Ap dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

.

Dầu bằng xảy ra khi và chỉ khi: .

Điều này chỉ xảy ra khi  là trọng tâm tam giác . Vậy đáp án đúng là B.

1. Đáp án B, A, D, A.



a) Ta có : . Do đó  là hình thang. Do  nên  không thể là hình bình hành, hinh thoi. Vậy đáp án đúng là B.

b) Gọi . Vậy đáp án đúng là A.

c) Gọi .

Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là đường thẳng qua  và song song với .

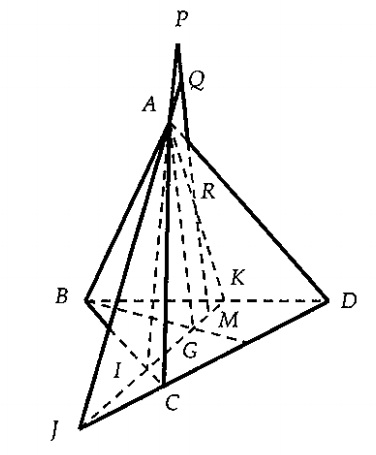
Vậy đáp án đúng là D.

d) Do  nên .

Do  nên .

Từ  và  suy ra . Vậy đáp án đúng là A.

1. Đáp án C, C.



a) Trong mặt phẳng , gọi .

Qua  kẻ . Trong (đây chính là giao điểm của  với )

Tương tự .

Ta có : .

Theo định lý Thalet ta có : . Do đó : .

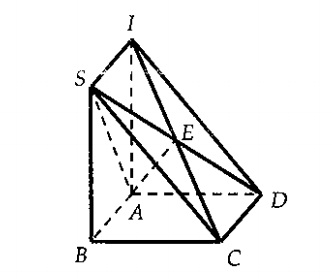
Chứng minh tương tự ta có : .

Vậy đáp án đúng là C.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : .

Vậy giá trị lớn nhất của  bằng . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi . Điều này xảy ra khi  là trọng tâm tam giác . Vậy đáp án đúng là C.

1. Đáp án A, A.



a) Do  nên hai đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng .

Lại có, hai mặt phẳng  và  có  là điểm chung,  nên giao tuyến là đường thẳng đi qua  và song song với . Vậy  thuộc giao tuyến này.

Vậy đáp án đúng là A.

b) Gọi  là giao điểm của  và . Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  là tam giác .

Ta có  là hình thang nên  và . Suy ra  và . Điều này suy ra  là hình bình hành. Khi đó .

Mặt khác, .

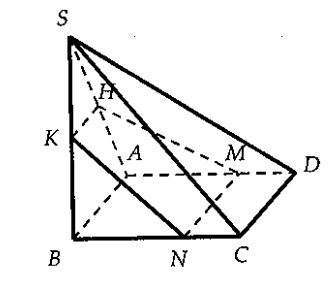
Xét tam giác  có : .

Ta có : .

Diện tích thiết diện là : .

Vậy đáp án đúng là A.

1. Đáp án C, A.



a) Ta có :

.

Ta lại có: .