**CHỦ ĐỀ 1:**

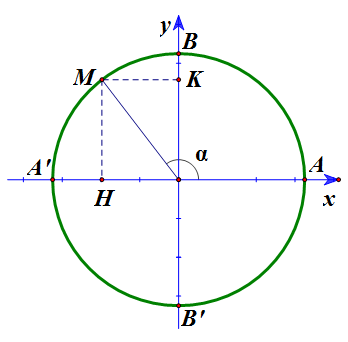
**HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**

**BÀI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Giá trị lượng giác của cung .**

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung  có sđ :



**Hình 1.1**

Gọi  với tung độ của  là , hoành độ là  thì ta có:

Các giá trị , , ,  được gọi là các giá trị lượng giác của cung .

**Các hệ quả cần nắm vững**

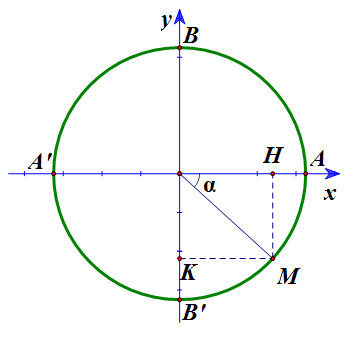
1. Các giá trị ;  xác định với mọi . Và ta có:





1. ; 
2.  xác định với mọi .
3.  xác định với mọi .

Dấu của các giá trị lượng giác của cung  phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung  trên đường tròn lượng giác (hình 1.2).

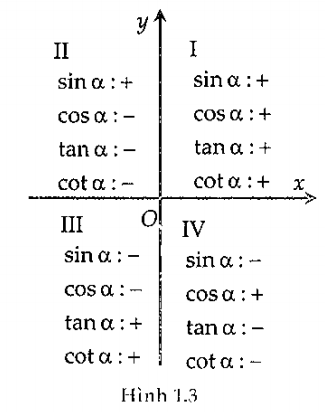


Hình 1.2

Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Góc phần tư  Giá trị lượng giác | I | II | III | IV |
|  | + | - | - | + |
|  | + | + | - | - |
|  | + | - | + | - |
|  | + | - | + | - |

Ở hình 1.3 là một cách nhớ khác để xác định dấu của các giá trị lượng giác



**2. Công thức lượng giác**

***Công thức cơ bản Cung đối nhau***

***Công thức cộng Cung bù nhau***

***Công thức đặc biệt***





***Góc nhân đôi Góc chia đôi***

***Góc nhân ba Góc chia ba***



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ở đây từ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ta có thể suy ra công thức góc chia đôi, chia ba mà không cần nhớ nhiều công thức. |

***Biến đổi tích thành tổng Biến đổi tổng thành tích***



**3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (độ) | 0 |  |  |  |  |  |
| (radian) | 0 |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  | 1 | 0 |
|  | 1 |  |  |  | 0 |  |
|  | 0 |  | 1 |  | Không xác định | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **STUDY TIP**  Từ bảng giá trị lượng giác các cung đặc biệt ở bên ta thấy một quy luật như sau để độc giả có thể nhớ các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   Các giá trị ở tử số tăng dần từ  đến . Ngược lại đối với giá trị , tử số giảm dần từ  về . |

**BÀI: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Hàm số  và hàm số .**

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  với  của góc lượng giác có số đo rađian bằng  được gọi là hàm số , kí hiệu là .

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  với  của góc lượng giác có số đo rađian bằng  được gọi là hàm số , kí hiệu là .

Tập xác định của các hàm số  là .

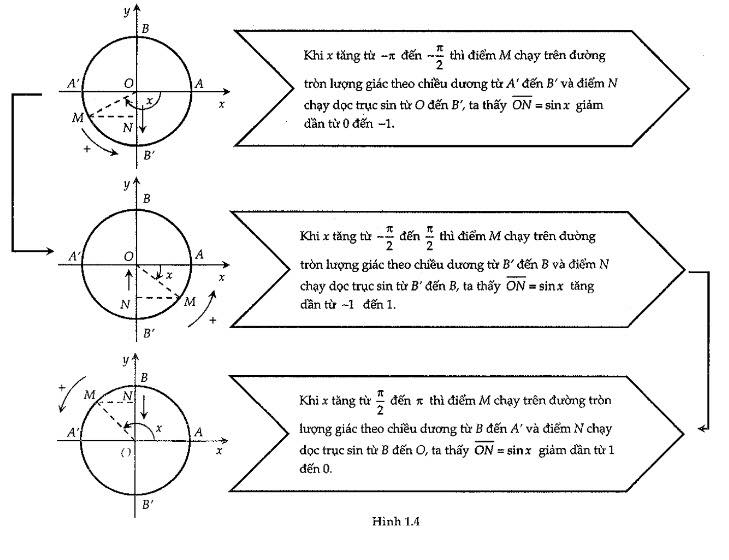
1. **Hàm số **

**Nhận xét:** Hàm số  là hàm số lẻ do hà số có tập xác định  là đối xứng và 

Hàm số  tuần hoàn với chu kì .

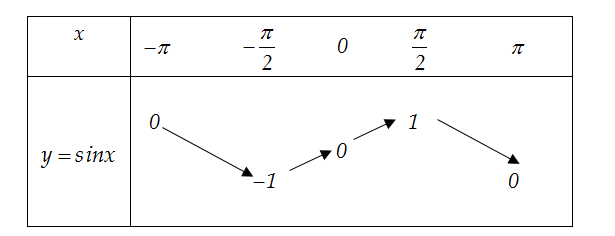
**Sự biến thiên:**

Sự biến thiên của hàm số  trên đoạn  được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



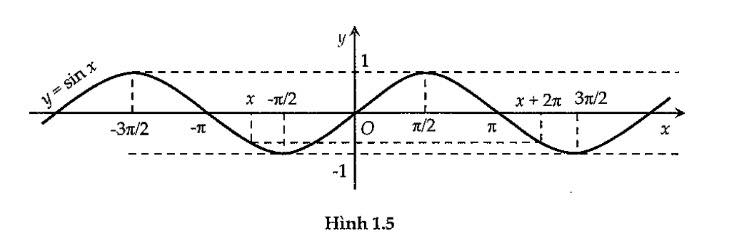
Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số  trên đoạn  như sau:



|  |
| --- |
| **STUTY TIP**  **Khái niệm:**  Hàm số  xác định trên  gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số  sao cho với mọi  thuộc  ta có .  Số dương  nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kì của hàm tuần hoàn. |

**Đồ thị hàm số:**

****

**Nhận xét:** Do hàm số  là hàm số lẻ trên  và tuần hoàn với chu kì  nên khi vẽ đồ thị hàm số  trên  ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn  , sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa , ta được đồ thị hàm số  trên đoạn , cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài 

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Hàm số  đồng biến trên khoảng . Do tính chất tuần hoàn với chu kì , hàm số  đồng biến trên mỗi khoảng .  Tương tự ta suy ra được hàm số  nghịch biến trên mỗi khoảng |

**GHI NHỚ**

**Hàm số **

- Có tập xác định là .

- Có tập giá trị là .

- Là hàm số lẻ.

- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

- Có đồ thị là một đường hình sin.

- Tuần hoàn với chu kì .

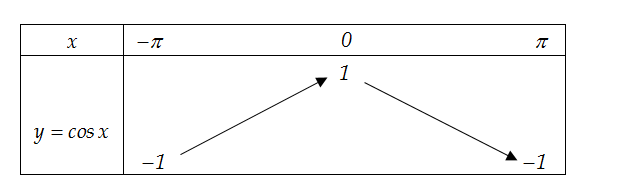
- Đồng biến trên mỗi khoảng .

- Nghịch biến trên mỗi khoảng .

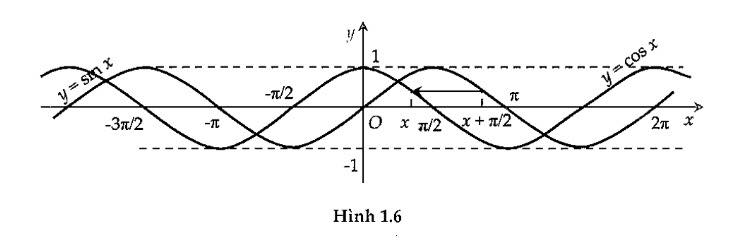
1. **Hàm số **

Ta thấy  nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số  sang trái một đoạn có độ dài  , ta được đồ thị hàm số .

Bảng biến thiên của hàm số  trên .



**Đồ thị hàm số :**



|  |
| --- |
| **STUTY TIP**  Hàm số  đồng biến trên khoảng . Do tính chất tuần hoàn với chu kì , hàm số đồng biến trên mỗi khoảng .  Tương tự ta suy ra được hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng . |

**GHI NHỚ**

**Hàm số :**

- Có tập xác định là .

- Là hàm số chẵn.

- Là một đường hình sin.

- Đồng biến trên mỗi khoảng .

- Nghịch biến trên mỗi khoảng .

**Đọc thêm**

Hàm số  là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở  vì:

****

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số  cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở  và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

**Ứng dụng thực tiễn:** Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số  và hàm số 



Hình 1.7

Với , quy tắc đặt tương ứng mỗi số  với số thực  được gọi là hàm số tang, kí hiệu là . Hàm số  có tập xác định là .

Với , quy tắc đặt tương ứng mỗi số  với số thực  được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là . Hàm số  có tập xác định là .

*Nhận xét:* - Hai hàm số  và hàm số  là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì .

a) Hàm số 



Hình 1.8

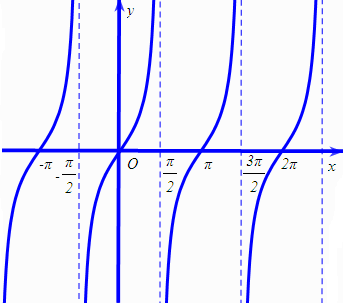
Sự biến thiên: Khi cho  tăng từ  đến  thì điểm  chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ  đến (không kể  và ). Khi đó điểm  thuộc trục tang sao cho chạy dọc theo , nên  tăng từ  đến (qua giá trị  khi ).

*Giải thích:*  vì 

*Nhận xét:* Hàm số  đồng biến trên mỗi khoảng . Đồ thị hàm số  nhận mỗi đường thẳng  làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

*Nhận xét:* Do hàm số  là hàm số lẻ trên  và tuần hoàn với chu kì  nên khi vẽ đồ thị hàm số  trên  ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên , sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ , ta được đồ thị hàm số  trên , cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Hàm số  nhận mỗi đường thẳng  làm một đường tiệm cận |

GHI NHỚ

Hàm số :

- Có tập xác định  - Là hàm số lẻ

- Là hàm số tuần hoàn với chu kì  - Có tập giá trị là 

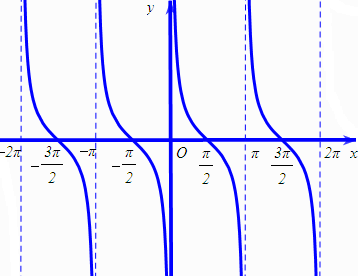
- Đồng biến trên mỗi khoảng 

- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng  làm một đường tiệm cận

b) Hàm số 

Hàm số  có tập xác định  là một hàm số tuần hoàn với chu ki .

Tương tự khảo sát như đối với hàm số  ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số  như sau:



Hình 1.10

**GHI NHỚ**

Hàm số :

- Có tập xác định:  - Là hàm số lẻ

- Là hàm số tuần hoàn với chu kì  - Có tập giá trị là 

- Đồng biến trên mỗi khoảng 

- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng  làm một đường tiệm cận.

**B. Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác**

***Dạng 1:* Bài toán tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Cách 1***  Tìm tập  của  để  có nghĩa, tức là tìm  . | ***Cách 2***  Tìm tập  của  để  không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là . |

CHÚ Ý

**A. Với hàm số  cho bởi biểu thức đại số thì ta có:**

1. , điều kiện: \*  có nghĩa

\*  có nghĩa và .

2. , điều kiện:  có nghĩa và .

3. , điều kiện:  có nghĩa và .

**B. Hàm số  xác định trên , như vậy**

**** xác định khi và chỉ khi  xác định.

\*  có nghĩa khi và chỉ khi  xác định và .

\*  có nghĩa khi và chỉ khi  xác định và .

STUDY TIP

Ở phần này chúng ta chỉ cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số  và  xác định trên .

2. Hàm số  xác định trên .

3. Hàm số  xác định trên .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Chọn A.**

**Lời giải**

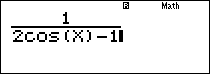
***Cách 1:*** Hàm số đã cho xác định khi .

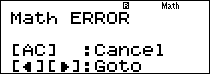
***Cách 2:*** Sử dụng máy tínhcầm tay tính giá trị của hàm số  tại  và  ta thấy hàm số đều không xác định, từ đây ta chọn **A**.

STUDY TIP

Đối với hàm côsin, trong một chu kỳ tuần hoàn của hàm số  tồn tại hai góc có số đo là  và  cùng thỏa mãn  chính vì thế ta kết luận được điều kiện như vậy.

Cách bấm như sau:

Nhập vào màn hình :

Ấn r gán  thì máy báo lỗi, tương tự với trường hợp .

Từ đây suy ra hàm số không xác định tại  và .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Chọn C.**

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định khi

+  xác định 

+ 

 .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Trong bài toán này, nhiều độc giả có thể chỉ sử dụng điều kiện để hàm phân thức xác định  chứ không chú ý điều kiện để hàm  xác định, sẽ bị thiếu điều kiện và chọn D là sai. |

1. Tập hợp  không phải là tập xác định của hàm số nào?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Chọn C.**

**Lời giải**

****

****

***Phân tích*:** Với các bài toán dạng này nếu ta để ý một chút thì sẽ thấy hàm  xác định với mọi . Nên ta chỉ xét mẫu số, ở đây có đến ba phương án có mẫu số có chứa  như nhau là  và . Do đó ta chọn được luôn đáp án 

***Trong ví dụ trên ta có thể gộp hai họ nghiệm  và  thành  dựa theo lý thuyết sau:***



Hình 1.11

Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác

 được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác.

 được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua  trên đường tròn lượng giác.

 được biểu diễn bởi ba điểm cách đều nhau, tạo thành  đỉnh của một tam giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

 được biểu diễn bởi  điểm cách đều nhau, tạo thành  đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

Giải thích cách gộp nghiệm ở ví dụ 3 ta có

Trên hình 1.11 hai chấm tròn đen là điểm biểu diễn hai nghiệm ta tìm được ở ví dụ 3. Từ đây nếu gộp nghiệm lại thì ta sẽ có .

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn D.**

Hàm số đã cho xác định khi  xác định

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ở đây nhiều độc giả nhầm lẫn, thấy hàm số và chọn luôn  là sai. Cần chú ý đến điều kiện để  xác định. |

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn D.**

Ta có 

2017 là một số nguyên dương, do vậy hàm số đã cho xác định khi  xác định .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Trong bài này, ta cần thêm kiến thức về tập xác định của hàm số lũy thừa ở lớp 12: Tập xác định của hàm số  tùy thuộc vào giá trị của  **\*** Với  nguyên dương thì tập xác định là .  **\*** Với  nguyên âm hoặc bằng , tập xác định là .  **\*** Với  không nguyên, tập xác định là . |

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn B.**

Tương tự như ví dụ 5, ta có hàm số xác định khi  xác định

.

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn B.**

Hàm số  xác định khi 

Mặt khác ta có  nên .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Với các bài toán chứa căn thức ta chú ý các hệ số tự do để áp dụng các bất đẳng thức cơ bản như |

1. Tập xác định của hàm số là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có ,. Vậy hàm số đã cho xác đinh với mọi .

***Một dạng khác của bài toán liên quan đến tìm tập xác định của hàm lượng giác như sau:***

1. Để tìm tập xác định của hàm số , một học sinh đã giải theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện để hàm số có nghĩa là .

Bước 2: .

Bước 3: Vậy tập xác định của hàm số đã cho là .

Bài giải của bạn đó đúng chưa? Nếu **sai**, thì **sai** bắt đầu ở bước nào?

**A.** Bài giải đúng. **B.** Sai từ bước 1.

**C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Nhận thấy hàm số đã cho xác định khi  xác định (do  xác định với mọi ).

Do vậy hàm số xác định khi .

1. Hàm số  xác định khi và chỉ khi

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Hàm số đã cho xác định  (do ).

**Dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm sô lượng giác.**

Với  (là tập xác định của hàm số ) thì

. .

 .

1. Cho hàm số .Tất cả các giá trị của tham số  để hàm số xác định với mọi số thực (trên toàn trục số) là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét hàm số 



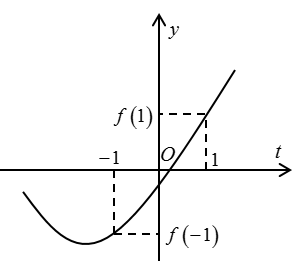
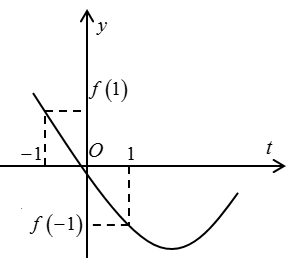
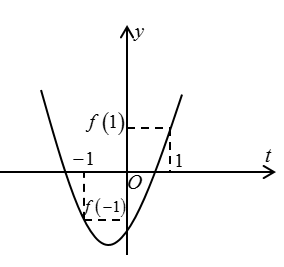
.

Đặt .

Hàm số  xác định với mọi 

.

Đặt  trên .



Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị trên.

Ta thấy  hoặc 

Ycbt 

.

1. Tìm  để hàm số  xác định trên .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Hàm số xác định trên  khi và chỉ khi .

Đặt 

Lúc này ta đi tìm điều kiện của  để 

Ta có 

**TH 1:** . Khi đó  (thỏa mãn).

**TH 2:**  (thử lại thì cả hai trường hợp đều không thỏa mãn).

**TH 3:**  khi đó tam thức  có hai nghiệm phân biệt .

Để  thì .

Vậy  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với các bài toán dạng này ta cần chia ba trường hợp để tìm đủ các giá trị của .

Ở bài toán trên trong **TH3** đã áp dụng qui tắc xét dấu tam thức bậc hai “trong trái ngoài cùng”. Tức là trong khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số , còn khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số .

**Dạng 2: Xét Tính Chẵn Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác.**

**Định Nghĩa.**

Cho hàm số  xác định trên tập .

*a*, Hàm số  được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi  thuộc , ta có  và .

*b*, Hàm số  được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi  thuộc , ta có  và .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Để kết luận hàm số  không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm  sao cho  hoặc chỉ ra tập xác định của  không phải là tập đối xứng. |

***Phương pháp chung:***

**Bước 1:** Tìm tập xác định  của hàm số, khi đó

 Nếu  là tập đối xứng (tức ), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

 Nếu  không phải tập đối xứng(tức là  mà ) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

**Bước 2:** Xác định :

 Nếu  thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

 Nếu  thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

 Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

**Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:**

1, Hàm số  là hàm số lẻ trên .

2, Hàm số  là hàm số chẵn trên .

3, Hàm số  là hàm số lẻ trên .

4, Hàm số  là hàm số lẻ trên .

1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Cách 1:** Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hsố lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

Xét A**:** Do tập xác định  nên .

Ta có . Vậy hàm số  là hàm số chẵn.

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.**

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp  và .

Với A**:** Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp (hình bên trái) và trường hợp  (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì  ta chọn luôn **A.**



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**:  Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không. |

1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số  thì  là

**A.** Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.

**C.** Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** Tập xác định .

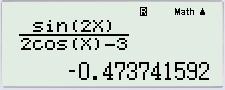
Ta có 

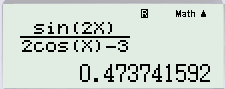
. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.**

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp  và .

Với **A:** Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp (hình bên trái) và trường hợp  (hình bên phải), ta thấy hàm số đã cho là hàm số lẻ.





|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Trong bài toán này, tập xác định  bởi . |

1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số , ta được là:

**A.** Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.

**C.** Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1:**

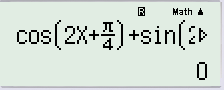
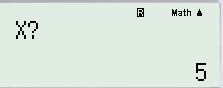
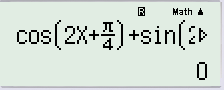
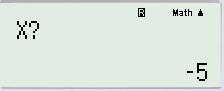
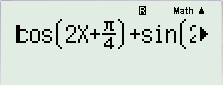
Ta có .

Ta có tập xác định .

Hàm số  vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

**Cách 2:** **Sử dụng máy tính cầm tay.**

Tương tự các bài toán trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà  vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng nên ta chọn **D.**



|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Hàm số  vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng. |

1. Cho hai hàm số  và . Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

**A.** Hai hàm số  là hai hàm số lẻ.

**B.** Hàm số  là hàm số chẵn; hàm số  là hàm số lẻ.

**C.** Hàm số  là hàm số lẻ; hàm số  là hàm số không chẵn không lẻ.

**D.** Cả hai hàm số  đều là hàm số không chẵn không lẻ.

**Lời giải**

**Chọn D.**

*a,* Xét hàm số  có tập xác định là .

Ta có  nhưng  nên  không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số  không chẵn không lẻ.

*b,* Xét hàm số  có tập xác định là . Dễ thấy  không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số  không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D.**

|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Khi xét tính chẵn lẻ của hàm số ta cần chú ý xét tập xác định đầu tiên để giải quyết bài toán một cách chính xác. |

1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số , với . Hàm số  là:

**A.** Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.

**C.** Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Hàm số có tập xác định .

Ta có .

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

1. Cho hàm số , với . Xét các biểu thức sau:

1, Hàm số đã cho xác định trên .

2, Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.

3, Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

4, Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.

5, Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

6, Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Hàm số đã xác định khi  Vậy phát biểu  sai.

Ở đây ta cần chú ý : các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là  là tập đối xứng.



Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn **B.**

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Đồ thị hàm số lẻ thì đối xứng qua tâm O.  Đồ thị hàm số chẵn thì đối xứng qua trục Oy. |

1. Cho hàm số  Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

**A.** Hàm số đã cho có tập xác định 

**B.** Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.

**C.** Đồ thị hàm số đã cho có trục xứng.

**D.** Hàm số có tập giá trị là 

***Lời giải***

**Chọn B.**

Hàm số đã cho xác định trên tập  nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

 Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O. Vậy ta chọn đáp án **B**.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A, B, C, D. |

1. Xác định tất cả các giá trị của tham số  để hàm số  là hàm chẵn.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn C.**

**Cách 1:**

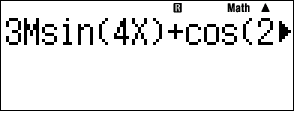
TXĐ:  Suy ra 

Ta có 

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

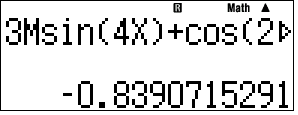


**Cách 2:** **Sử dụng máy tính cầm tay.**

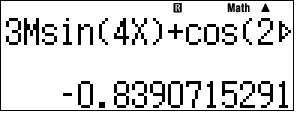
Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị. Với A và C, ta thử một trường hợp để loại hai đáp án còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị  và 

Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 |  | = |

Ấn CALC để gán các giá trị cho m. Ta thử với  thì ấn

Chọn bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán  cho  ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với  và tại 

Ta thấy  Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.

***DẠNG 3.* Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác**

***Phương pháp chung:***

**Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:**

1. Hàm số 

\* Đồng biến trên các khoảng 

\* Nghịch biến trên các khoảng 

1. Hàm số 

\* Đồng biến trên các khoảng 

\* Nghịch biến trên các khoảng 

1. Hàm số  đồng biến trên các khoảng 
2. Hàm số  nghịch biến trên các khoảng 

**Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.**

1. Xét hàm số  trên đoạn  Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên các khoảng  và

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng ; nghịch biến trên khoảng

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng ; đồng biến trên khoảng

**D.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng  và

***Lời giải***

**Chọn A.**

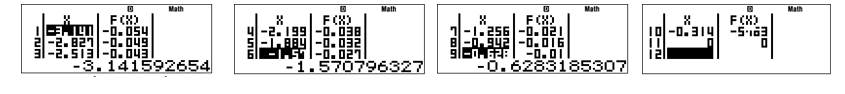
**Cách 1:** Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng và đồng biến trên khoảng

**Cách 2:** **Sử dụng máy tính cầm tay.**

Do ở đề bài, các phương án A, B, C, D chỉ xuất hiện hai khoảng là và  nên ta sẽ dùng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn

Máy hiện  thì ta nhập . START? Nhập END? Nhập  STEP? Nhập 



Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng và đồng biến trên khoảng

1. Xét hàm số  trên đoạn  Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng  và

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng và nghịch biến trên khoảng

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng và đồng biến trên khoảng

**D.** Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng  và

***Lời giải***

**Chọn B.**

Theo lý thuyết ta có hàm số  đồng biến trên mỗi khoảng và nghịch biến trên khoảng  Từ đây ta có với hàm số  đồng biến trên khoảng và nghịch biến trên khoảng

Tiếp theo ta đến với hàm số Ta có ví dụ 3.

1. Xét sự biến thiên của hàm số  trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  và

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng và nghịch biến trên khoảng

**C.** Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng

**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng và đồng biến trên khoảng

**Lời giải**

**Chọn A.**

Tập xác định của hàm số đã cho là 

Hàm số  tuần hoàn với chu kì  dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên 

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số  ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số  đồng biến trên khoảng  và

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên hàm số bị gián đoạn tại  (tức là hàm số không xác định tại |

1. Xét sự biến thiên của hàm số  trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

**A.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng 

**B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng 

**C.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng 

***Lời giải***

**Chọn D.**

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ  và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên 

Ta có hàm số 

\* Đồng biến trên khoảng 

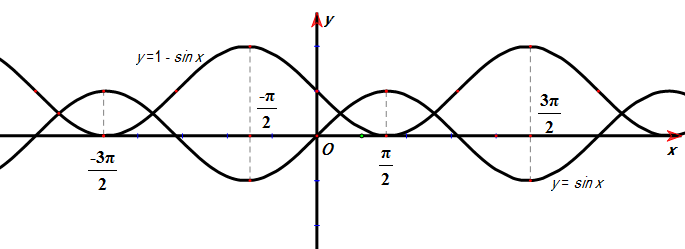
\* Nghịch biến trên khoảng 

Từ đây suy ra hàm số 

\* Nghịch biến trên khoảng 

\* Đồng biến trên khoảng Từ đây ta chọn D.

Dưới đây là đồ thị của hàm số  và hàm số trên 



1. Xét sự biến thiên của hàm số  Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng 

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng 

**C.** Hàm số đã cho có tập giá trị là

**D.** Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng 

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**

Ta có 

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là 

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ  do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn



Ta có:

\* Hàm số đồng biến trên khoảng 

\* Hàm số nghịch biến trên khoảng Từ đây ta chọn A.

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay**

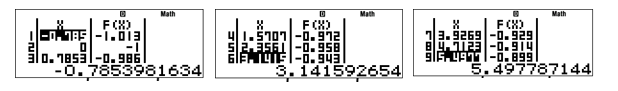
Tương tự như ở ví dụ 1, ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải

bài toán.

Ấn

Máy hiện  thì ta nhập  . Chọn STAR; TEND; STEP

phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:



Từ bảng giá trị của hàm số  trên ta thấy khi  chạy từ  đến  thì

giá trị của hàm số tăng dần, tức là hàm số đồng biến trên khoảng

Phân tích thêm: Khi  chạy từ  đến  thì giá trị của hàm số giảm dần, tức là

hàm số nghịch biến trên khoảng

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ta chú ý ở đây có  nên ta có thể suy ra STEP phù hợp. Trong bài gán STEP |

1. Chọn câu đúng?

**A.** Hàm số  luôn luôn tăng.

**B.** Hàm số  luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.

**C.** Hàm số  tăng trong các khoảng 

**D.** Hàm số  tăng trong các khoảng 

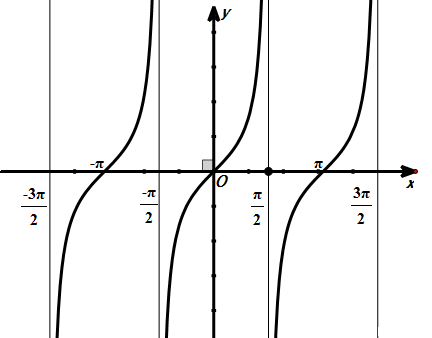
**Lời giải**

**Chọn B.**

Với A ta thấy hàm số không xác định tại mọi điểm  nên tồn tại các điểm làm

cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số  đồng biến trên mỗi khoảng 

Từ đây loại C và D.

1. Xét hai mệnh đề sau:

(I)  : Hàm số  giảm.

(II)  : Hàm số  giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

**A.** Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả 2 sai . **D.** Cả 2 đúng .

**Lời giải**

**Chọn B.**

***Cách 1:***

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy 

Lúc này ta có  

Ta thấy  thì  

   . Vậy  là hàm tăng.

Tương tự ta có  là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Cách 2:

Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| MODE |  | 7 |

Với hàm  ta nhập MODE 7: TABLE ( )

Nhập hàm  như hình bên:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | ∇ |  | SIN |  | ALPHA |  | ) |  | ) |  | = |

START?  ; END?  . STEP?  .

Của hàm số  như hình bên. Ta thấy giá trị của hàm số tăng dần khi x chạy từ  đến  . Nên ta kết luận trên  hàm số  tăng.

Tương tự với II và kết luận.

1. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

**A.** đồng biến trong .

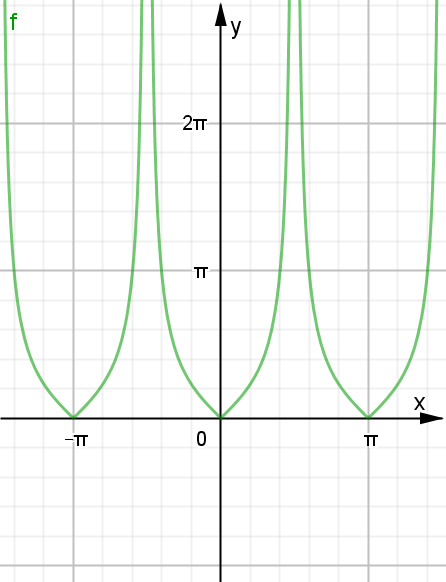
**B.** là hàm số chẵn trên.

**C. ** có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

**D. ** luôn nghịch biến trong  .

**Lời giải**

**Chọn B.**

******

Ta được đồ thị như hình vẽ trên. Ta thấy hàm số  nghịch biến trên  và đồng biến trên  . Nên ta loại A và D.

Với B ta có   hàm số  là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ta suy diễn đồ thị hàm hàm số  từ đồ thị hàm số  từ đó suy ra khoảng đơn điệu của hàm số .   * Giữ nguyên phần đồ thị hàm số nằm phía trên trục . * Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số phía dưới trục qua . * Hợp hai phần trên ta được đồ thị hàm số  . |

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:   * Với A:  không xác định tại  nên không thể đồng biến trên * Từ B suy ra C;D sai. |

***DẠNG 4.* Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.**

\*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số  xác định trên miền  .

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số  trên D nếu 
2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D nếu 

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác .
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa  và  .
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.
5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: 

**A.** ** B. **

**C. D. **

**Phân tích**

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

**Bước 1:** Chỉ ra 

**Bước 2 :** Chỉ ra  sao cho ** .**

**Kết luận : **

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** Hàm số xác định trên  .

Ta có 

 .



Ta có  khi  ;  khi  .

Vậy  .

**Cách 2:** sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị là  .

Chỉ có hai giá trị min là 1;-1.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALCđể thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình  ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập  ta thấy phương trình có nghiệm.

Từ đây ta chọn **B**.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì  là giá trị lớn hơn và  là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại. |

1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: 

**A.  B. **

**C.  D.  .**

Lời giải

**Chọn A.**

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong STUDY TIP ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa  về theo  hoặc  .

Ta có   

Mặt khác   .

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên  . Với 

**Lời giải tổng quát**

Vì   sao cho  và 

Vì  

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

 . Ta có 

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng (\*) như sau: Ta có   .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:  Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  điều kiện có nghiệm  . Từ đây ta tìm được  của y. |

1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số 

**A.  . B. **

**B.  D. **

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** Ta có  .

Ta sử dụng điều kiện ở STUDY TIP trong bài tổng quát trên.

Ta có    

**Cách 2** : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE:  thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A;B;C;D nên ta không cần thử trường hợp .

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với  thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Nếu hàm số có dạng  ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở phía trên và tiếp tực lời giải. |

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số .

**A.** . **B.** 

**C.** . **D.**  không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1** : Ta có    .

Vậy khi  

**Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay**

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với  dẫn đến chọn đáp án sai. |

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**A. **. **B.** .

**C.** . **D.** Không tồn tại GTLN.

**Lời giải**

**Chọn B.**



Dấu bằng xảy ra khi 

.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Với các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng. Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xãy ra hay không. |

***Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau***

1. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn  lần lượt là

**A. **. **B.** .

**C.** . **D.** .

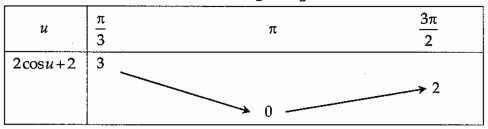
**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ ví dụ  ta có . Đặt 

Từ đề bài ta xét 

Ta lập BBT của hàm số  trên .



Từ bảng biến thiên ta thấy 



Hay .

|  |
| --- |
| **STUDY TIP:**  Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn. |

1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

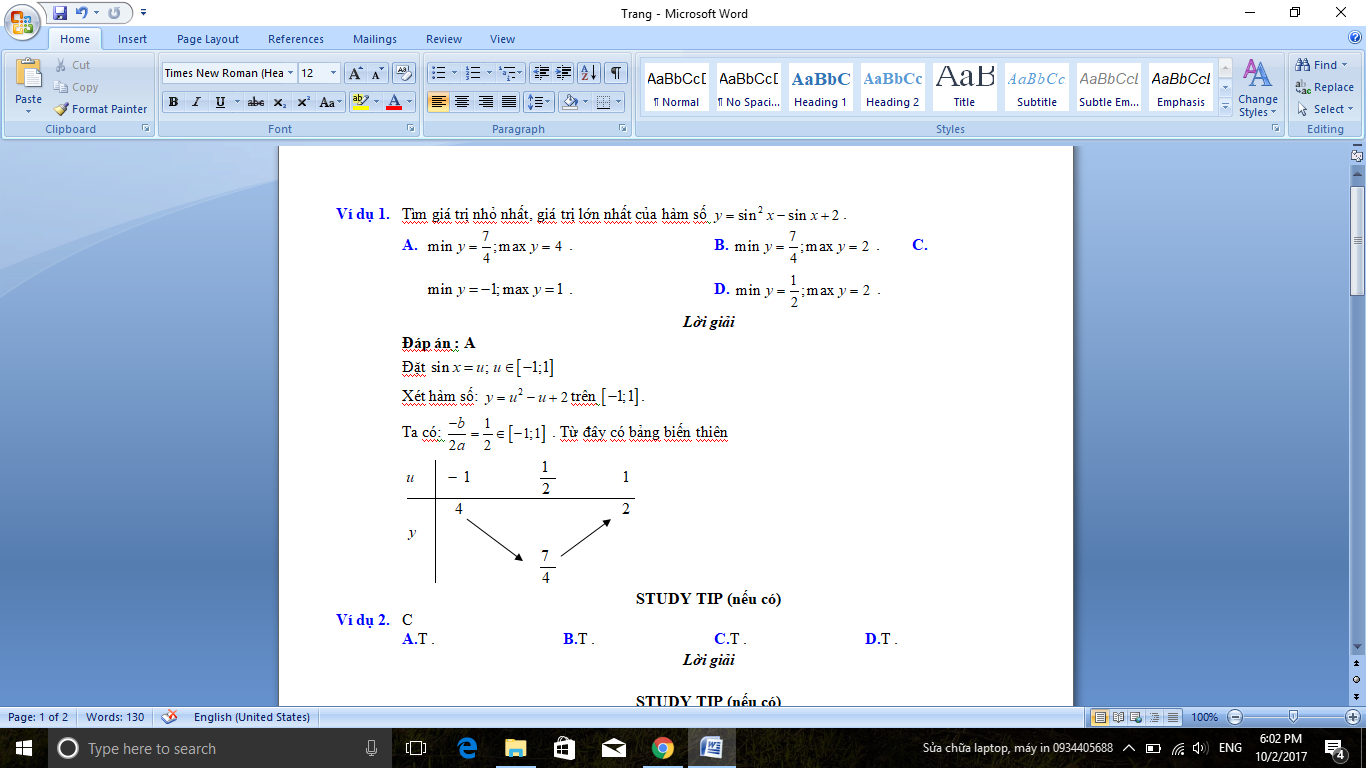
***Lời giải***

**Chọn A.**

Đặt 

Xét hàm số: trên .

Ta có: . Từ đây có bảng biến thiên



Ta kết luận: và .

Hay  và .

***Ngoài các phương pháp giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra từ các ví dụ trên ta còn phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sang tạo và kĩ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.***

Một số bất đẳng thức ta thường dung:

**1.Bất đẳng thức AM – GM.**

a. Với hai số:

Cho hai số thực là hai số dương, ta có dấu bằng xảy ra khi .

b. Với  số:

Cho hai số thực là các số dương , ta có dấu bằng xảy ra khi .

**2. Bất đẳng thức Bunyakovsky**

a. Bất đẳng thuwcsBunyakovsky dạng thông thường.

 . Dấu bằng xảy ra khi 

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số và ta có



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:  Cho hàm số  + Nếu thì  dấu bằng xảy ra khi .  + Nếu thì  dấu bằng xảy ra khi .  + Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải là  thì ta phải lập BBT để tìm min max  Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi với quy ước nếu một số  nào đó  bằng  thì  tương đương bằng . |

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakopvsky ta có 

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số 

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

***Đáp án B***

***Lời giải***

**Chọn B.**

Ta có ****

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky cho  số: 1; 1; ; ta có:



Hay 

Dấu bằng xảy ra khi 

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky bởi ở trong căn lần lượt có và . Ta cân bằng hệ số của và  để áp dụng tính chất . Áp dụng Bunyakopvsky thì vế phải sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán. |

1. Cho hàm số  với . Kết luận nào sau đây là đúng?

**A. ** khi ****T **B. ** khi ****

**C. ** khi **** **D. ** khi **.**

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1:** Ta thấy  và . Suy ra  và  là hai số dương. Áp dụng vất đẳng thức AM- GM cho hai số dương ta có



Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có 

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM-GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM.  Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.  Với  là hai số thực dương ta có  dấu bằng xảy ra khi  Vậy , dấu bàng xảy ra khi  vì . |

**Cách 2:** Để ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng .

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

1. Cho  và . Tìm giá trị lớn nhất của



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có 

Ta thấy  lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có: 

Vậy 

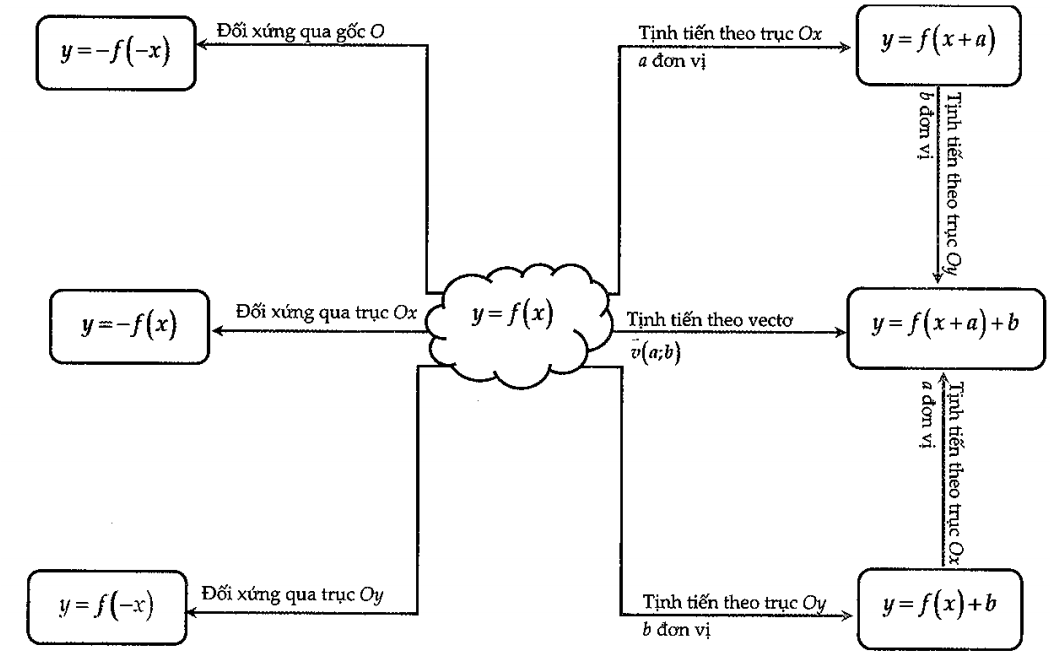
**💣 Đọc thêm**

**DẠNG 5: Dạng đồ thị của hàm số lượng giác**

***Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần 1:***

***Lý thuyết cơ bản:***Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

**Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:**



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

|  |  |
| --- | --- |
| Đồ thị hàm số  gồm | \*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị .  \*Đối xứng phần đồ thị của hàm số  phía dưới trục hoành qua trục hoành. |
| Đồ thị hàm số  gồm | \*Phần đồ thị của hàm số  nằm bên phải trục .  \*Đối xứng phần đồ thị trên qua trục . |
| Đồ thị hàm số  với  gồm | \*Phần đồ thị của hàm số  trên miền thỏa mãn .  \*Đối xứng phần đồ thị  trên trên miền  qua trục hoành. |

Cho hàm số . Từ đồ thị hàm số  ta suy diễn:

Ở phần lý thuyết có đưa ra phần đọc thêm về hàm số  với 

|  |
| --- |
| Hàm số  cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì  và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.  Tương tự hàm số  cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin. |

Ta có ví dụ sau:

1. Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** |  | **B.** |  |
| **C.** |  | **D.** |  |

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta thấy  nên ta có loại A và B.

Tiếp theo với C và D ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kì 

Ta thấy với  thì  nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án C.

1. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** |  | **B.** |  |
| **C.** |  | **D.** |  |

**Lời giải**

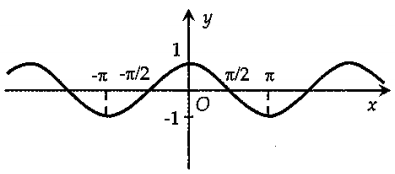
**Chọn D**

Ta thấy nên ta loại B.

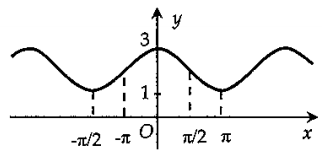
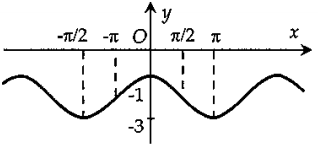
Tiếp theo ta có hàm số  có chu kì tuần hoàn là 

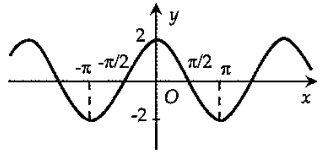
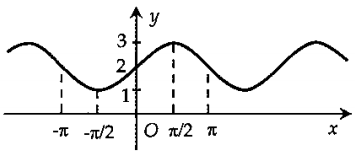
Ta thấy với  thì  nên ta chọn D.

1. Cho đồ thị hàm số  như hình vẽ :



Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số 

**A.** . **B.** .

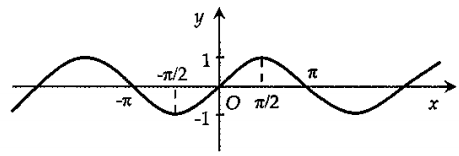
**C. ** . **D. **.

**Lời giải**

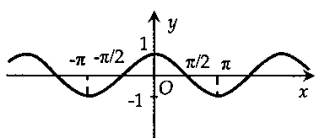
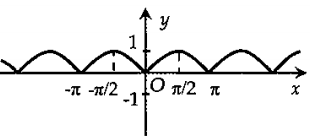
**Chọn A**

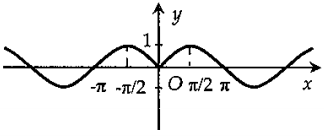
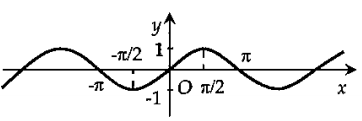
Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số  trên trục  lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

1. Cho đồ thị hàm số  như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số 

**A. ** . **B. **.

**C.** . **D. **.

**Lời giải**

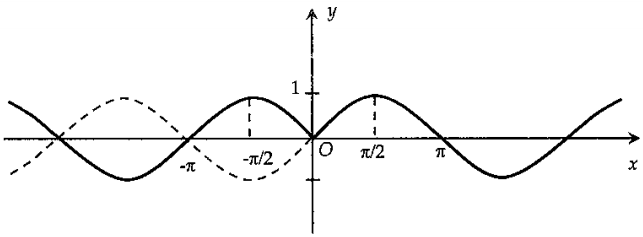
**Chọn C**

Suy diễn đồ thị hàm số  từ đồ thị hàm số 

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số  nằm bên phải trục 

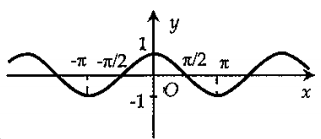
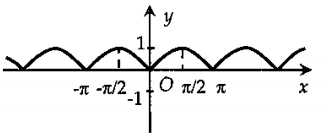
Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục 

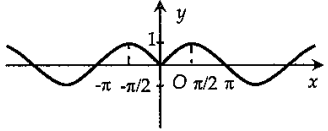
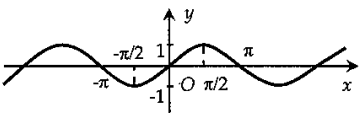
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số 



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ngoài ra ở bài toán này, ta có thể áp dụng tính chất hàm chẵn lẻ mà tôi đã cung cấp ở phần xét tính chẵn lẻ của hàm số phía trước. Hàm số  là hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Nhìn các phương án A, B, C, D chỉ có phương án D là không có đồ thị đối xứng qua trục Tiếp theo ta tìm giá trị của một số điểm đặc biệt và chọn được C. |

1. Hình nào sau đây là đồ thị hàm số 

**A. ** . **B. **.

**C. ** . **D. **.

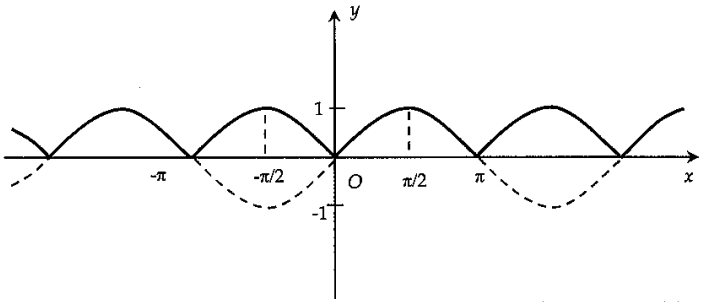
**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** Suy diễn đồ thị hàm số  từ đồ thị hàm số 

Giữ nguyên phần tử từ trục hoành trở lên của đồ thị 

Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số  phía dưới trục hoành qua trục hoành.



**Cách 2:** Ta thấy  nên đồ thị hàm số  hoàn toàn nằm trên trục 

Từ đây ta chọn **B**.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

***DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ***

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tập xác định  của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Xét bốn mệnh đề sau
2. Hàm số  có tập xác định là 
3. Hàm số  có tập xác định là 
4. Hàm số  có tập xác định là 
5. Hàm số  có tập xác định là 

Số mệnh đề đúng là

**A.** 1. **B.** 2.

**C.** 3. **D.** 4.

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tập xác định của hàm số  là

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** .

1. Tìm tập xác định của hàm số: 

**A.** .  **B.**  .

**C.**  **D.** 

1. Tìm tập xác định của hàm số:  .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Hàm số nào sau đây có tập xác định là ?

**A.**  . **B.**  .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số nào sau đây có tập xác định khác với các hàm số còn lại?

**A.** . **B.**  .

**C.** . **D.**  .

1. Hàm số  chỉ xác định khi:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số  có tập xác định là:

**A.**  . **B.** .

**C.** . **D.**  .

1. Chọn khẳng định đúng:

**A.** Hàm số có tập xác định là các đoạn .

**B.** Hàm số có tập xác định là các đoạn .

**C.** Hàm số có tập xác định là các đoạn .

**D.** Hàm số có tập xác định là các đoạn .

1. Xét hai mệnh đề:

(I): Các hàm số  và có chung tập xác định là .

(II): Các hàm số  và  có chung tập xác định là .

**A.** Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

1. Cho hàm số  với . Tập xác định của hàm số là:

**A.**  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

1. Cho hàm số . Tập xác định:

**A.** . **B.**  . **C.**  . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.**  . **B.** .

**C.**  . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hàm số . Hãy chỉ ra khoảng mà hàm số không xác định 

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Xét hai câu sau:

(I): Các hàm số  và có chung tập xác định là 

(II): Các hàm số  và  có chung tập xác định là .

**A.** Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.**  . **B.**  .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.**  . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Tập xác định của hàm số  là:

**A.**  . **B.**  .

**C.**  . **D.** .

1. Hàm số  có tập xác định là:

**A.** . **B.**  .

**C.**  . **D.** .

***Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác***

1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.**  . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

**A.** . **B.**  . **C.** . **D.**  .

1. Hàm số  là:

**A.** Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ

**C.** Vừa chẵn vừa lẻ. **D.** Không chẵn không lẻ.

1. Xét tính chẳn lẻ của hàm số ta kết luận hàm số đã cho là:

**A.** Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ .

**C.** Vừa chẵn vừa lẻ **D.** Không chẵn không lẻ

1. Xét các câu sau:

I.Hàm số là hàm số lẻ.

II.Hàm số là hàm số chẵn.

III.Hàm số là hàm số lẻ.

Trong các câu trên, câu nào đúng?

**A.** Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III) . **D.** Cả 3 câu .

1. Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm số lẻ:

**A.**  . **B.**  .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số có tính chất nào sau đây?

**A.** Hàm số chẵn. **B.**Hàm số lẻ.

**C.** Hàm không chẵn không lẻ. **D.** Tập xác định .

1. Hãy chỉ ra hàm số không có tính chẵn lẻ

**A.**  . **B.**  .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.**  . **B.** .

**C.**  . **D.** .

1. Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

**A.**  . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Hãy chỉ ra hàm nào là hàm số chẵn:

**A.**  . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số  là hàm số lẻ

(II) Hàm số  là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

**A.** Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

1. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số  là hàm số lẻ

(II) Hàm số  là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

**A.** Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

1. Hàm số là:

**A.** Hàm số chẵn. **B.**Hàm số lẻ.

**C.** Hàm không chẵn không lẻ. **D.**Hàm số không tuần hoàn.

1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Khẳng định nào sau đây là sai?

**A.** có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ . **B.** có đồ thị đối xứng qua trục  .

**C.** có đồ thị đối xứng qua trục . **D.** có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

1. Cho hàm số  xét trên . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm không chẳn không lẻ. **B.** Hàm lẻ.

**C.** Hàm chẳn. **D.** Có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

1. Tìm kết luận sai:

**A.** Hàm số là hàm chẵn .

**B.** Hàm số là hàm lẻ .

**C.** Hàm số là hàm chẵn.

**D.** Hàm số là hàm số không chẵn không lẻ.

1. Nhận xét nào sau đây là sai?

**A.** Đồ thị hàm số  nhận trục làm trục đối xứng.

**B.** Đồ thị hàm số  nhận góc tọa độ làm tâm đối xứng.

**C.** Đồ thị hàm số  nhận trục làm trục đối xứng.

**D.** Đồ thị hàm số  nhật góc tọa độ làm tâm đối xứng.

1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có trục đối xứng.

**A.**  . **B.**  .

**C.** . **D.**  .

1. Cho hàm số . Hàm số trên là hàm số.

**A.** Hàm lẻ. **B.** Hàm không tuần hoàn.

**C.** Hàm chẳn. **D.** Hàm không chẳn không lẻ.

1. Hàm số là

**A.** Hàm lẻ. **B.** Hàm không tuần hoàn.

**C.** Hàm chẳn. **D.** Hàm không chẳn không lẻ.

1. Xác định tĩnh chẳn lẻ của hàm số: 

**A.** Hàm lẻ. **B.** Hàm không tuần hoàn.

**C.** Hàm chẳn. **D.** Hàm không chẳn không lẻ.

**DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

1. Trong khoảng , hàm số là hàm số:

**A.** Đồng biến. **B.** Nghịch biến.

**C.** Không đổi. **D.** Vừa đồng biến vừa nghịch biến.

1. Hàm số nghịch biến trên các khoảng nào sau đây ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Hàm số nghịch biến trên khoảng ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Xét các mệnh đề sau:

(I): :Hàm số  giảm.

(II): :Hàm số  giảm.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên:

**A.** Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

1. Cho hàm số . Kết luận nào sau đây là đúng về sự biến thiên của hàm số đã cho?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  và .

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên .

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  .

**D.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên khoảng.

1. Với , kết luận nào sau đây về hàm số  là sai?

**A.** Hàm số tuần hoàn với chu kỳ .

**B.** Hàm số luôn dống biến trên mỗi khoảng .

**C.** Hàm số nhận đường thẳng là một đường tiệm cận.

**D.** Hàm số  là hàm số lẻ.

1. Để hàm số  tăng, ta chọn x thuộc khoảng nào?

**A.**  . **B.**  .

**C.**  . **D.**  .

1. Xét hai mệnh đề sau:

(I): :Hàm số  tăng.

(II): :Hàm số  tăng.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên:

**A.** Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

1. Hãy chọn câu sai: Trong khoảng thì:

**A.** Hàm số là hàm số nghịch biến.

**B.** Hàm số là hàm số nghịch biến.

**C.** Hàm số là hàm số đồng biến.

**D.** Hàm số là hàm số đồng biến.

1. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn  là:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** |  | **B.** |  |
| **C.** |  | **D.** |  |

1. Cho hàm số . Bảng biến thiên của hàm số trên đoạnlà:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** |  | **B.** |  |
| **C.** |  | **D.** |  |

**TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

1. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số  là:

**A.** 0 và 4. **B.** 4 và 4. **C.** 0 và 1. **D.** 1 và 1.

1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số là:

**A.**  và . **B.**  và . **C.**  và  **D.**  và 

1. Cho hàm số  Giá trị lớn nhất của hàm số là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Giá trị lớn nhất của hàm số  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Giá trị lớn nhất của hàm số là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Hàm số  đạt giá trị lớn nhất là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tổng của giá trị nhỏ nhất của hàm số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị lớn nhất của hàm số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số**

1. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi 

Nếu giải đến đây ta có thể dễ dàng loại B,C,D vì:

Với C thì thiếu 

Với B,D thì không thõa mãn.

Với A ta kết hợp gộp nghiệm thì ta được 

1. Đáp án **B.**

Ở đây  xác định với mọi số thực . Nên ta đi tìm điều kiện cho  xác định khi



1. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi



1. Đáp án **B.**

Mệnh đề  và là đúng

Mệnh đề  và là sai

Sửa lại cho đúng như sau

Hàm số  có TXĐ là 

Hàm số  có TXĐ là 

1. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi 

Vậy TXĐ 

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi 

Vậy TXĐ 

1. Đáp án **B.**

Ta có . Vậy hàm số đã cho xác định với mọi 

1. Đáp án **C.**

Ta có .

Vậy hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Tương tự câu 14, hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **C.**

Hàm số đã cho xác định khi 

Mà  nên hàm số đã cho xác định 

Vậy hàm số đã cho xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Với A thì hàm số xác định khi 

Với B thì hàm số xác định khi xác định .

Với C thì hàm số xác định khi 

Với D thì 

Vậy ta chọn D vì các phương án trên không có phương án nào thỏa mãn hàm số có tập xác định là 

1. Đáp án **C.**

Với A thì hàm số xác định khi 

Với B thì hàm số xác định khi 

Với C thì hàm số xác định khi 

Từ đây ta chọn Cdo khác với A và B

1. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi , mà , do vậy để hàm số xác định thì 

1. Đáp án **B.**

**Cách 1:** Hàm số đã cho xác định khi  đúng với mọi 

**Cách 2**: ,tập xác định là 

1. Đáp án **C.**

Với A thì hàm số  xác định khi . vậy A sai.

Với B thì hàm số xác định khi 

Với C thì hàm số xác định khi  xác định khi . Vậy C đúng.

1. Đáp án **D.**

Ta thấy cả hai hàm số  và đều xác định khi . tương tự thì hai hàm số ở mệnh đề II đều xác định khi .

1. Đáp án **C.**

Hàm số xác định khi 

1. Đáp án **D.**

Hàm số xác định khi 

1. Đáp án **C.**

Hàm số xác định khi 

1. Đáp án **A.**

Hàm số xác định khi 

1. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi 

Khoảng  chứa  nên hàm số không xác định trong khoảng này

1. Đáp án **A.**

Hàm số  tập xác định là , Hàm số  tập xác định là , suy ra (II) sai

1. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi 

****

1. **Đáp án B.**

Hàm số  xác định khi .

1. **Đáp án A.**

ĐK: 

Tập xác định .

1. **Đáp án A.**

Ta có  nên .

Mặt khác .

Hàm số đã cho xác định 

1. 

Tập xác định .

1. **Đáp án B.**

Vì  nên  và .

Hàm số xác định .

Tập xác định của hàm số là .

1. **Đáp án A.**

Vì  neen .

Hàm số xác định .

Vậy .

1. **Đáp án D.**

Hàm số xác định khi 

.

Vậy tập xác định của hàm số là .

**Dạng 2: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.**

1. **Đáp án A.**

Với A: TXĐ: .

Ta có với 

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

1. **Đáp án B.**

Với A: Ta có 

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Với B: Ta có:



Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Vậy ta chọn B.

1. **Đáp án B.**

Hàm số đã cho có tập xác định .

Vậy với . Ta có  .

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Đáp án **B.**

1. **Đáp án A.**

Tập xác định của hàm số là  là tập đối xứng.

Ta có 

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

1. **Đáp án C.**

Ta loại I và II do khi  thì , do đó không tồn tại.



Với III: Hàm số xác định khi .



Tập xác định của hàm số là tập đối xứng.

Do vậy, ta xét .



Vậy III đúng.

1. **Đáp án C.**

Với A: Tương tự như câu 26, thì ta loại A.

Với B: Tập xác định là tập đối xứng.



Ta có Vậy hàm sô ở phương án C là hàm số lẻ.



1. **Đáp án A.**

Ta loại D vì để hàm số đã cho xác định thì nên tập xác định của hàm số đã cho không thể là hàm số chẵn.



Do .



1. **Đáp án B.**

Ta thấy các hàm số ở phương án A,C là các hàm số lẻ, còn ở phương án D là hàm số chẵn. Do vậy, ta chọn B.Thật vậy .



1. **Đáp án C.**

Hàm số lẻ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, do đó ta đi tìm hàm số lẻ trong bốn hàm số đã cho. Với bài toán này ta đi tìm hàm số là hàm số lẻ. Với các bạn tinh ý thì ta có thể chọn luôn C.

Lý giải:

Tập xác định là tập đối xứng.



. Vậy hàm số ở phương án C là hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



1. **Đáp án B.**

Hàm số chẵn có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng do đó ta đi tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho.

Hàm số ở D loại vì lí do tương tự câu 26.

Hàm số A và C là hàm số lẻ. Do vậy ta chọn **B.**

1. **Đáp án A.**

Với A: TXĐ: .



Ta có .



Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Các hàm số ở B, C, D đều là hàm số lẻ.

1. **Đáp án D.**

(I) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có .



Vậy (I) đúng.

(II) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có

.



Vậy (II) đúng.

1. **Đáp án A.**

- Với (I) ta có .



Vậy hàm số ở (I) không phải hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.

- Với (II) ta có .



Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

1. **Đáp án C.**

Tập xác định của hàm số .



Ta có



Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

1. **Đáp án D.**

Dễ thấy hàm số là hàm số lẻ.



Với B ta có



Vậy hàm số ở B là hàm số lẻ.

Với C ta có TXĐ là tập đối xứng.



Vậy hàm số ở C là hàm số lẻ. Vậy ta chọn D.

1. **Đáp án A.**

Ta chọn luôn A vì ở phần ví dụ ta có đưa ra hàm số là hàm số chẵn trên D.



1. **Đáp án A.**

Với A: Tập xác định .



Ta có



Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

1. **Đáp án A.**

Ta thấy hàm số ở phương án A là hàm số chẵn thì ta có đồ thị đối xứng qua trục tung, chứ không phải đối xứng qua gốc tọa độ.

1. **Đáp án C.**

Tập là tập đối xứng.



Ta có . Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn



1. **Đáp án B**.

*Vói A*: Ta có vậy A đúng.



*Với B* : Tập xác định D là tập đối xứng .

Ta có = .



Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Vậy B sai.

1. **Đáp án D.**

*Với A*: Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng . Ta có = . Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục *oy* làm trục đối xứng . Vậy A đúng.



*Với B*: Ta có . Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng . vậy B đúng .



*Với C* : Ta có Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng . Vậy C đúng .



Từ đây ta chọn D.

1. **Đáp án C**.

Bài toán trở thành tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho phần phương án .

*Với A* : Ta có Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ, (loại).



*Với B* : Ta có Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ (loại).



*Với C*: Ta có = vậy ta chon C



1. **Đáp án A**.

Vì . Do đó điều kiện là vậy tập xác định của D là tập đối xứng.



Ta có . Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ.



1. **Đáp án D.**

Tập xác định Với



Ta có = =



Ta thấy . Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.



1. **Đáp án C**.

Tập xác định là tập đối xứng .



. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.



**Dạng 3 : Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác**.

1. **Đáp án A.**

**Cách 1** : Ta thấy trên khoảng hàm đồng biến và hàm đồng biến , suy ra trên hàm số đồng biến.



**Cách 2** : Sử dụng máy tính . Dùng TABLE ta xác định được hàm số tăng trên



1. **Đáp án C** .

Ta thấy hàm số nghịch biến trên , suy ra hàm số nghịch biến khi



Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng



1. **Đáp án A**.

Hàm số nghịch biến khi



1. **Đáp án B.**

 : Hàm giảm và , suy ra tăng :



Câu (I) sai,  : Hàm tăng và , , suy ra hàm giảm.



Câu (II) đúng.

1. **Đáp án A.**

Ta có = . Xét sự biến thiên của hám số , ta sử dụng TABLE để xét các mệnh đề .



Ta thấy với A. Trên thì giá trị của hàm số luôn tăng.



Tương tự trên thì giá trị của hàm số cũng luôn tăng.



1. **Đáp án B**.

Ta thấy hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng , suy ra hàm số luôn đồng biến tren mỗi khoảng . Vậy B là sai.



1. **Đáp án A**.

Ta có . Để hàm số tăng thì



1. **Đáp án C**.

Bài toán có hai hàm số mà cùng xét trên một khoảng nên ta sẽ sử dụng chức năng TABLE cho hai hàm Ấn MODE7 : Nhập là hàm nhập g là hàm thì ta có kết quả .



Ta thấy cả hai hàm số đều không là hàm tăng trên cả khoảng . Vì khi chạy từ đến 0 thì giá trị của hai hàm số đều giảm . Khi chạy từ 0 đến thì giá trị của hai hàm số đều tăng , vậy cả hai mệnh đề đều sai.



1. **Đáp án D.**

D sai , thật vậy với , ta có :



1. **Đáp án A**.

Ta có thể loại phương án *B ;C ;D* luôn do tại và . Các bảng biến thiên *B ;C ;D* đều không thỏa mãn.



1. **Đáp án C**.

Tương tự như câu 70 thì ta có thể loại A và B do tiếp theo xét giá trị hàm số tại hai đâu mút thì ta loại được D.



**Dạng 4 : Tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của hàm lượng giác** .

1. **Đáp án B**.

Tập xác định .Ta có , . . Vậy



1. **Đáp án C** .

Ta có



1. **Đáp án C**.

Ta có



1. **Đáp án B**.

Ta có =



Ta có Dấu bằng xảy ra khi



1. **Đáp án D**.

***Cách 1*** : Tương tự như phần lý thuyết đã giới thiệu thì ta thấy . Vậy . Ta có . Vậy min *y* = 0.



***Cách 2 :*** Ta có .



1. **Đáp án C**.

Ta có . Ta có Vậy GTLN của hàm số đã cho là 2.



1. **Đáp án A.**

Ta có . Vậy GTNN của hàm số là .



1. **Đáp án B**.

Ta có



1. **Đáp án D**.

Ta có



Dấu bằng xảy ra khi



1. **Đáp án D**.

Ta có Từ đó suy ra = . Vậy



1. **Đáp án C**.

Ta có . Ta có . Do đó ta có . Vậy giá trị lớn nhát của hàm số là .



1. **Đáp án A.**

Ta có



.



Dấu bằng xảy ra khi



1. **Đáp án A**.

Ta có . Dấu bằng xảy ra



1. **Đáp án C**.

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 4.



**PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**

I. **CONG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRINH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**

a)



b)



c)



d)



Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình

lượng giác.

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận làm nghiệm



**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



**Lời giải**

**Chọn B**

**A.**



B.



|  |  |
| --- | --- |
| **STUDY TIP** | |
|  |  |

C.



D.



So sánh ta được đáp án là B.

**LƯU Ý:** Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận . Phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

1. Phương trình có nghiệm dạng và . Khi đó tích bằng :



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có



**II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**

Dạng ( )



1. Phương trình (1)



- Nếu Phương trình (1) vô nghiệm do .



- Nếu



+ Xác định sao cho .



Vậy phương trình .

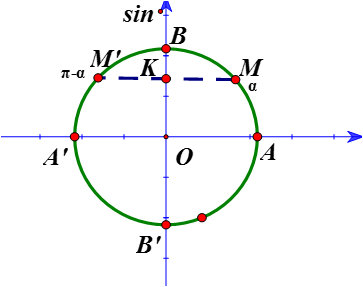


+ Nếu số thực thỏa mãn điều kiện thì ta viết (đọc là



ac-sin-m). Khi đó





|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  +) có nghiệm  +) arc sin *m* là cung thuộc mà có sin bằng *m.* |

1. Trong các phương trình sau đây,phương trình nào có tập nghiệm là

và



**A.**  **B.** . **C. D.**



**Lời giải**

**Chọn A**

***Cách 1***

A. vô nghiệm do .



B. ( vì ) .



C. ( vì )



D.



Vậy phương án đúng là C.

**Cách 2** : Sử dụng máy tính cầm tay ( MTCT).

Ta có và



**Đặc biệt**

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương trình** | **Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác** |
| +  . | Capturesđ. |
| +  . | Capturesđ. |
| +  . | |  |  | | --- | --- | | sđ  sđ  Để ý: | Capture | |

**2. Phương trình**



- Nếu Phương trình (2) vô nghiệm (do ).



- Nếu :



+ Xác định sao cho .



Vậy phương trình .

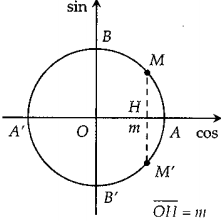


+ Nếu số thực thỏa mãn điều kiện thì ta viết (đọc là ac-cos- m).



Khi đó .





sđ; sđ



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  + là cung thuộc mà có cos bằng .  + Phương trình có nghiệm . |

1. Phương trình nào trong các phuương trình sau có 2 nghiệm thuộc ?



**A. . B. .**

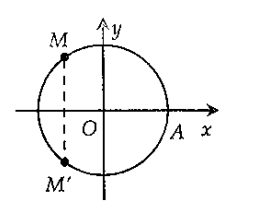
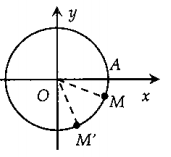
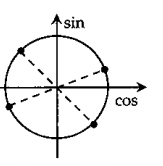


**C. . D. .**



**Lời giải**

**Chọn C**

**A.** chỉ có một nghiệm thuộc .



**B.**



Phương trình không có nghiệm nào thuộc '



**C.**



Phương trình có hai nghiệm thuộc .



**D.** vô nghiệm do .



1. Chọn đáp án **sai**: Nghiệm của phương trình là:



**A. . B. .**



**C. . D. .**



**Lời giải**

**Chọn A**

Dễ dàng kiểm tra trên đường tròn lượng giác .



**Đặc biệt**

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương trình** | **Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác** |
| +  . | |  |  | | --- | --- | | sđ. | Capture | |
| +  . | |  |  | | --- | --- | | sđ.  . | Capture | |
| +  .. | |  |  | | --- | --- | | sđ  sđ  Để ý: | Capture | |

**3. Phương trình**



**a) Phương trình**



|  |  |
| --- | --- |
| Điều kiện:  - Ta xác định sao cho .  Khi đó phương trình .  + Nếu số thực thỏa mãn điều kiện thì ta viết  (đọc là ac - tan - m).  Khi đó phương trình .. | Capture |
| **b) Phương trình**  Điều kiện:  - Ta xác định sao cho .  Khi đó phương trình  .  + Nếu số thực thỏa mãn điều kiện thì ta viết  (đọc là ac - cotang - m).  Khi đó phương trình . |  |

|  |
| --- |
| **STUYDY TIP**  Phương trình luôn có nghiệm với |

1. Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

**A. . B. . C. . D. .**



**Lời giải**

**Chọn A**

**A.** .



(Với nên nghiệm dương bé nhất là )



**B.** .



Nghiệm dương bé nhất là .



**C.** Nghiệm dương bé nhất là .



**D.** .



Chọn Nghiệm dương bé nhất là .



Vậy giá trị nhỏ nhất là nên ta chọn đáp án A.



1. Phương trình có các nghiệm là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:



.



***\* Kĩ năng biểu diễn và tổng hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác***

|  |  |
| --- | --- |
| Capture  1 điểm trên đường tròn lượng giác | Capture  2 điểm đối xứng qua gốc |
| Capture  4 điểm cách đều: | Capture  3 điểm cách đều: |
| Capture  n điểm cách đều: | |

**III. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP.**

***DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC***

Có dạng với , t là một hàm số lượng giác



***Phương pháp giải***

(đây là phương trình lượng giác cơ bản đã học)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **STUDY TIP** | | | |
| 1. . | 2. | 3. . | 4. . |

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào có 2 nghiệm thuộc ?



**A. . B. .**



**C. . D. .**



**Lời giải**

**Chọn D**

**A.** vô nghiệm (loại phương án A).



**B.** Có 1 nghiệm thuộc .



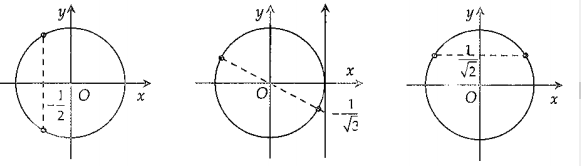
**C.** Có 1 nghiệm thuộc .



**D.** Có hai nghiệm thuộc .



**LƯU Ý:** Để giải nhanh các bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi so sánh để đưa ra đáp án một cách dễ dàng.



B. C. D.



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Một số phương trình phải qua một vài bước biến đổi đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác. |

1. Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình là:



**A. , B. . C. . D. .**



**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:



Suy ra phương trình có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là và



Vậy



**DẠNG 2.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (HOẶC PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2) ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

Có dạng: với là một hàm số lượng giác.



**Phương pháp giải:**

* Bước 1: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ.
* Bước 2: Giải phương trình ẩn phụ.
* Bước 3: Từ nghiệm tìm được đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

1. Các điểm được biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì các nghiệm của phương trình là:



**A.** sđ . **B.** sđ . **C.** sđ . **D.** sđ và sđ .



***Lời giải***

**Chọn C.**

Đặt



Phương trình



Với



Vậy nghiệm của phương trình là sđ



1. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn A.**

Điều kiện:



Phương trình



Vậy nghiệm âm lớn nhất là



1. Tổng các nghiệm thuộc khoảng của phương trình là:



**A.** . **B.** . **C.**. **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình



Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:



**DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX:**

Có dạng trong đó



**Phương pháp giải:**

Chia 2 vế cho ta được:



Đặt



. Đây là phương trình lượng giác cơ bản.



+ Phương trình có nghiệm khi:



+ Bạn có thể đặt:



Việc đặt thế nào thì tùy từng bài để được lời giải hợp lý nhất.

1. Phương trình với là tham số vô nghiệm khi:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải:**

**Chọn C.**

+ Ta đi tìm để phương trình có nghiệm rồi lấy phần bù



+ Ta có: Phương trình có nghiệm



Vậy phương trình có nghiệm suy ra phương trình vô nghiệm khi



1. Nghiệm của phương trình là:



**A.** . **B.**.



**C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình ( chia 2 vế cho )



1. Gọi lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình , ta có:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



***Lời giải:***

**Chọn C.**

+ Điều kiện:



+ Phương trình



Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có các nghiệm



Chọn



1. Phương trình có số nghiệm trên là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



***Lời giải:***

**Chọn D.**

Phương trình



* **TH1**: . Chọn



* **TH2:** . Chọn



Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc



**DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP**

Là phương trình dạng trong đó lũy thừa của và cùng bậc chẵn hoặc lẻ.



**Phương pháp giải:**

* Bước 1: Xét Kết luận nghiệm



* Bước 2: Xét ta chia 2 vế của phương trình cho là bậc cao nhất) đưa về phương trình bậc cao của tanx.



1. Nghiệm của phương trình là:



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**Lời giải:**

**Chọn C.**

+ Với . Thay vào phương trình luôn đúng



là nghiệm của



+ Với chia 2 vế cho ta được:



Kết luận: Nghiệm của phương trình là



**LƯU Ý:**

- Khi nhìn các phương án trả lời của bài này bạn phải chia 2 vế cho để đưa về phương trình bậc 2 theo tan x.



- Tuy nhiên đối với các phương án trả lời có nghiệm biểu diễn dạng khác. Bạn đọc có thể giải theo các cách sau:

+ Xét không thỏa mãn phương trình



+ Với , chia 2 vế cho đưa về phương trình bậc 2 theo.



Hoặc dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với sin và cos:



(đây là phương trình bậc nhất đối với , đã học trong phần trước)



Hoặc



(đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)



1. Tổng nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

***Trường hợp 1:***



Với phương trình (vô nghiệm).



Với phương trình (vô nghiệm).



Vậy không thỏa mãn phương trình.



***Trường hợp 2:***  , chia 2 vế cho ta được:



Phương trình



Với . Với .



Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là .



***Nhận xét:*** Đây là phương trình cùng bậc lẻ do đó có biến đổi sau:



là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với , .



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **STUDY TIP**  Có thể sử dụng đường tròn lượng giác để xác định nghiệm âm lớn nhất.  Cách biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác: | | |
| Đuôi có điểm. | Đuôi có điểm. | Đuôi có điểm. |
| Đuôi có điểm. | Đuôi có điểm. |  |

1. Phương trình có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

Điều kiện: .



Phương trình



(\*)



Đến đây ta thấy phương trình (\*) có cùng bậc lẻ cao nhất là , ta chia 2 vế cho (do điều kiện)



(TMĐK)



Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là .



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ở đây ta có thể từ phương trình đầu chia ngay cho sẽ nhanh hơn. Tuy nhiên nó sẽ không tự nhiên bởi bạn chưa nhận ra dạng quen thuộc của bài toán. |

1. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

Điều kiện:



Phương trình (cùng bậc lẻ)



Chia 2 vế cho (do điều kiện)



Phương trình



.



Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là Đáp án B.



1. Các nghiệm của phương trình là:



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn A.**

Điều kiện: .



Phương trình



(\*)(đây là phương trình bậc 2)



Chia 2 vế cho (do điều kiện) ta được:



Phương trình (\*)



(TMĐK)



|  |
| --- |
| **STUDY TIP (nếu có)**  Với , ta chia luôn 2 vế cho để khỏi phải chia 2 trường hợp, bài giải sẽ ngắn gọn hơn.  Khi giải mà kết quả nghiệm có thì chia 2 vế cho và nếu kết quả nghiệm có thì chia 2 vế cho . |

**DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI VÀ .**



Dạng: trong đó .



**Phương pháp chung:**

Đặt (vì ).



.



Phương trình (là phương trình bậc 2 theo )



1. Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên ?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn C.**

(1)



Đặt .



.



Phương trình (TMĐK)



Với .



Với



Kết luận: phương trình có nghiệm có 4 nghiệm trên .



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Có bao nhiêu điểm biễu diễn trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình thì phương trình đó có bấy nhiêu nghiệm trên . |

***Chú ý:*** Với phương trình: .



Đặt



(vì ).



.



Phương trình (là phương trình bậc 2 theo )



Một số sách gọi phương trình này là phản đối xứng với , .



1. Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên ?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn C.**

Đặt . Điều kiện: .



.



Phương trình (TMĐK)



Với .



Với



có 2 nghiệm thuộc là và .



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Dạng: .  Đặt . . |

**Cách 2:** Nhận thấy phương trình có và có nhân tử chung là nên ta có:



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  . . |

1. Tổng các nghiệm của phương trình trên là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn C.**

(3)



Đặt



Với



Suy ra phương trình có 3 nghiệm trên là



Vậy tổng 3 nghiệm là



1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của để phương trình: có nghiệm.



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**



Đặt



Ta đi tìm để phương trình có nghiệm

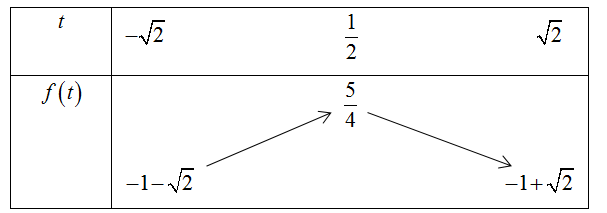


có nghiệm



Xét trên





Suy ra



Vậy phương trình đã cho có nghiệm có nghiệm trên



mà



Vậy có 4 giá trị thỏa mãn.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **STUDY TIP**  Bảng biến thiên  **+)**   |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  |   +)   |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  | |

1. Phương trình có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



***Lời giải***

**Chọn A.**



Giải



Giải



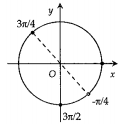
Đặt



Vậy nghiệm của phương trình là



Biểu diễn nghiệm này trên vòng tròn lượng giác



ta suy ra nghiệm lớn nhất là và nghiệm bé nhất là



Vậy .



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  Ba biểu thức trên cùng có nhân tử chung là . |

**DẠNG IV. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC**

1. **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:



**A.** . **B.**. **C.** . **D.**.



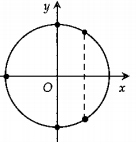
**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình



Dựa vào điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác



Vậy ta có 5 điểm.

1. **Sử dụng công thức hạ bậc**

Phương trình không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây ?



**A.** . **B.**. **C.**. **D.**.



***Lời giải***

**Chọn D.**

Phương trình hông phải là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.



**Chú ý:** Bạn đọc có thể giải các phương trình đơn giản ở các phương án rồi thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  **+)** Phương trình (1) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (2) nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2).  **+)** . |

1. **Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Cho phương trình số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:



**A.** . **B.**. **C.**. **D.**.



**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình



Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP** |

1. **Sử dụng công thức nhân ba**

Cho phương trình có bao nhiêu nghiệm trên ?



**A.** . **B.**. **C.**. **D.**.



**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình



Mà



Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc .



|  |
| --- |
| **STUDY TIP** |

1. **Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt**

Phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc ?



**A.** . **B.**. **C.**. **D.**.



***Lời giải***

**Chọn B.**

Phương trình



Mà nên



Vậy phương trình có 5 nghiệm trên .



1. **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:



Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

**A.** . **B.**. **C.**. **D.**.



***Lời giải***

**Chọn C.**

Ta có



Giải :



Giải :



Giải :



Giải :



Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP** |

1. ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình có phương trình tương đương là:



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình



**Lưu ý:** Có thể thử các nghiệm trong các đáp án vào phương trình đã cho nếu thỏa mãn thì 2 phương trình tương đương.

|  |
| --- |
| **STUDY TIP** |

1. ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình có tổng các nghiệm trên là:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Chọn A.**

Đặt



Phương trình



Vậy tổng các nghiệm trên của phương trình là: .



1. ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình có các nghiệm là:



**A.** . **B.** . **C.** **D.** .



**Lời giải**

**Chọn C.**

Đặt



Phương trình tương đương



+ Với



+ Với



(vô nghiệm)



Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là .



***Nhận xét:***

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích



+ Với phương trình (2) có thể giải cách khác như sau: , phương trình này vô nghiệm do



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  có nghiệm |

1. ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình thì:



**A.** trên đoạn phương trình có 1 nghiệm.



**B.** trên đoạn phương trình có 2 nghiệm



**C.** trên đoạn phương trình có 3 nghiệm.



**D.** trên đoạn phương trình có 4nghiệm.



**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có



Phương trình (\*) xảy ra



+ Giải (I): (vô nghiệm)



+ Giải (II):



Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc .



***Chú ý:*** Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 với sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  (1) . Mà  + suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi  + suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi |

**Lưu ý:** Đối với phương trình (1) và (2) ta có thể đưa ngay cách giải ngay bằng cách đưa về phương trình bậc 2 đối với bằng cách sử dụng công thức. Tuy nhiên một số phương trình không đưa về được như vậy. Ví dụ (bạn đọc tự giải)



1. ***Phương pháp hàm số***

Phương trình có tổng các nghiệm trong khoảng là:



**A.** . **B.** . **C.** **D.** .



**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình



Xét hàm số trên .



Với ta xét biểu thức



Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên , Suy ra phương trình (1) tuuongw đương



Vậy phương trình (\*) có 1 nghiệm thuộc là



***Lưu ý:*** Đối với việc chứng minh hàm số đồng biến trên của hàm số , xét tỉ số



+ Nếu Hàm số đồng biến trên



+ Nếu Hàm số nghịch biến trên



+ Nếu Hàm số không đổi trên



|  |
| --- |
| **STUDY TIP**  + Nếu hàm sốđồng biến trên thì |

**V. Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích**

1. Phương trình có số nghiệm trên là:



**A. B. C. D.**



**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình



Vậy phương trình có 2 nghiệm trên là và





1. Phương trình có các nghiệm dạng . Với thì là:



**A.** . **B.** . **C.** **D.** .



**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình



Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là:



1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của để phương trình có nghiệm



**A.** . **B.** . **C.** **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình



-Giải (1) , các nghiệm này không thuộc .



-Giải (2) có



Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc



Vậy có 1 giá trị nguyên của là



1. Phương trình nhận các giá trị làm nghiệm thì giá trị là:



**A.** . **B.** . **C.** **D.** .



**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình





Vậy 

|  |
| --- |
| **STUDY TIP** |

1. Phương trình  là phương trình hệ quả của phương trình:

**A.** **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn C**

pt



**Lưu ý:** *Phương trình bậc hai  có hai nghiệm thì *

**VI. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA ĐIỀU KIỆN**

1. Phương trình  có số nghiệm là:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: 









Với  (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

1. Phương trình  có các nghiệm dạng

 thì  bằng:

**A.**  **B.** -  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: 











Vậy 

1. Phương trình  có tổng các nghiệm trên là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện:



=>có 2 nghiệm trên là x= và x=

Vậy tổng các nghiệm trên là: 

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên?

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện:  



Kết hợp điều kiện (\*)=>Nghiệm của phương trình là 

Vậy có hai nghiệm thuộc là và 

1. Phương trình  có các nghiệm dạng  thì  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  







Kết hợp điều kiện(\*) ta có nghiệm của pt là 

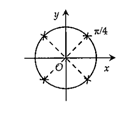


1. Phương trình có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

**Lời giải**

**Chọn B**

****Điều kiện: 

Ta có: 

.

.

Kết hợp điều kiện nghiệm của phương trình (1) là 

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

***Lưu ý:*** Ở bài nầy điều kiện bài toán có thể gộp thành 

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Phương trình lượng giác cơ bản**

1. Phương trình có nghiệm là:

**A.**  và  **B.**  và 

**C.**  và  **D.**  và

1. Số nghiệm của phương trình  với là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình có nghiệm khi:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình có nghiệm khi:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình có nghiệm là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình Có các nghiệm dạng và Khi đó  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Một số phương trình lượng giác thường gặp**

1. Số nghiệm của phương trình Trên đoạn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 4

1. Phương trình  Có nghiệm khi

**A.** .  **C.**  **D.** 

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình  Có nghiệm?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** Vô số

1. Tổng các nghiệm của phương trình  trên khoảng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Phương trình  có nghiệm dạng  thì giá trị m là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình: là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Nghiệm của phương trình  là:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

1. Nghiệm của phương trình là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu điểm biểu diễm trên đường tròn lượng giác?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để phương trình  có hai nghiệm thuộc  ?

**A.** . **B.** . **C.** Vô số. **D.** Không có .

1. Giá trị của  để phương trình  có nghiệm trên  là  thì  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tổng  nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có nghiệm khi  thì tích  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có các nghiệm dạng  và ;  thì:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho các phương trình sau:.

.

.

.

Trong các phương trình trên, phương trình nào vô nghiệm

**A.** Chỉ phương trình (1) vô nghiêm. **B.** Chỉ phương trình (2) vô nghiệm.

**C.** Chỉ phương trình (3) vô nghiệm. **D.** Cả  phương trình vô nghiệm.

**Phương trình bậc nhất đối với , .**

1. Phương trình  có nghiệm khi:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có các nghiệm dạng  và ,  với  thì  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có các nghiệm là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tổng hai nghiệm dương nhỏ nhất liên tiếp là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có nghiệm dương nhỏ nhất là  và nghiệm âm lớn nhất là  thì  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Phương trình đẳng cấp bậc hai.**

1. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  trên đường tròn lượng giác là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho phương trình  số giá trị  để phương trình  có nghiệm là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  tương đương với phương trình:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bào nhiêu nghiệm trên  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Số giá trị nguyên của  để phương trình  có nghiệm trên  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.**

1. Phương trình  có số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để phương trình  có nghiệm?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho phương trình . Khi đặt  thì:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có nghiệm khi:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho phương trình . Đặt  với  thì phương trình  tương đương với phương trình:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Một số phương trình lượng giác khác.**

1. Phương trình  có các nghiệm là  và . Giá trị của  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  trên đường tròn lượng giác là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nghiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tích các nghiệm trên  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tập nghiệm là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tổng  nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Số nghiệm của phương trình  trên  là:

**A.** . **B.** Vô số. **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có tập nghiệm là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  có các nghiệm là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  đưa về phương trình tích được phương trình tương đương là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Phương trình  là phương trình hệ quả của phương trình:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có số nghiệm trên  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có nghiệm dạng  và  thì  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trên ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Phương trình lượng giác chứa tham số.**

1. Phương trình  ( là tham số) có nghiệm trên  khi:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn  của  để phương trình  có hai nghiệm thuộc ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Các giá trị của  để phương trình  có nghiệm thì:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho phương trình . Số các giá trị nguyên dương của  nhỏ hơn  để phương trình có nghiệm là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Phương trình  có nghiệm trên  khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  nhỏ hơn  để phương trình  có nghiệm ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

**Phương trình lượng giác cơ bản**

1. **Đáp án B.**

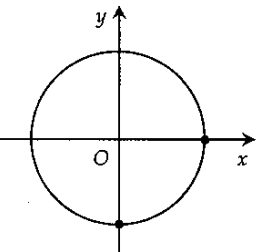


Mà .

1. **Đáp án C.**

.

Biểu diễn trên đường trong lượng giác:



Vậy có  họ nghiệm thuộc .

1. **Đáp án A.**

Phương trình  có nghiệm khi .

1. **Đáp án C.**

Phương trình  có nghiệm khi .

1. **Đáp án B.**

Phương trình .

1. **Đáp án A.**



Mà 

Do  nghiệm  là , , 

.

1. **Đáp án D.**

Ta có 

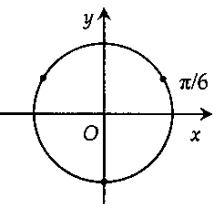
1. **Đáp án D.**



Vậy .

1. **Đáp án B.**





(Chú ý gộp nghiệm trên đường tròn lượng giác)

Ta có: 

Mà 

Vậy có  giá trị  có  nghiệm .

1. **Đáp án A.**

 với .

Vậy nghiệm âm lớn nhất là .

1. **Đáp án D.**

Vì .

**Một số phương trình lượng giác thường gặp**

1. **Đáp án B.**



Vậy phương trình có  nghiệm thuộc  là  và .

1. **Đáp án A.**

+ Với : Phương trình  (vô nghiệm)  không thỏa mãn.

+ Với : Phương trình  xác định với mọi giá trị .

1. **Đáp án C.**

 có nghiệm  có nghiệm 

Vậy có  giá trị  nguyên thỏa mãn.

1. **Đáp án D.**





Vậy tổng các nghiệm trên  là: .

1. **Đáp án B.**

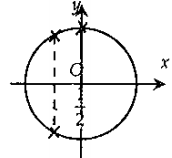
.

Vậy .

1. **Đáp án A.**

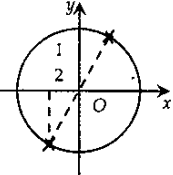
.

Vậy tổng  nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là: .

1. **Đáp án C**



Điều kiện: 

Phương trình 

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là 

1. **Đáp án B.**

Điều kiện: .

Ta có: 

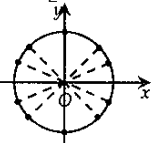
Phương trình 

.

1. **Đáp án C.**

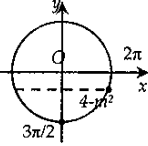










1. **Đáp án D.**



+ Với 

có  nghiệm 

+ Phương trình có  nghiệm  có  nghiệm  khác .

1. **Đáp án B.**

 không có nghiệm thỏa mãn .

Phương trình có nghiệm trên .

1. **Đáp án D.**











.

Vậy tổng hai nghiệm âm lớn nhất là .

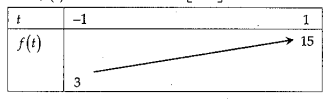
1. Đáp án C.



 (\*)



Đặt . Xét  trên .



Suy ra (\*) có nghiệm .

Vậy .

1. **Đáp án B.**

Điều kiện .

Phương trình 



Vậy .

1. **Đáp án D.**

**Phương trình bậc nhất đối với **

1. **Đáp án A.**

Phương trình có nghiệm .

1. **Đáp án C**.



.

.

1. **Đáp án A**.















1. **Đáp án C.**



.













Hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là .

1. **Đáp án C.**







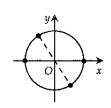


Nghiệm dương nhỏ nhất là , nghiệm âm lớn nhất là .

Vậy .

**Phương trình đẳng cấp bậc 2.**

1. **Đáp án D.**

* Với  vô lí.
* Với  chia cả hai vế cho  ta được:



Vậy số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 4.

1. **Đáp án C.**







Phương trình có nghiệm





Mà .

Vậy có 7 giá trị  thỏa mãn.

1. **Đáp án B.**

Phương trình 

-Với  không thỏa mãn phương trình.

-Với , chia cả hai vế của phương trình cho  ta được







1. **Chọn đáp án B.**

Điều kiện 

Phương trình 

.

Vây só nghiệm trên  là 3.



1. **Đáp án C.**

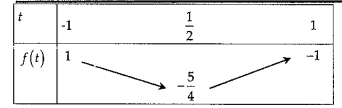


Trên  



Đặt 

Yêu cầu bài toán tìm  để phương trình  có nghiệm trên  



 Phương trình  có nghiệm .

Vậy có 3 giá trị nguyên của  thỏa mãn.

**Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.**

1. **Đáp án C.**





Đặt .





+ Với 



+ Với  

.

Vậy có 3 điểm biểu diễn các nghiệm.

1. **Đáp án D.**

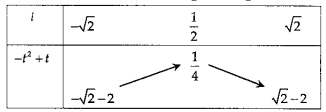
 

Đặt .



Phương trình  có nghiệm trên  

Xét hàm số  trên 



Phương trình  có nghiệm 

Vậy các giá trị  thỏa mãn.

1. **Đáp án A.**

Điều kiện .

Phương trình 







Giải  

Giải . Đặt  , .



 . Vậy .

1. **Chọn đáp án B.**

Cách 1: Điều kiện để phương tình  có nghiệm:

Cách 2: Phương trình  có nghiệm

 có nghiệm

.

1. **Đáp án C.**





.

1. **Đáp án A.**

















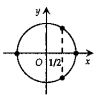
.

Vậy .

1. **Đáp án C.**









Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

1. **Đáp án A**.











.

Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc .

1. **Đáp án B.**







.

Vậy phương trình có 24 nghiệm trên .

1. **Đáp án B.**











Suy ra có hai nghiệm thuộc  là  và .

Vậy tích hai nghiệm là .

1. **Đáp án A.**



 .

1. **Đáp án D.**

Điều kiện .

Ta có



.

Phương trình 



  .

Vậy tổng các nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là .

1. **Đáp án A**.

Ta có  , mà.

Vậy phương tình đã cho vô nghiệm.

1. **Đáp án A.**









Vậy phương trình có 1 nghiệm trên .

1. **Đáp án C.**

Đặt 

Phương trình  





Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc .

1. **Đáp án B.**







.

1. **Đáp án B.**

Điều kiện 

Phương trình 







.

1. **Đáp án B.**

Điều kiện .

Phương trình 







Vậy phương trình có 4 nghiệm trên 

1. **Đáp án** C.











Vậy ta chọn đáp án **C.**

1. **Đáp án D.**













Vậy ta chọn đáp án D**.**

1. **Đáp án A.**

|  |  |
| --- | --- |
| Điều kiện:  Phương trình    - Với : Không thỏa mãn phương trình  - Với : Chia hai vế cho  ta được:        Kết hợp với điều kiện  Phương trình vô nghiệm |  |

1. **Đáp án A.**

|  |  |
| --- | --- |
| Điều kiện:  Phương trình |  |

1. **Đáp án B.**

Điều kiện: 

PT: 





Mà 





Vậy PT có 33 nghiệm trên 

**Phương trình lượng giác chứa tham số**

1. **Đáp án C.**

|  |  |
| --- | --- |
| có nghiệm thuộc    Giải    PT (1) không có nghiệm nào thuộc  (\*) có nghiệm  có nghiệm .  ***Chú ý****:* Độc giả có thể giải cách khác như sau:  Có |  |

1. **Đáp án A.**

PT  có đúng hai nghiệm 



Giải (1):  có hai nghiệm thuộc 

=> Phương trình có hai nghiệm thuộc 

 (2) vô nghiệm hoặc (2) 



Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

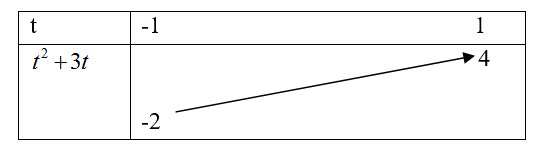
Chú ý: 

1. **Đáp án C**



Đặt , phương trình 

Bảng biến thiên:



=> Phương trình (\*) có nghiệm 

. Vậy a + b = -8

1. **Đáp án B**



Điều kiện: 



+ Từ m = 0  loại do điều kiện phương trình (\*) vô nghiệm.

+ Với 

=> (\*) có nghiệm khi (1)





Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

1. **Đáp án B**



Giải (1): luôn có 2 nghiệm 

phương trình có nghiệm.

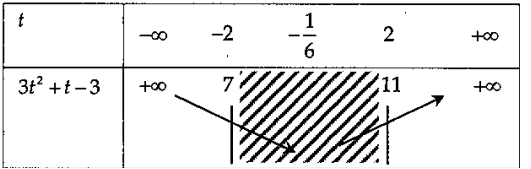
1. **Đáp án D**

 Đặt 

=> Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình  có nghiệm 

có nghiệm 

Bảng biến thiên:



=> Phương trình có nghiệm 

Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018

+ Với  thì 