**BÀI TẬP GIỚI HẠN**

**GIỚI HẠN DÃY SỐ**

**A. LÝ THUYẾT**

**I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN .**

**1. Định nghĩa**

Ta nói rằng dãy số  có giới hạn ( hay có giới hạn là ) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: .

Nói một cách ngắn gọn, nếu  có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) .

b) Dãy số không đổi , với , có giới hạn là .

c) Dãy số  có giới hạn là  nếu  có thể gần  bao nhiêu cũng được, miễn là  đủ lớn.

**2. Một số dãy số có giới hạn **

**Định lí 4.1**

Cho hai dãy số  và .

Nếu  với mọi và  thì .

**STUDY TIP**

Định lí 4.1 thường được sử dụng để chứng minh một dãy số có giới hạn là .

**Định lí 4.2**

Nếu  thì .

*Người ta chứng mình được rằng*

a).

b)

c)với mọi số nguyên dương cho trước.

Trường hợp đặc biệt : .

d)với mọi  và mọi cho trước.

**STUDY TIP**

Cách ghi nhớ các kết quả bên như sau: Khi tử số không đổi, mẫu số càng lớn (dần đến dương vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về )

**II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.**

**1. Định nghĩa**

Ta nói rằng dãy số  có giới hạn là số thực  nếu .

Kí hiệu: .

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

**STUDY TIP**

1. Dãy số không đổi  với , có giới hạn là .
2.  khi và chỉ khi khoảng cách trên trục số thực từ điểm  đến  trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là  đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi  tăng thì các điểm  “ chụm lại” quanh điểm .
3. Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

**2. Một số định lí**

**Định lí 4.3**

Giả sử . Khi đó

a)và .

b) Nếu  với mọi  thì  và .

**Định lí 4.4**

Giả sử ,và là một hằng số. Khi đó

a) . b).

c). D).

e)(nếu ).

**3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn**

**Định nghĩa**

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội  thỏa .

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

****

**III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.**

**1. Dãy số có giới hạn **

Ta nói rằng dãy số  có giới hạn  nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Kí hiệu: .

Nói một cách ngắn gọn, nếu  có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) .

b) 

c)với một số nguyên dương cho trước.

Trường hợp đặc biệt : .

d) nếu .

**2. Dãy số có giới hạn **

Ta nói rằng dãy số  có giới hạn  nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Kí hiệu: .

Nói một cách ngắn gọn, nếu  có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

**Nhận xét:**

a).

b) Nếu thì  trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn  đủ lớn. Đo đó  trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn  đủ lớn. Nói cách khác, nếu thì .

**STUDY TIP**

Các dãy số có giới hạn  hoặc  được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

**Định lí 4.5**

Nếu thì .

**STUDY TIP**

Ta có thể diễn giải “nôm na” định lí 4.5 như sau cho dễ nhớ: Khi tử số không đổi, mẫu số có giá trị tuyệt đối càng lớn(dần đến vô cực) thì phân số càng nhỏ(dần về ).

**3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực**

**Quy tắc 1**

Nếu  và  thì  được cho trong bảng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**STUDY TIP**

Vì  và không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

**Quy tắc 2**

Nếu  và  thì  được cho trong bảng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Dấu của |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Quy tắc 3**

Nếu  và  và  hoặc  kể từ một số hạng nào đó trở đi thì  được cho trong bảng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dấu của | Dấu của |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**STUDY TIP**

Ở cả ba quy tắc, về dấu, tương tự như quy tác về dấu của phép nhân hoặc phép chia hai số.

Để cho dễ nhớ, ta diễn giải các quy tắc một cách “nôm na” như sau:

**- Quy tắc 1:** Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một đại lượng vô cùng lớn.

**- Quy tắc 2:** Tích của đại lượng vô cùng lớn với một đại lượng khác  là một đại lượng vô cùng lớn.

**- Quy tắc 3:** Khi tử thức có giới hạn hữu hạn khác , mẫu thức càng nhỏ(dần về ) thì phân thức càng lớn(dần về vô cực).

**B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ**

***DẠNG 1. TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC***

1.  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Đáp án D.**

***Lời giải***

*Cách 1:*Ta có:.

Vì  và nên theo quy tắc 2, 

*Cách 2:* Sử dụng MTCT tính giá trị của biểu thức tại một giá trị lớn của  (do ) như sau: Nhập vào màn hình biểu thức . Bấm . Máy hỏi  nhập , ấn . Máy hiện kết quả như hình bên. Ta thấy kết quả tính toán với  là một số dương rất lớn. Do đó chọn D.

1.  bằng

**A.**  **B.**  **C.** 5. **D.** 

**Hướng dẫn giải**

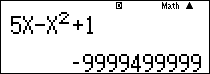
**Chọn B.**

***Cách 1:*** Ta có 

Vì  và  nên (theo quy tắc 2).

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với  là một số âm rất nhỏ. Do đó chọn đáp án có giới hạn bằng .



***Tổng quát:*** Cho  là một số nguyên dương.

a)  nếu 

b)  nếu 

Chẳng hạn:  vì ;  vì .

**STUDY TIP**

Cho  có dạng đa thức (bậc lớn hơn 0) của .

- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của  là một số dương thì .

- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của  là một số âm thì .

1. , với  bằng:

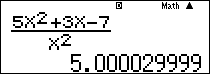
**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

***Cách 1:*** Ta có: .

***Cách 2:*** Sử dụng máy tính bỏ túi tương tự những ví dụ trên.



Đây không phải là giá trị chính xác của giới hạn cần tìm, mà chỉ là giá trị gần đúng của một số hạng với  khá lớn, trong khi  dần ra vô cực. Tuy nhiên kết quả này cũng giúp ta lựa chọn đáp án đúng, đó là đáp án **B.**

**STUDY TIP**

Một số dòng máy hiện kết quả là dạng phân số, chẳng hạn . Do  nên chọn **B.**

1.  với  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

***Cách 1:*** Chia cả tử và mẫu của phân thức cho  ( là lũy thừa bậc cao nhất của  trong phân thức), ta được: . Vì  và  nên .

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

**Ví dụ 5:** Giới hạn của dãy số  với  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

***Cách 1:*** Chia cả tử và mẫu của phân thức cho  ( là bậc cao nhất của  trong phân thức), ta được

.

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

**Ví dụ 6:** Giới hạn của dãy số  với , bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

***Cách 1:*** Chia cả tử và mẫu cho  ( là lũy thừa bậc cao nhất của  trong **mẫu thức**), ta được  Vậy .

***Cách 2:*** Chia cả tử và mẫu cho  ( là lũy thừa bậc cao nhất của  trong **phân thức**), ta được

. Vì ,  và  với mọi  nên theo quy tắc 3, .

***Cách 3:*** Ta có  Vì  và  nên theo quy tắc 2, 

***Cách 4:*** Sử dụng MTCT tương như các ví dụ trên.

**STUDY TIP**

Rõ ràng làm theo cách 1 (chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của  trong mẫu thức) ít phải lập luận hơn cách 2 và cách 3.

***Tổng quát:***

Xét dãy số  với  trong đó 

(dạng phân thức với tử số và mẫu số là các đa thức của ).

a) Nếu  (bậc tử lớn hơn bậc mẫu) thì  nếu   nếu 

b) Nếu  (bậc tử bằng bậc mẫu) thì 

c) Nếu  (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) thì .

**STUDY TIP**

Cho  có dạng phân thức của .

- Nếu bậc tử cao hơn bậc mẫu thì  có giới hạn là vô cực

- Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì  bằng hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử chia cho hệ số của lũy thừa cao nhất ở mẫu.

- Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì .

**Ví dụ 7:**  bằng

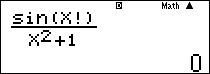
**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có  mà  nên chọn đáp án **A.**

***Lưu ý:*** Sử dụng MTCT. Với , máy tính cho kết quả như hình bên. Với , máy bào lỗi do việc tính toán vượt quá khả năng của máy. Do đó với bài này, MTCT sẽ cho kết quả chỉ mang tính chất tham khảo.



***Nhận xét:*** Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được rằng:

a)  b) .

Trong đó  nguyên dương.

Chẳng hạn: ; ; ; …..

**STUDY TIP**

Khi sử dụng MTCT, với các bài toán liên quan đến lượng giác, trước khi tính toán ta cần chọn chế độ Rad (radian) hoặc Deg (degree) cho phù hợp với đề bài.

**Ví dụ 8:**  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

***Cách 1:*** Ta có  mà  nên suy ra 

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

***Nhận xét:*** Dãy  không có giới hạn nhưng mọi dãy , trong đó  thì có giới hạn bằng 0.

**Ví dụ 9:** Tính giới hạn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

***Cách 1:*** Ta có    

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

**STUDY TIP**

Hằng đẳng thức thứ ba:  Hai biểu thức  và  được gọi là biểu thức liên hợp của nhau.

Ví dụ:  và  là hai biểu thức liên hợp của nhau.

***Nhận xét:*** a) ở bước 3 ta đã chia cả tử và mẫu cho . Lưu ý là .

b) Ta có , Vì  và  nên không áp dụng được quy tắc 2 như trong ví dụ trước đó.

**Ví dụ 10:**  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

***Cách 1:*** Ta có 

Vì  nên .

***Cách 2:*** Sử dung MTCT như các ví dụ trên.

**Ví dụ 11:**  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

***Cách 1:*** Ta có 

Vì  và  nên theo quy tắc 2, 

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

***Tổng quát:***

Xét dãy số  trong đó 

- Nếu  và : Giới hạn hữu hạn.

+ Nếu hai căn cùng bậc: Nhân chia với biểu thức liên hợp.

+ Nếu hai căn không cùng bậc: Thêm bớt với  rồi nhân với biểu thức liên hợp.

- Nếu  hoặc  Đưa lũy thừa bậc cao nhất của  ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp này  sẽ có giới hạn vô cực.

***Nhận xét:*** Trong chương trình lớp 12, các em sẽ được học về căn bậc  ( nguyên dương) và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Người ta định nghĩa rằng , trong đó  là số thực dương,  là số nguyên dương,  là số nguyên dương,  Các tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ tương tự lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn: 

Chẳng hạn:

a) Với : nhân chia với biểu thức liên hợp của  là . Dãy số có giới hạn hữu hạn bằng .

b) Với : đưa  ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của .

c) Với : đưa  ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của  bằng .

1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp (bậc ba) của 



.

**STUDY TIP**

Hằng đẳng thức thứ bảy: .

Hai biểu thức  và  cũng được gọi là hai biểu thức liên hợp (bậc ba) của nhau.

1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**



1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có 

Vì  và  nên theo quy tắc 2, 

1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**



1.  bằng :

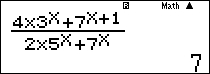
**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

.

**Cách 2:** Sử dụng máy tính bỏ túi. Nhập vào màn hình như hình dưới đây. Bấm CALC. Máy hỏi X? Nhập 100, ấn =. Máy hiện kết quả bằng 7.



1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

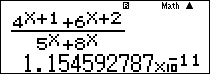
.

**STUDY TIP**

Khi sử dụng máy tính cầm tay, nếu nhập giá trị X quá lớn, máy sẽ báo lỗi do giá trị của  tăng rất nhanh khi X tăng, nên vượt quá khả năng tính toán của máy. Khi đó cần thử lại các giá trị khác của X. Như vậy các bài toán chứa  ta không nên tính với  quá lớn.

**Cách 2:** Sử sụng máy tính cầm tay tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với  là một số dương rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng .



1.  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Chia cả tử và mẫu cho ta được 

Mà  và  với mọi  nên theo quy tắc 3, .

**Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.**

1. Cho dãy số  được xác định bởi  với mọi . Biết dãy số có giới hạn hữu hạn,  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được  với mọi 

Đặt . Ta có  hay 



Vậy .

*Lưu ý:* Để giải phương trình  ta có thể sử dụng chức năng SOLVE của MTCT

(Chức năng SOLVE là chức năng tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng phương pháp chia đôi). Ta làm như sau:

Nhập vào màn hình ; Bấm SHIFT CALC (tức SOLVE); Máy báo Solve for ; Nhập ; Máy báo kết quả như hình bên.

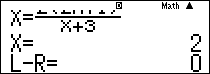
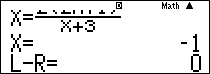
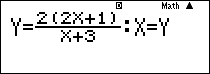
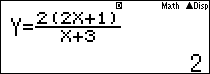
 tức đây là nghiệm chính xác. Lại ấn phím . Máy báo Solve for ; Nhập ; Máy báo kết quả như bên.

 tức đây là nghiệm chính xác. Tuy nhiên ta chỉ nhận nghiệm không âm. Vậy . (Ta chỉ tìm ra hai nghiệm thì dừng lại vì dễ thấy phương trình hệ quả là phương trình bậc hai).

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT ( quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên. Bấm . Máy tính hỏi  nhập 1 rồi ấn phím  liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của  không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của là giới hạn cần tìm của dãy số. Giới hạn đó bằng 2.

**STUDY TIPS**

Trong ví dụ này ta đã áp dụng tính chất “nếu  thì ”

1. Cho dãy số  được xác định bởi  với mọi . Tìm giới hạn của .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được  với mọi 

Đề bài không cho biết dãy số  có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số  có giới hạn hữu hạn. Đặt 

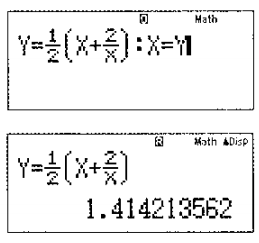


Hay 

Vậy 

( loại trường hợp ). Vậy .

*Cách 2:* Sử dụng MTCT ( quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm CALC. Máy hỏi *X*? nhập  rồi bấm phím = liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của  không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của  là giới hạn cần tìm của dãy số.

Trong bốn đáp án đã cho, bằng phương pháp loại trừ, ta thấy chỉ có đáp án C là phù hợp với kết quả tính toán trên máy tính ().

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi . Khi nó  bằng:

**A.** . **B.** . **C.**  . **D.** .

**Đáp án C.**

***Phân tích:*** Đề bài không cho biết dãy số  có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

**Lời giải**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là .

Ta có: .

Đến đây có thể kết luận là  được không? Câu trả lời là không?

Vì không khó để chứng minh được rằng  với mọi . Do đó nếu dãy số có giới hạn  thì . Từ đó suy ra dãy không có giới hạn, mà trong bốn đáp án trên chỉ có đáp án C là vô cực.

Vậy ta chọn đáp án C.

Ta xét hai cách giải sau:

*Cách 1:* Đặt . Ta có: 

Vậy  là cấp số nhân có  và . Vậy .

Do đó . Suy ra .

*Cách 2:* Sử dụng quy trình lặp (MTCT) tương tự ví dụ trên.

***Phân tích:*** Câu hỏi đặt ra là tại sao ta lại đặt  để thu được kết quả dãy  là cấp số nhân? Ta có kết quả tổng quát sau.

Cho dãy số  xác định bởi ,  với , trong đó  là các hằng số và . Khi đó dãy số  với  là một cấp số nhân có công bội .

Thật vậy, ta có 

( Nếu  thì  là một cấp số cộng,  thì  là một cấp số nhân).

Như vậy, dãy số  xác định bởi ,  với , trong đó  là các hằng số và  sẽ có giới hạn vô cực nếu , có giới hạn hữu hạn nếu .

**STUDY TIP**



Đặt 

……………….

, 

+ : có giới hạn  .

+ :  có giới hạn  .

+ : có giới hạn hữu hạn bằng .

1. Cho dãy số  xác định , ,  với mọi . Tìm giới hạn của dãy số .

**A.** . **B.**  . **C.** . **D.** .

**Đáp án D.**

***Phân tích:*** Đề bài không cho biết dãy số  có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

**Lời giải**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là .

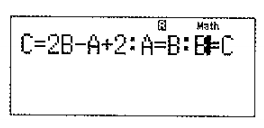
Ta có: (Vô lý)

Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ( và ), vậy chưa thể đoán là đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau.

*Cách 1:* Ta có , , , . Vậy ta có thể dự đoán  với mọi . Khi đó .

Vậy  với mọi . Do đó .

*Cách 2:* Sử dụng MTCT ( quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm CALC Máy hỏi *B*? nhập 1 rồi bấm phím =, máy hỏi *A*? nhập 0 rồi ấn phím = liên tiếp. Ta thấy giá trị *C* ngày một tăng lên. Vậy chọn đáp án của dãy số là .

*Dạng 3.* **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.**

1. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn  (chu kỳ ),  được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó  là các số nguyên dương. Tìm tổng .

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Đáp án A.**

**Lời giải**

*Cách 1:* Ta có 

Vì  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu , công bội  nên .

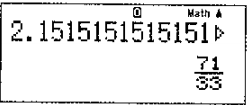
Vậy  nên .

*Cách 2:* Đặt .

Vậy .

Do đó  nên .

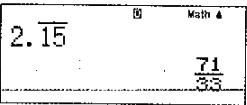
*Cách 3:* Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số (Nhiều bộ số 15, cho tràn màn hình) rồi bấm phím =. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là .

Vậy  nên .

*Cách 4:* Sử dụng MTCT. Bấm 2 .  *ALPHA * 1 5 *= .* Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là .

Vậy  nên .

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản , trong đó  là các số nguyên dương. Tính .

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**  .

**Đáp án B.**

**Lời giải**

*Cách 1:* Ta có:

 .

Vậy . Do đó .

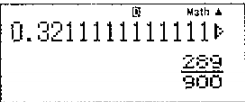
*Cách 2:* Đặt  Đặt  .

Ta có: .

Vậy  .

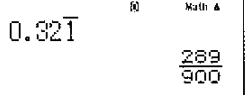
Vậy . Do đó .

*Cách 3:* Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số  ( Nhập nhiều số  , cho tràn màn hình), rồi bấm phím = . Màn hình hiển thị kết quả như sau.



Vậy . Do đó .

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm 0 . 3 2 *ALPHA * 1 = . Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Vậy . Do đó .

Tổng quát

Xét số thập phân vô hạn tuần hoàn  .

Khi đó 

Chẳng hạn, .

*Dạng 4.* **Tìm giới hạn của dãy số mà tổng là  số hạng đầu tiên của một dãy số khác.**

1. Tổng  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

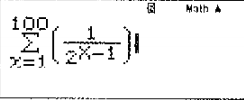
**Đáp án B.**

**Lời giải**

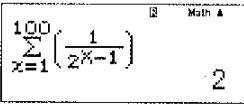
*Cách 1:*  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có  và .

Do đó .

*Cách 2:* Sử dụng MTCT. Sử dụng chức năng tính tổng. Nhập vào màn hình như hình sau.



Bấm phím = , máy hiển thị kết quả bằng .

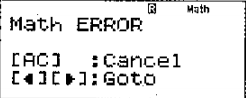


***Lưu ý:*** Ở bài này, phải nhập số hạng tổng quát bằng , vì . Nếu nhập số hạng tổng quát bằng  thì kết quả sẽ bằng và là kết quả sai.



Mặt khác, nếu cho chạy từ đến thì máy sẽ báo lỗi do khối lượng tính toán quá lớn, vượt quá khả năng của máy.





Trong trường hợp đó, ta quay lại điều chỉnh biên độ của máy thì sẽ thông báo kết quả như trên.

1. Cho dãy số với . Khi đó bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án A.**

**Lời giải**

*Cách 1:*  là tổng số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có và .



Do đó . Suy ra .



*Cách 2:*



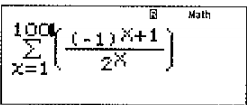
Vậy bằng tổng của một cấp số nhân lui vô hạn với và .



Do đó .

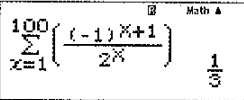


*Cách 3:* Sử dụng MTCT. Nhập vào như màn hình sau.



Ấn phím = , máy hiển thị kết quả bằng





Do đó chọn đáp án A.

Nhận xét: Rõ ràng, nếu thuộc công thức thì bài toán này giải thông thường sẽ nhanh hơn MTCT!

**STUDY TIP**

Tổng số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu và công bội là:



1. Tính bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án C.**

**Lời giải**

*Cách 1:* Ta có:



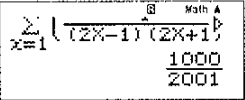
Vậy .



*Cách 2:* Sử dụng MTCT.

Nhập vào màn hình biểu thức , bấm dấu = . Máy hiển thị kết quả như màn hình sau.





Vậy chọn đáp án C.

Tổng quát, ta có:

.



Chẳng hạn trong ví dụ trên thì và . Do đó giới hạn là .



Kinh nghiệm cho thấy nhiều bạn quên mất khi tính toán dãy có giới hạn như trên.



1. Cho dãy số với . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?



**A.** . **B.** . **C.**. **D.** Dãy số không có giới hạn khi .



**Đáp án B.**

**Lời giải**

*Cách 1:* Ta có: . Suy ra .

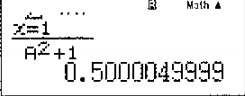


Do đó .



*Cách 2:* Sử dụng MTCT. Gán cho biến . Nhập vào màn hình biểu thức , bấm dấu = . Máy hiển thị kết quả như sau.





Do đó chọn đáp án B.

***Lưu ý:*** Tổng trong ví dụ trên là một tổng dạng quen thuộc. Đó chính là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu và công sai . Do đó nếu không thuộc công thức , ta có thể sử dụng công thức tính tổng của một cấp số cộng để tính tổng đó.



Để làm tốt các dạng bài tập trên, cần nhớ một số tổng quen thuộc sau:







1. .



**STUDY TIP**

Tổng số hạng đầu tiên của một cấp số cộng: ; .



Tổng số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:



**Ví dụ 1:**  bằng:



**A. .** **B. .** **C. .** **D.** .



**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

***Cách 1:*** Tử thức là tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng với , và công bội .



Do đó .



Tương tự ta có: .



Vậy .



***Cách 2:*** Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình , bấm phím, ta thấy kết quả bằng Vậy chọn đáp án **A.**

=



** *Studytip:***

Nếu tử thức là tổng của *n+i* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai *d,* mẫu thức là tổng của *n+k* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai *d’* thì phân thức có giới hạn là .



**Ví dụ 2:**  bằng:



**A. .** **B. .** **C. .** **D.** .



**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

***Cách 1:*** Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với và .



Do đó .



Mẫu thức là tổng của *n+1* số hạng đầu tiên của cấp số nhân với và . Do đó



Vậy



***Cách 2:*** Nhập vào màn hình , bấm phím, ta thấy kết quả hiển thị trên màn hình là 2493,943736.

=



Do đó chọn đáp án **A.**

**Bổ sung: *(Định lí kẹp)***

Xét ba dãy số , , . Giả sử với mọi *n* ta có Khi đó nếu có thì



** *Studytip:***

Nếu tử thức là tổng của *n+i* số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội , mẫu thức là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội thì:



 Phân thức có giới hạn là nếu ;



 Phân thức có giới hạn là 0 nếu .



**Ví dụ 3:**  bằng



**A. 0.** **B. .** **C. .** **D.** .



**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

***Cách 1:*** Ta có



Mà



Vậy



***Cách 2:*** Sử dụng MTCT. Gán cho A.Nhập vào màn hình , bấm phím Kết quả hiển thị 0.5001664168. Vậy chọn đáp án B.

=



Ta thấy rằng trong trường hợp không thuộc công thức, sử dụng máy tính cầm tay là một giải pháp hiệu quả. Tuy nhiên nếu rèn luyện nhiều, cọ xát nhiều dạng bài tập thì có thể sử dụng MTCT sẽ cho kết quả chậm hơn là tính toán thông thường.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

**DẠNG 1: BÀI TẬP LÝ THUYẾT**

1. Chọn khẳng định đúng.

**A.**  nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**B.**  nếu có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**C.**  nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**D.**  nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



1. Chọn khẳng định đúng.

**A.**  nếu có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**B.**  nếu có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**C.**  nếu có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**D.**  nếu có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



1. Chọn khẳng định đúng.

**A.**  nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**B.**  nếu có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**C.**  nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



**D.**  nếu có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.



1. Chọn khẳng định đúng.

**A.** nếu . **B.** nếu .



**C.** nếu . **D.** nếu .



1. Chọn khẳng định đúng.

**A.** nếu . **C.** nếu .



**B.** nếu . **D.** nếu



1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

**A.** Nếu thì .



**B.** Nếu , thì .



**C.** Với là số nguyên dương thì .



**D.** Nếu , thì .



1. Biết . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Biết . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



**DẠNG 2: BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC**

1. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Biết dãy số thỏa mãn . Tính .



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số .



1. Giới hạn nào dưới đây bằng ?



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. bằng bao nhiêu?



**A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** .



1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là ?



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Để tính , bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:



Bước 1: .



Bước 2: .



Bước 3: Ta có ; .



Bước 4: Vậy .



Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

**A.** Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

1. bằng?



**A.** 1. **B.** 0. **C.** . **D.** .



1. bằng?



**A.** 0. **B.** . **C.** . **D.** .



1. bằng?



**A.** 0. **B.** -2. **C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

**A.** . **C.** .



**B.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?

**A.** . **C.** .



**B.** . **D.** .



1. Biết , trong đó là phân số tối giản, và là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Tìm :



**A.** . **B.** . **C.** 1. **D.** .



**DẠNG 2: TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN**

1. Cấp số nhân lùi vô hạn có tổng là một phân số tối giản . Tính .



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn được biểu diễn bởi phân số tối giản (, là các số nguyên dương). Hỏi gần với số nào nhất trong các số dưới đây?



**A.** 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

1. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của 3 số hạn đầu tiên của nó là . Số hạn đầu của cấp số nhân đó là?



**A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** .



1. Phương trình , trong đó , có tập nghiệm là:



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Cho tam giác đều cạnh . Người ta dựng tam giác đều có cạnh bằng đường cao của tam giác ; dựng tam giác đều có cạnh bằng đường cao của tam giác và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích của tất cả các tam giác đều , , ,…



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**DẠNG 4: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI**

1. Cho số thực và dãy số xác định bởi: và với mọi . Tìm giới hạn của dãy số .



**A.** . **B.** . **C.** 1. **D.** 2.



1. Cho dãy số xác định bởi với mọi . Gọi là tổng số hạng đàu tiên của dãy số . Tìm .



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Cho dãy số xác định bởi với mọi . Tìm .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho dãy số xác định bởi với mọi . Tìm .



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Cho dãy số xác định bởi với mọi . Khi đó bằng.



**A.** . **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.



**DẠNG 5: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ**

1. Cho dãy số được xác định bởi với mọi , trong đó và là các số thực cho trước, . Tìm giới hạn của .



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Cho dãy số với , trong đó là tham số. Để dãy có giới hạn hữu hạn thì:



**A.**  là số thực bất kỳ.



**B.**  nhận giá trị duy nhất bằng 3.



**C.**  nhận giá trị duy nhất bằng 5.



**D.** Không tồn tại số .



1. Cho dãy số với , trong đó là tham số. Để có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số là?



**A.** -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để dãy số với có giới hạn hữu hạn.



**A.** . **C.** . **B.** . **D.** .



1. Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương và để: .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Tìm số thực để .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Tìm số thực để .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Tìm các số thực và sao cho .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**DẠNG 6: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC**

1. bằng:



**A.** . **B.** . **C.** 1. **D.** .



1. bằng:



**A.** 0. **B.** 1. **C.** . **D.** .



1. Tìm ta được:



**A.** 1. **B.** . **C.** 0. **D.** 2.



1. bằng:



**A.** 0. **B.** . **C.** 1. **D.** .



1. Cho dãy số . Biết với mọi . Tìm .



**A.** 1. **B.** . **C.** 0. **D.** .



1. bằng:



**A.** 0. **B.** . **C.** . **D.** .



**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Trong đáp án cho các bài tập dưới đây, có nhiều bài tôi chỉ nêu việc áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần lí thuyết và ví dụ. Lời giải đầy đủ hoặc việc sử dụng MTCT xin dành lại cho độc giả.**

**DẠNG 1. Bài tập lí thuyết.**

1. **Đáp án A.**

Xem lại định nghĩa dãy số có giới hạn .



1. **Đáp án B.**

Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn .



1. **Đáp án C.**

Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

1. **Đáp án D.**

Xem lại định lí 4.2.

1. **Đáp án A.**

Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn .



1. **Đáp án A.**

Nếu thì .



1. **Đáp án C.**

Ta có : .



1. **Đáp án C.**

Ta có : . Vì nên , .



Vậy .



**DẠNG 2. Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức.**

1. **Đáp án D.**

Ta có : .



**Bổ sung :**

a) Ta chứng minh dãy số không có giới hạn. Thật vậy, vì nên nếu dãy số có giới hạn thì giới hạn đó hữu hạn.



Giả sử . Suy ra .



Do đó :



. Vậy ta có : ( vô lý). Suy ra đpcm.



b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số không có giới hạn.



c) Ta chứng minh dãy số không có giới hạn hữu hạn.



Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm và . Khi tăng lên, các điểm



1. **Đáp án D**

Vì nên . ( Các dãy số còn lại đều có nên đều có giới hạn bằng ).



1. **Đáp án A.**

Vì nên . Suy ra : .



1. **Đáp án C.**

Vì có nên .



( Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng .)



1. **Đáp án B.**

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của trên tử bằng , hệ số của dưới mẫu bằng nên giới hạn là .



1. **Đáp án A.**

Phân thức có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng .



( Phân thức có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng . Phân thức có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng . Phân thức có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng .)



1. **Đáp án D.**

+ Nhận xét : mà nên .



Do đó : .



+ mà nên .



Do đó : .



+ mà nên .



Do đó :



Vậy ba giới hạn đầu đều có kết quả bằng nên đáp án cần chọn là đáp án D.



( mà nên .



Do đó : .)



1. **Đáp án D.**

Vì , nên không thể áp dụng quy tắc . Do đó Nam đã sai ở bước . ( Quy tắc áp dụng khi và .)



1. **Đáp án D.**

Vì hai căn thức và đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của lại khác nhau nên giới hạn cần tìm bằng ( do ).



Thật vậy, ta có : .



Vì và nên .



Hoặc độc giả có thể sử dụng MTVT để kiểm tra kết quả trên.

1. **Đáp án B.**

Ta thấy tử thức có bậc bằng , mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của trên tử thức bằng 1, hệ số của dưới mẫu thức bằng nên giới hạn cần tìm bằng . Thật vậy ta có :



hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT để kiểm tra kết quả trên.



1. **Đáp án B.**

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau :

|  |  |
| --- | --- |
| Qui trình bấm máy | Kết quả thu được |
| (1p2Q))saQ)+3RQ)^3$+Q)+1r10^5= |  |

Do đó đáp án đúng là đáp án B.

Hoặc ta làm như sau :

.



1. **Đáp án D.**

Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.



Lời giải chính xác : .



Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

1. **Đáp án C.**

Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều hữu hạn. Vậy đáp án là C.

***Lưu ý :*** .



Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác :

Ta có : . Mà : ; và nên .



Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

1. **Đáp án B.**

Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian. Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có bậc bằng . Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới hạn vô cực. Do đó ta chia tử và mẫu cho để được : .



Ta có : . Vậy nên .



1. **Đáp án D.**

Ta có : . Từ đó dễ thấy .



Thật vậy, .



**DẠNG 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.**

1. **Đáp án A.**

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có : và . Do đó tổng của cấp số nhân đó là : . Suy ra : . Vậy .



1. **Đáp án A**

Ta có .



Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau :

|  |  |
| --- | --- |
| **Qui trình bấm máy** | **Kết quả** |
| 0.27323232323232= |  |
| 0.27Qs32= |  |

Vậy , do đó chọn đáp án A.



1. **Đáp án C.**

Ta có : mà : .



Thay vào ta được : .



Vậy .



1. **Đáp án A.**

Ta có : . Vì nên là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có và . Do đó ta có : (t/m ).



1. **Đáp án C.**

Đường cao của tam giác đều cạnh là . Diện tích của tam giác đều cạnh là .



Tam giác có cạnh bằng tam giác có cạnh bằng tam giác có cạnh bằng …tam giác có cạnh bằng .



Và , , , …, .



Như vậy là một CSN lùi vô hạn với . Vậy .



**DẠNG 4. Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.**

1. **Đáp án D.**

Ta thầy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là . Ta có : . Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng .



1. **Đáp án B.**

Cách 1 : Ta có . Đặt .



Khi đó : . Vậy là một cấp số nhân có công bội . Gọi là tổng số hạng đầu tiên của .



Ta có : . Suy ra : .



Vậy .



Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình : .



Bấm r, máy hỏi A? nhập , máy hỏi X? nhập , máy hỏi Y? Nhập , bấm =



liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

1. **Đáp án C.**

Sử dụng MTCT.

|  |  |
| --- | --- |
| **Qui trình bấm máy** | **Kết quả thu được** |
| QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2=============================================================================================================================================== |  |

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được .



Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng . Do đó chọn đáp án C.



***Bổ sung :*** Cho dãy số được xác định bởi , , với , trong đó là các số thực cho trước , . Người ta chứng minh được rằng .



1. **Đáp án B.**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn . Khi đó ta có : .



Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận hay .



Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là . Vậy chọn đáp án B.



|  |
| --- |
|  |

1. **Đáp án C.**

Cách 1: Ta có

; ; ;...



Dự đoán . Khi đó . Vậy .



Suy ra . Do đó chọn đáp án C.



Cách 2 : Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

|  |  |
| --- | --- |
| **Qui trình bấm máy** | **Kết quả thu được** |
| QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1=1==================== |  |

Bấm r, máy hỏi X? nhập , máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của , ta thấy giá trị đó dần về . Vậy chọn đáp án C.



***Nhận xét :*** Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa và là khá xa nên giá trị của khá xa so với .



**DẠNG 5. Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số.**

1. **Đáp án C.**

Đây là một bài toán chứa tham số.

Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho và các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.



Chẳng hạn cho . Khi đó , và đôi một khác nhau.



Nhập vào màn hình :

|  |  |
| --- | --- |
| **Qui trình bấm máy** | **Kết quả thu được** |
| QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3============================================================================================================================================= |  |

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn , ta được .



Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng . Do đó chọn đáp án C.



***Bổ sung :*** Cho dãy số được xác định bởi,,, trong đó là các số thực cho trước, .



a) Chứng minh dãy là dãy giảm, còn dãy là dãy tăng.



b) Chứng minh rằng .



c) Chứng minh rằng .



d) Chứng minh rằng có giới hạn và giới hạn đó là .



Việc chứng minh bài toán trên xin dành cho độc giả.

1. **Đáp án A.**

Dễ thấy với mọi.



1. **Đáp án B.**

Dễ thấy với thì .



Thật vậy :

Nếu thì .



Nếu thì .



Do đó để thì .



1. **Đáp án D.**

Với kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy để có giới hạn hữu hạn thì .



1. **Đáp án D.**

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có :

.



Suy ra . Do đó để



.



1. **Đáp án B.**

Ta có : . Do đó ta phải có .



1. **Đáp án C.**

Ta có mà . Do đó .



1. **Đáp án A.**

Ta có . Để hữu hạn thì ( xem lại phần ví dụ ).



phần Ví dụ). Ta có . Vậy . Do đó đáp án là A.



***DẠNG 1. TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.***

1. **Đáp án A.**

***Lời giải***

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì do tử thức là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng , mẫu thức là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng .



Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

.



1. **Đáp án A.**

***Lời giải***

Ta thấy tử thức là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng , mẫu thức là tổng của số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng . Mà nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là .



1. **Đáp án B.**

***Lời giải***

Ta có:



Vậy



1. **Đáp án A.**

***Lời giải***

Ta có:



Mà nên suy ra:



1. **Đáp án B.**

***Lời giải***

Ta có:



Suy ra



Vậy



1. **Đáp án C.**

***Lời giải***

Ta có:



Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:



Vậy chọn đáp án C.

**GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

**A. LÝ THUYẾT**

**I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm**

**1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm**

**Định nghĩa 1:**

Cho là một khoảng chứa điểm và hàm số xác định trên hoặc trên với mọi dãy số mà ta có



**Nhận xét:**

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại .



**Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):**

Cho hàm số xác định trên khoảng với mọi dãy số mà ta có



Cho hàm số xác định trên khoảng với mọi dãy số mà ta có



**STUDY TIP**

nghĩa là và



nghĩa là và



**Định lí 1**



**2. Giới hạn vô cực tại một điểm**

**Định nghĩa 3**

Cho là một khoảng chứa điểm và hàm số xác định trên hoặc trên với mọi dãy số mà ta có



**Lưu ý:**

Các định nghĩa được phát biểu hoàn toàn tương tự.



**3. Lưu ý:**

a) không nhất thiết phải xác định tại điểm .



b) Ta chỉ xét giới hạn của tại điểm nếu có một khoảng (dù nhỏ) chứa mà xác định trên hoặc trên



*Chẳng hạn, hàm số*  *có tập xác định là . Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm , do không có một khoảng nào chứa điểm mà xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của tại mọi điểm*



c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của tại điểm nếu có một khoảng (khoảng nằm bên phải ) mà xác định trên đó.



Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của tại điểm nếu có một khoảng (khoảng nằm bên trái ) mà xác định trên đó.



*Chẳng hạn, với hàm số , tại điểm , ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số , tại điểm , ta chỉ xét giới hạn bên trái.*



d)



**II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực**

**1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực**

**Định nghĩa 4**

|  |
| --- |
| Cho hàm số xác định trên khoảng với mọi dãy số , và ta đều có . |

**LƯU Ý:** Định nghĩa được phát biểu hoàn toàn tương tự.



**2. Giới hạn vô cực tại vô cực**

**Định nghĩa 5**

|  |
| --- |
| Cho hàm số xác định trên khoảng với mọi dãy số , và ta đều có . |

**LƯU Ý:** Các định nghĩa: được phát biểu hoàn toàn tương tự.



**III. Một số giới hạn đặc biệt**

|  |
| --- |
| a) .  b) ( là hằng số )  c) ( là hằng số, nguyên dương ).  d) với nguyên dương; nếu là số nguyên lẻ; nếu là số nguyên chẵn. |

Nhận xét: .



**IV. Định lí về giới hạn hữu hạn**

**Định lí 2**

|  |
| --- |
| Giả sử và . Khi đó  a) .  b) ; với là một là một hằng số.  c) . |

**STUDY TIP:** Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

**Định lí 3**

|  |
| --- |
| Giả sử . Khi đó  a) .  b) .  c) Nếu với mọi , trong đó là khoảng nào đó chứa , thì và . |

**LƯU Ý:** Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay bởi ,.



**V. Quy tắc về giới hạn vô cực**

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: và .



Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp .



**Quy tắc 1 ( Quy tắc tìm giới hạn của tích ).**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |

**STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số**

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

**Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Dấu của |  |
|  |  | Tùy ý | 0 |
|  | 0 | + |  |
| - |  |
|  | 0 | + |  |
| - |  |

( Dấu của xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với ).



**STUDY TIP:** Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:

- Mẫu thức càng tang ( dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).

- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

**VI. Các dạng vô định: Gồm và .**



**B. Các dạng toán về giới hạn hàm số**

***Dạng 1:*** **Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

***Phương pháp:***

|  |
| --- |
| * Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định? * với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng chứa điểm . Khi đó, .  * Với giới hạn hàm số tại vô cực ta “xử lí” tương tự như giới hạn dãy số. * Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực. |

**STUDY TIP: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số không có giới hạn khi**



* chọn hai dãy số khác nhau và thỏa mãn và thuộc tập xác định của hàm số và khác ; .



* Chứng minh hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.



* Từ đó suy ra không tồn tại. TH hoặc chứng minh tương tự.



**Ví dụ 1:** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.**  **B.** **C.**  **D.**  không tồn tại.



**Đáp án D**

**Lời giải**

Xét dãy số với .



Ta có và .



Lại xét dãy số với .



Ta có và .



Từ và suy ra không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.



**Ví dụ 2:** Cho hàm số bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**STUDY TIP: Giới hạn tại một điểm**

Nếu xác định tại và tồn tại một khoảng thuộc tập xác định của chứa thì .



- Việc sử dụng hay không sử dụng MTCT để tính tùy thuộc vào mức độ phức tạp của và khả năng tính toán của độc giả.



**Đáp án C.**

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định trên.



**Cách 1(sử dụng định nghĩa):**

Giải sử là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn và khi . Ta có ( áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó .



**Cách 2( sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):**

Theo định lí 1 ta có:

.



Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

**Cách 3:** Vì là hàm số sơ cấp xác định trên chứa điểm nên .



Do đó sử dụng MTCT ta làm như cách 4 dưới đây.

**Cách 4:** Nhập biểu thức của vào màn hình. Bấm phím CALC, máy hỏi X ? nhập 3 = . Máy hiển thị kết quả như hình:

|  |
| --- |
|  |

Do đó chọn đáp án C.

1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

**A.**. **B.** .



**C.** . **D.** Hàm số không có giới hạn khi.



**Đáp án B**

**Lời giải**

Hàm số xác định trên các khoảng và . Ta có .



**Cách 1 :**.



**Cách 2 :** Nhập biểu thức của hàm số và màn hình MTCT. Bấm phím CALC , máy hỏi X? nhâp 3 =. Máy hiển thị kết quả như hình:



|  |
| --- |
|  |

Vậy .



1. bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án C.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Sử dụng MTCT tính giá trị của tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi ), chẳng hạn tại . Máy hiển thị kết quả như hình:



|  |
| --- |
|  |

Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C , tức .



**Cách 2:** Ta có .



Vì và nên .



Vậy theo Quy tắc 1, . Do đó chọn C.



**Lưu ý 1:**

- Để hiểu tại sao và xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.



- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi dần tới vô cực, nhưng là khi . Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi . Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.



**Lưu ý 2:** Có thể dễ dàng chứng minh được kết quả như sau :

Cho hàm số là một đa thức bậc .



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Giới hạn của |
|  | Tùy ý |  |  |
|  |  |
|  | chẵn |  |  |
|  |  |
| lẻ |  |  |
|  |  |

Thật vậy, ta có .



Vì và với tùy ý, nếu chẵn, nếu lẻ nên ta dễ dàng suy ra bảng kết quả trên.



1. bằng:



**A.** . **B.** . **C.** 3. **D.** 2.



**Đáp án A**

**Lời giải**

**Cách 1:** Theo nhận xét trên thì ( chẵn và ). Thật vậy, ta có



Vì và nên.



**STUDY TIP**

- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.

- Giới hạn của hàm đa thức tại phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).



- Giới hạn của hàm đa thức tại phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại , ta được kết quả như hình :



|  |
| --- |
|  |

Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

1. Cho hàm số . Khẳng định nào dưới đây đúng ?



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.**  không tồn tại.



**Đáp án B.**

**Lời giải**

Hàm số xác định trên.



Có thể giải nhanh như sau : Vì là một hàm đa thức của nên có giới hạn tại vô cực. Mà với mọi nên giới hạn của tại chắc chắn là .



Thật vậy, ta có .



Vì và nên .



Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của tại một giá trị âm rất nhỏ của , chẳng hạn tại ta được kết quả như hình:



|  |
| --- |
|  |

Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thâý kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

**STUDY TIP**

Ta có .



Khi thì .



Với ta có .



Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại của hàm chứa căn thức.



1. Giới hạn của hàm số khi bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 3.



**Đáp án A.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có:



Mà và .



Vậy .



**Lưu ý:**

- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì .



Mà hệ số của trong lớn hơn hệ số của trong nên suy ra



.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình.



|  |
| --- |
|  |

Vậy chọn đáp án A.

1. bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 0.



**Đáp án D.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Vì nên theo quy tắc 2, .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình.



|  |
| --- |
|  |

Đó là một kết quả rất gần 0. Do đó chọn đáp án D.

**STUDY TIP**

Khi hàm số không xác định tại thì ta thử áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng . Lưu ý cách xác định dấu của giới hạn.



- Dạng : giới hạn là 0.



- Dạng và : Giới hạn là vô cực.



1. Giới hạn bên phải của hàm số khi là



**A.** . **B.** . **C.** 3. **D.** .



**Đáp án B.**

**Lời giải**

Hàm số xác định trên .



**Cách 1:** Ta có với mọi và . Do đó theo quy tắc 2 thì.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT. Tính giá trị của tại ta thấy máy báo lỗi Math Error (do không xác định tại ). Quay lại tính giá trị của tại (tức) là một giá trị của lớn hơn 2 và rất gần 2. Kết quả là một số âm rất nhỏ.



|  |
| --- |
|  |

Do đó chọn đáp án B.

1. Xét bài toán “Tìm ”, bạn Hà đã giải như sau:



Bước 1: Vì .



Bước 2: với và đủ gần 2,



Bước 3:



Bước 4: nên theo quy tắc 2, .



Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

**A.** Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

**Đáp án B**

**Lời giải**

Xét dấu biểu thức ta thấy với mọi .



Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả).



**STUDY TIP**

nghĩa là và .



nghĩa là và .



Nếu thì tính giá trị hàm số tại .



Nếu thì tính giá trị hàm số tại .



Trong đó là một sô nguyên dương.



1. Giới hạn bằng:



**A.** 0. **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án C.**

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có và với mọi nên theo quy tắc 2, . Vậy chọn đáp án C.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại hoặc tại ra được các kết quả như hình



|  |
| --- |
|  |
|  |

Vậy chọn đáp án C.

1. Cho hàm số . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?



**A.** . **B. .**



**C.** . **D.** .



**Đáp án D.**

**Lời giải**

Ta có . Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.



**STUDY TIP**

Cần xác định đúng biểu thức của khi và khi .



Giải thích thêm : Ta có.



Vậy nên không tồn tại.



Các đáp án A, B, C đều sai.

**STUDY TIP**

.



1. Cho hàm số .



Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số có giới hạn khi ?



**A.** 19. **B.** 1.

**C.** . **D.** Không có số nào thỏa mãn.



**Đáp án C.**

**Lời giải**

Hàm số đã cho các định trên.



**Cách 1:** Ta có .



Đặt khi ( là tham số,).



Ta có .



Để hàm số có giới hạn khi thì .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức khi được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức khi và lần lượt nhận các giá trị bằng và . Ta thấy khi thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.



1. Cho hàm số có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là ?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án C.**

**Lời giải**

Khi , đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó. Tương tự như vậy ta có .



Do đó chọn đáp án C.

**Công phá toán 2 (trang 240 – 244)**

***DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG***



**STUDY TIP**

* + - * Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.
      * Kí hiệu các dạng vô định gồm: và . Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *“khử dạng vô định”*.



**1. Bài toán:**

Tính khi , trong đó và là các đa thức hoặc căn thức.



*Phương pháp giải (tự luận)*

* Phân tích tử và mậu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì nên và cùng có nghiệm . Do đó ta phân tích được và . Khi đó ta có: và công việc còn lại là đi tính .



* Nếu và có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.



**STUDY TIP**

*Phân tích đa thức thành nhân tử:*

* Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.
* Khi đã biết có nghiệm , ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia cho được thương . Khi đó .



* Áp dụng kết quả: nếu phương trình có hai nghiệm thì .



*Tổng quát:* nếu phương trình có các nghiệm thực thì , trong đó là đa thức bậc . Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ nghiệm thực, tức . Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (với phương trình bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)



1. Tính .



**A.** 1. **B.** 4. **C.**. **D.** .



**Phân tích:** Vì nên đây là giới hạn vô định dạng . Ta thấy và đều triệt tiêu tại nên là nghiệm của và . Từ đó ta có cách giải như sau.

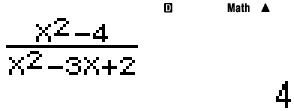
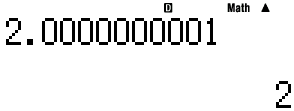
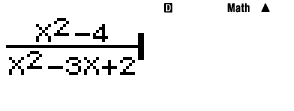


**Lời giải**

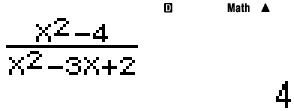
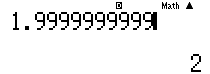
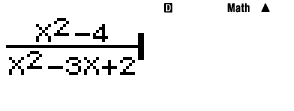
**Cách 1:** Ta có .



**Cách 2:** Dử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta thấy máy báo lỗi Math Error (do hàm số không xác định tại ). Quay lại tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như sau:



Lại quay lại tính giá trị hàm số tại 1,9999999999 ta được kết quả như sau:



Vậy chọn đáp án B.

1. Tính giới hạn , ta được kết quả:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có .



Lại có .



Tương tự: .



Vậy .



**Cách 2:** Cho và các giá trị cụ thể, chẳng hạn và . Sử dụng MTCT tính ta được kết quả . Vậy đáp án đúng là B.



**STUDY TIP**



1. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

**A.** . **B.** .



**C.** . **D.**  không tồn tại.



**Phân tích:** Vì và nên đây là dạng vô định . Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của là .



**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có



.



Mà ; .



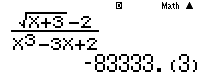
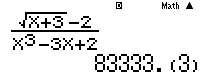
Do đó không tồn tại.



Suy ra không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức tại ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại và tại ta được kết quả:



Hai kết quả trên là một số dương rất lớn, một số âm rất nhỏ. Do đó có thể kết luận không tồn tại.



*Nhận xét:*

- Nếu chỉ tính giá trị biểu thức tại một điểm thì rất dễ chọn đáp án sai.

- Ở đây ta đã chuyển dạng vô định về dạng xác định .



- Dùng MTCT tìm nghiệm của phương trình ta được . Như vậy phải có một nghiệm là nghiệm kép do là phương trình bậc ba. Trong trường hợp này, theo Tip trên đã nêu, ta nên dùng lược đồ Hooc-ne để phân tích đa thức thành nhân tử.



1. Giới hạn bằng:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Phân tích:** và nên đây là dạng vô định . Ta chưa thể phân tích thành nhân tử. Mà lại là hiệu của hai căn thức không cùng bậc. Ta để ý thấy và đều đạt giá trị bằng 1 tại nên ta biến đổi như sau: rồi tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp.



**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có



.



Tac có: .



Do đó .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức tại ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại và tại ta được kết quả:



Do đó chọn đáp án B tức là .



**STUDY TIP**

Cho (chứa hai căn khác bậc) trong đó thì ta biến đổi như sau: .



1. Tính giới hạn .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Cách 1:** Đặt thì và



.



Vậy .



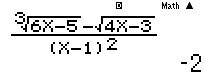
Mà ; .



Vậy .



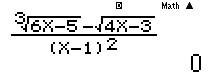
**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức tại và tại ta đều được kết quả:



Do đó chọn đáp án B.

*Lưu ý:*

- Trong cách thứ 2, nếu ta tính giá trị biểu thức tại hoặc tại thì ta được kết quả:



Do vượt quá giới hạn tính toán của máy. Do đó nếu không thử lại với cá trị lớn hơn thì có thể ta sẽ chọn đáp án A.

ở bài này có nhiều vấn đề cần phân tích thêm. Nếu làm như ví dụ 4 thì ta sẽ biến đổi rồi nhân liên hợp để thu được



- Ta thấy giới hạn mới thu được vẫn còn là dạng vô định nên vẫn tiếp tục phải khử dạng vô định. Mà việc khử này sẽ rất phức tạp do biểu thức mới thu được khá cồng kềnh. Để giải quyết khó khăn đó ta thấy trong lời giải trình bày ở trên, ta tiến hành đổi biến để cho mẫu gọn lại và không thêm bớt 1 trên tử thức mà thêm bớt nhị thức . Vậy cơ sở nào để tìm ra nhị thức đó?



Ta mong muốn sau khi thêm bớt tử thức với một lượng nào đó rồi tách ra thành hai phân thức để nhân liên hợp thì trên tử thức xuất hiện nhân tử để giản ước với dưới mẫu



.



Vậy ta phải có



và .



- Ở nhiều bài toán giới hạn, ta thấy việc sử dụng MTCT là nhanh hơn giải thông thường. Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyến nghị độc giả nên nắm vững phương pháp giải thông thường (theo hình thức tự luận), vì nhiều bài tập không chỉ đơn thuần là tính giới hạn mà người ra đề có thể hỏi bằng nhiều hình thức khác nhau, đặc biệt có nhiều cách ra đề hạn chế việc sử dụng MTCT để tìm ra đáp án.

**STUDY TIP**

Trong nhiều bài toán, không nên chỉ tính giá trị hàm số tại một điểm mà nên tính lại một số điểm từ lớn đến nhỏ và từ cả hai phía trái, phải của .



1. Giới hạn của hàm số khi bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Cách 1:**



**Cách 2:** (Đặc biệt hóa để sử dụng MTCT) Cho một giá trị bất kì, chẳng hạn , thì . Dùng MTCT ta tìm được .



Vậy chọn đáp án A.

Giải thích: phương trình có tổng các hệ số bằng nên ta có một nghiệm bằng , nghiệm còn lại bằng . Do đó ta phân tích được .



**STUDY TIP**

* + - * Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng thì đa thức có một nghiệm bằng .



* + - * Nếu đa thức có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ thì đa thức có một nghiệm bằng .



1. Giả sử . Hệ số bằng bao nhiêu để ?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có



Vậy . Do đó . Đáp án đúng là D.



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tìm lần lượt với bằng , , , . Ta thấy với thì bằng . Vậy chọn đáp án D.



**STUDY TIP**

Một trong các kĩ thuật giải bài toán trắc nghiệm là thử lần lượt các đáp án và chọn ra đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt**

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng



Đó là . Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.



**Ví dụ 8:** Cho và là các số thực khác 0. Khi đó bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án C.**

***Cách 1***: Ta có



Đổi biến ta thấy khi thì . Do đó



Vậy .



***Cách 2***: Cho và các giá trị cụ thể, chẳng hạn .



Sử dụng MTCT tìm giới hạn ta được kết quả bằng , tức là bằng .



Vậy chọn C.

**STUDY TIP**



, với điều kiện



**Ví dụ 9:** Cho số thực khác 0. Khi đó bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án A**

***Cách 1***: Ta có:

.



***Cách 2***: Cho a là một giá trị cụ thể, chẳng hạn (không nên lấy , vì khi đó giá trị của và cũng bằng nhau). Sử dụng MTCT tính giới hạn ta được kết quả bằng , tức là bằng . Vậy chọn đáp án A.



**STUDY TIP**



điều kiện



**Ví dụ 10:**  bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án D**

***Cách 1***: Ta có



Mà (xem STUDY TIP trên), .



Vậy . Do đó chọn đáp án D.



***Cách 2***: Sử dụng MTCT tính giới hạn (ứng với ).



So sánh kết quả với ta được .



Vậy chọn đáp án D.

**3. Đọc thêm**

**Ví dụ 11:** Cho và là các số nguyên dương. . Tích có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?



**A.** 15. **B.** 60. **C.** 240. **D.** Cả ba đáp án trên.

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có



Vậy để thì . Vì và là các số nguyên dương nên suy ra với nguyên dương. Do đó .



+



+



+



Vậy cả ba đáp án đều đúng. Do đó chọn đáp án D.

**STUDY TIP**

Ngoài giới hạn , Sách giáo khoa giải tích 12 nâng cao chương 2, 5 còn giới thiệu thêm các giới hạn:



**Ví dụ 12:** Cho hàm số , trong đó *k* là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của *k* để có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án D**

***Cách 1***: Ta có



Mà nên để có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0 thì hàm số phải có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0. Muốn vậy thì . Vì k nguyên dương nên đáp án là D.



***Cách 2***: Sử dụng MTTCT tìm giới hạn khi , ta được .



Vậy ta chỉ xét đáp án C hoặc D.Chẳng hạn với đáp án C, ta sử dụng MTCT tìm giới hạn khi . Ta được . Do đó loại đáp án C. Vậy đáp án đúng là D.



**\*\*\*** Trong chương trình lớp 12 sẽ được học khái niệm căn bậc n.

**Định nghĩa**

Cho số thực và số nguyên dương . Số được gọi là căn bậc của số nếu



Với chẵn và:



: Không tồn tạo căn bậc của .



: Có một căn bậc của là số 0.



: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là , còn giá trị âm là



Sau đây ta xét một vài ví dụ liên quan đến căn bậc n.

**STUDY TIP**



-Mọi số thực đều có một căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ

- Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Số 0 có một căn bậc chẵn là 0.

Các số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau.

**Ví dụ 13:** Cho là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án A.**

***Cách 1***: Sử dụng MTCT tìm giới hạn với và , ta được kết quả vậy đáp án đúng là A.



***Cách 2***: Đổi biến đặt



Ta có khi thì và



Mà nên suy ra . Vậy chọn A.



**STUDY TIP**



**Ví dụ 14:** Biết trong đó là phân số tối giản, và là các số nguyên dương.



Tổng bằng



**A.** 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm đáp án đúng.

Đặt . Suy ra . và



Do đó . Áp dụng ví dụ 13 Ta có:



Vậy



Do đó . Vậy và



**\*\*\*** Tính giới hạn vô định dạng bằng đạo hàm (Quy tắc L’Hôpital).



**STUDY TIP**

**\***Quy tắc L’Hôpital

.



Trong đó và xác định trên khoảng ,



(Hoặc )



Và tồn tại



Trước khi đọc phần này xin đọc chương đạo hàm trong chương trình lớp 11

**Ví dụ 15:** Ta xét lại ví dụ 9 đã nêu ở trên.

Cho số thực khác 0. Khi đó bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Lời giải**

**Đáp án A**

Ngoài hai lời giải đã nêu ở trên ta còn một cách áp dụng Quy tắc L’Hopital như sau:



Ở đây ta áp dụng Quy tắc L’Hopital 2 lần. Cách sử dụng Quy tắc này rất hữu dụng khi giải các bài toán trắc nghiệm. Tuy nhiên không áp dụng Quy tắc này cho các bài toán tự luận do Quy tắc L’Hopital không được trình bày trong chương trình THPT.

**STUDY TIP**

Có thể áp dụng quy tắc L’Hopital nhiều lần để tính giới hạn

Đề nghị: Độc giả hãy vận dụng quy tắc L’Hopital để giải các ví dụ đã nêu ở dạng 2 này.

bài tập dạng trắc nghiệm. Nếu là bài tập dạng tự luận thì các em cần trình bày chi tiết theo phương pháp đã nêu trên. Riêng A và B, ta giải tự luận như sau:



**Ví dụ 2:** Giới hạn bằng:



**A.** 0 **B.**  **C.**  **D.**



**Đáp án D**

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì



Cách 2: Sử dụng MTCT

Bổ sung: Nếu là bài toán tự luận ‘Tìm ” thì ta có hai cách giải như sau:



Cách 1: Ta có . Mà ; nên theo qui tắc 2,



Cách 2 : Ta có . Mà và với mọi nên theo qui tắc 2,



 STUDY TIP

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | a |  |
| Chẵn | + | + |
| - | - |
| Lẻ | + | - |
| - | + |

**Ví dụ 3** : Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng  ?



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



Đáp án C

Lời giải

Cách 1 : Theo cách ghi kết quả ở trên thì



Cách 2 : sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn

Khi đến C thấy nên dừng lại và chọn đáp án C



Ví dụ 4 : Giới hạn bằng :



**A.** 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -1

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 :



Vậy chọn đáp án B

Cách 2 : Sử dụng MTCT

**Ví dụ 5** : Giới hạn bằng :



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Đáp án B**

Lời giải :

Cách 1 : Theo ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì



Ta đưa ra ngoài căn rồi chia cả tử và mấu cho x. Cụ thể như sau :



Vậy đáp án đúng là B

Cách 2 : Sử dụng máy tính tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B



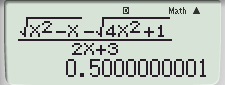
Cách 3 : Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau :

Vì nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác bậc tử và bậc mẫu bằng nhau nên giới hạn cần tìm là hữu hạn.



Đáp án cần tìm là đáp án B

STUDY TIP



**Ví dụ 6 :** Biết trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :



**A.** 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

Đáp án C

Lời giải :

Ta có :



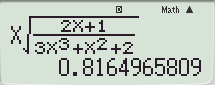
Vậy Dễ dàng suy ra được tích của ab là 18.



Chú ý : Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thưc về giới hạn hàm số, rất khó tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt ! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị các bạn đọc nên giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể đối mặt với các bài toán ‘’chống MTCT’’



STUDY TIP



**Dạng 4 : Dạng vô định**



Bài toán : Tính giới hạn khi và



Phương pháp : Ta có thể biến đổi để đưa về dạng hoặc để đưa về dạng .



Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

**Ví dụ 1 :** Giới hạn bằng :



**A.** 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.**



Đáp án B

Phân tích : Ta có nên chưa có thể áp dụng các định lí, qui tắc để tính giới hạn.



Lời giải :

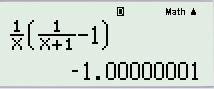
Cách 1 : Ta có



Cách 2 : Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức



STUDY TIP



**Ví dụ 2 :** Giới hạn bằng :



**A.**  **B.**  **C.** 0 **D.** 1



**Đáp án C**

Phân tích : Vì nên chưa có thể áp dụng các định lý và qui tắc để tính giới hạn.



Lời giải :

Cách 1 : Với mọi ta có :



Do đó . Vậy chọn đáp án C



Cách 2: Sử dụng MTCT

**Ví dụ 3:** Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Đáp án B**

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định



Tuy nhiên vì nên giới hạn này cũng có thể coi như dạng



Lời giải

Cách 1: Với ta có nên . Do đó



Vậy chọn đáp án B

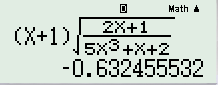
Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. So sánh các đáp số A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là **B.**



STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là . Hệ số của trong là do . Hệ số của x trong 2x + 1 là 2 nên hệ số của trên tử là . Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của .





**Ví dụ 4:** Giới hạn bằng



**A.** 0 **B.** 1 **C.**  **D.** Không tồn tại



**Đáp án B**

Phân tích: Vì nên . Ta có dạng . Lời giải như sau :



Lời giải :

Cách 1 : Ta có :



Đặt và thì



Cách 2: Sử dụng MTCT ( Lưu ý chuyến máy về chế độ Radian)

**STUDY TIP**

Ở ví dụ 4 ta đã chuyển dạng thành do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt



**Ví dụ 5:** Giới hạn bằng



**A.** 1 **B.** 0 **C.**  **D.** Không tồn tại



**Đáp án A**

Phân tích: vì nên ta có dạng



Lời giải :

Cách 1 : Đặt thì và . Do đó



Cách 2 : Sử dụng MTCT

**STUDY TIP**

. Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này



**Dạng 5 : Dạng**



Bài toán : Tính khi và Hoặc tính khi và



Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức ( nếu chứa nhiều phân thức).

**Ví dụ 1 :** Giới hạn bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Đáp án A**

Lời giải :

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy nên bài này thuộc dạng . Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thưc liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:



Ta có:



Cách 2: Sử dụng MTCT

**Ví dụ 2:** Giới hạn bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Đáp án D**

Lời giải:

Phân tích: Ta có nên bài này thuộc dạng vô



định (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có hạng tổng). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:



Ta có:



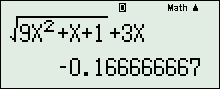
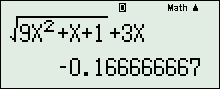
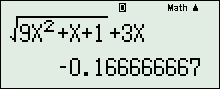
Vậy chọn đáp án **D.**



***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**



** *Studytip:***

**Ví dụ 3.** Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



***Lời giải***

***Cách 1: Phân tích:***

Vì nên đấy cũng là dạng vô định Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhâ chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy thì nên ta thêm bớt rồi nhân chia liên hợp.



Với :



Do đó

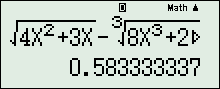
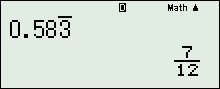


Do đó chọn **B.**

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**



** *Studytip:***

***Lưu ý*:** Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

**Ví dụ 4.** Giới hạn của hàm số khi bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



***Phân tích***: Ví dụ này cũng thuộc dạng nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem cách giải cho tiết dưới đây.



**Lời giải**



Ta có và



Vậy



** *Studytip:***

Cũng là nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.



**Ví dụ 5.** Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



**Lời giải**

***Cách 1:*** Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là **D.** Thật vậy:













do



***Cách 2:*** Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

**Ví dụ 6.** Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Lời giải**

***Cách 1:*** Vì nên ta có dạng



Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

Ta có

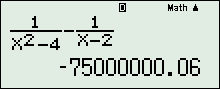


Vì và với mọi nên theo quy tắc 2, Do đó chọn B



***Cách 2***: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức là





**Ví dụ 7.** Cho và là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa và để giới hạn: là hữu hạn:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Lời giải**

***Cách 1:*** Ta có



Ta có



Do đó nếu thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.



Từ đó chọn được đáp án đúng là C.

(Thật vậy, nếu thì



Và do đó



***Cách 2***: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của và , thay vào hàm số rồi tính giới hạn.



Từ đó chọn được đáp án là **C.**

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

***DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỦ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ, QUY TẮC.***

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để với



**A.** hoặc **B.** hoặc **C.**  **D.**



1. Cho hàm số Khi đó bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong các hầm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Chọn khẳng định đúng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**  không tồn tại.



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng



**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng



**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực sao cho hàm số có giới hạn hữu hạn khi



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



***DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG***



1. Giới hạn



**A.** Bằng **B.** Bằng **C.** Bằng **D.** không tồn tại



1. Cho là một số thực khác 0. Kết quả đúng của bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Cho là tham số thực. Tìm để



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Cho và là các số thực khác Nếu thì bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Cho và là các số thực khác Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Cho là các số thực khác Tìm hệ thức liên hệ giữa để:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Cho và là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Để tính giới hạn bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:



Bước 1: Ta có:



Bước 2:



Bước 3:



Bước 4:



Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

**A.** Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

1. Biết trong đó là phân số tối giản, và là các số nguyên dương. Tổng bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Biết trong đó là phân số tối giản, và là các số nguyên dương. Khi đó bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Giới hạn bằng:



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác



**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



***DẠNG 3: GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG***



1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng ?



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

**A.**  **B.**



**C.**  **D.**



1. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là ?



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



1. Tính giới hạn .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho là các số thực khác . Tìm hệ thức liên hệ giữa để .



**A. . B. .** **C.** . **D.** .



1. Cho và là các tham số thực . Biết rằng và thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?



**A.** **B.** **C.** **D.**



1. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là ?



**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



**DẠNG 4: Giới hạn vô định dạng**



1. Cho là một số thực dương. Tính giới hạn .



**A.** bằng . **B.** là . **C.** là . **D.** không tồn tại.



1. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Tính giới hạn .



**A.** . **B.** 0. **C.** . **D.**



1. Tính giới hạn .



**A.** . **B.** 0. **C.** . **D.**



**DẠNG 5: Dạng vô định**



1. Cho là một số nguyên dương. Tính giới hạn .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.**



1. Cho hàm số . Với giá trị nào của thì hàm số có giới hạn tại điểm



**A.** 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực sao cho giới hạn là hữu hạn.



**A.** . **B. . C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là ?



**A. .** **B. .**



**C.** . **D.** .



1. Giới hạn nếu.



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho và là các số thực khác . Biết , thì tổng bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho và là các số thực khác . Biết số lớn hơn trong hai số và là số nào trong các số dưới đây?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



1. Biết trong đó là phân số tối giản, và là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của và .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho và là các số nguyên dương. Biết , hỏi và thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

**DẠNG 1: Bài tập tính giới hạn bằng cách sử dụng định nghĩa, định lý, qui tắc.**

**Câu 1. Đáp án B.**

**Cách 1:** Ta có .



Do đó hay .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính B khi và .



Khi thì , do đó chỉ xét A và B.



Khi thì , do đó A sai vậy B đúng.



**Câu 2. Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có .



Vì và



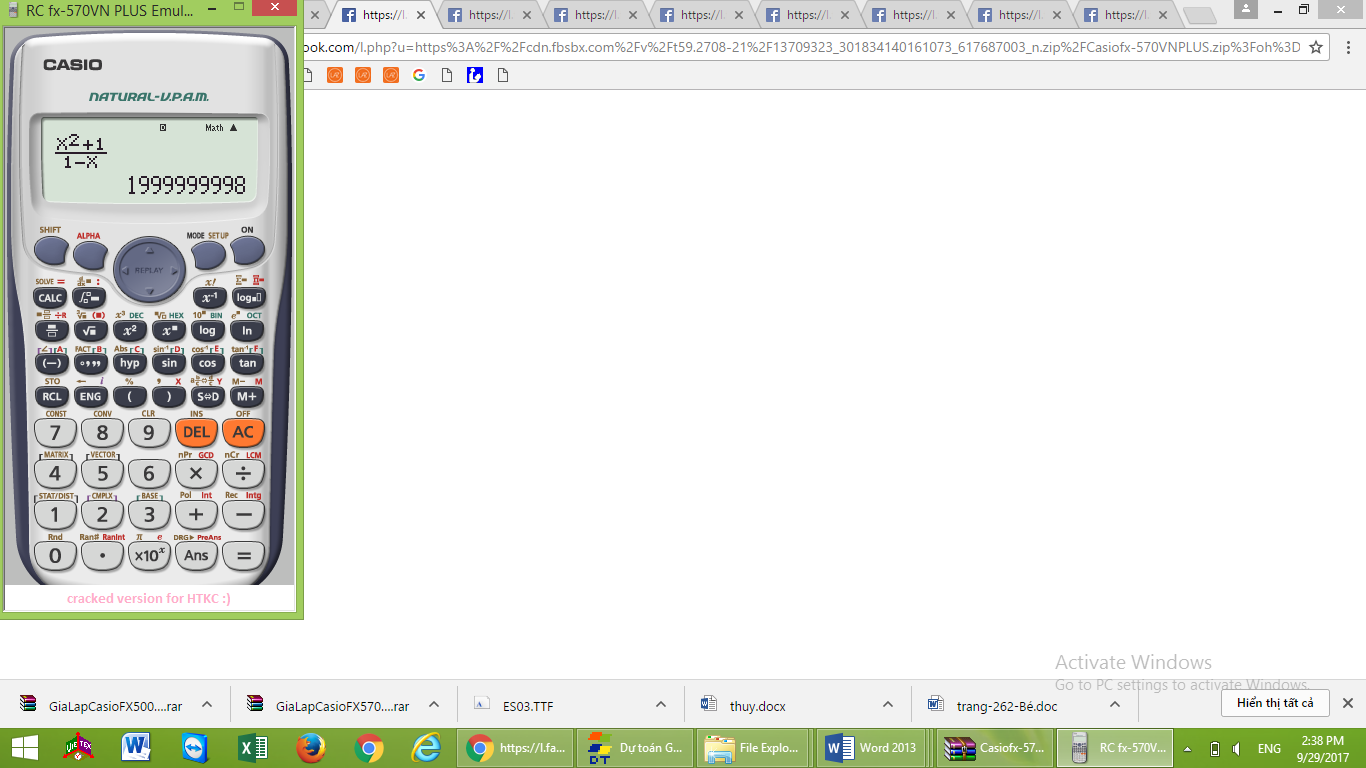
nên theo quy tắc 2: .



**Cách 2:** Ta có .



Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả .



Vậy chọn D.

**Câu 3. Đáp án A.**

Vì , nên .



Giải thích thêm:

+ Hàm số xác định trên khoảng nên không tồn tại giới hạn bên trái tại , do đó không tồn tại giới hạn tại .



+ Hàm số xác định trên khoảng nên không tồn tại giới hạn bên phải tại , do đó không tồn tại giới hạn tại .



+ Vì , ,



nên , .



Vậy nên không tồn tại .



**Câu 4. Đáp án D.**

Xét dãy số với . Ta có và (1).



Lại xét dãy số với . Ta có và (2)



Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại.



**Câu 5. Đáp án C.**

**Cách 1:** Ta có , ;



; .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng .



**Câu 6. Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có

+ ,



+



Do đó .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng .



**Câu 7. Đáp án C.**

**Cách 1:** Ta có ; và .



Vậy theo quy tắc 2, .



Tương tự: ; ; .



Do đó đáp án đúng là C ( Thật ra ta chỉ cần tính đến C là chọn được đáp án đúng).

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng .



**Câu 8. Đáp án B.**

**Cách 1:** Các hàm số trong A, C, D đều xác định tại các điểm điểm tính giới hạn. Do đó đáp án là B.

Thật vậy, ta tính được bằng MTCT: .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

1. **Đáp án C**

**Cách 1:** Ta có;



; .



Vậy



Bổ sung:

+ nên .



+ .



+ .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

1. **Đáp án A**

**Cách 1:** Sử dụng MTCT tính toán khi ta được kết quả **.** Vậy ta chỉ xét các đáp án **A** và **D**.



Lại sử dụng MTCT tính toán khi ta được kết quả **.** Vậy loại đáp án **D**. Do đó đáp án đúng là **A**.



**Cách 2:** .



+ Nếu thì .



+ Nếuthì .



Ta thấy nếu thì và do đó . Ngược lại nếu thì **.** Vậy đáp án đúng là **A**.



**DẠNG 2: Giới hạn vô định dạng** **.**



1. **Đáp án D.**

Ta có và .



Vậy nên không tồn tại.

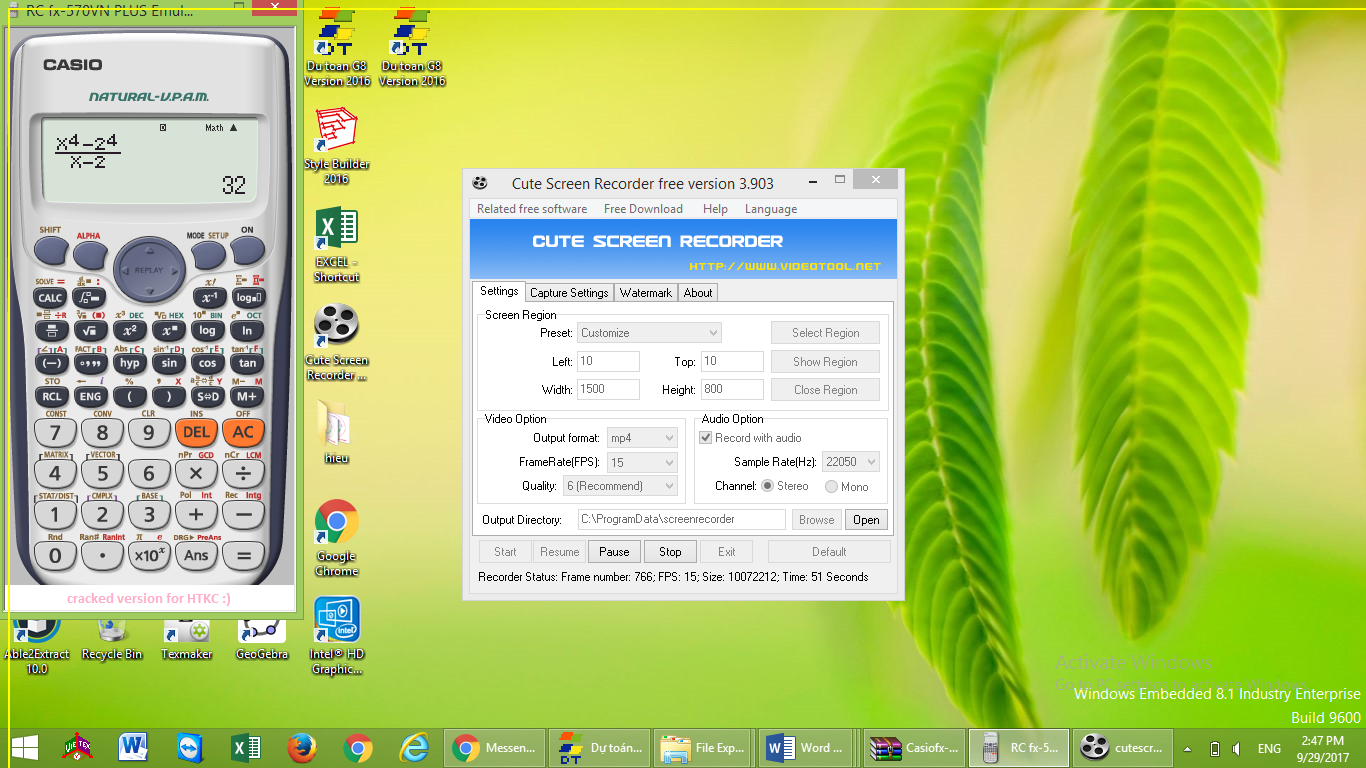


1. **Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có .



**Cách 2:** Cho một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng máy tính cầm tay. Chẳng han với ta có . Do đó chọn đáp án **D.**



1. **Đáp án B.**

**Cách 1:**



Vậy **.**



**Cách 2:** Thay lần lượt các giá trị của vào, rồi tìm cho đến khi gặp kết quả thì dừng lại.



1. **Đáp án C**

Đặt . Rõ ràng là nếu thì không thể hữu hạn. Do đó điều kiện đầu tiên là .



Khi đó và .



Vậy



1. **Đáp án B.**

**Cách 1: .**



**Mà nên**



**Cách 2**: Cho và các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới han. Chẳng hạn với , sử dụng MTCT ta tính được . Từ đó chọn đáp án đúng là B.



1. **Đáp án D.**

**Cách 1:**



**Lại có**



Vậy .



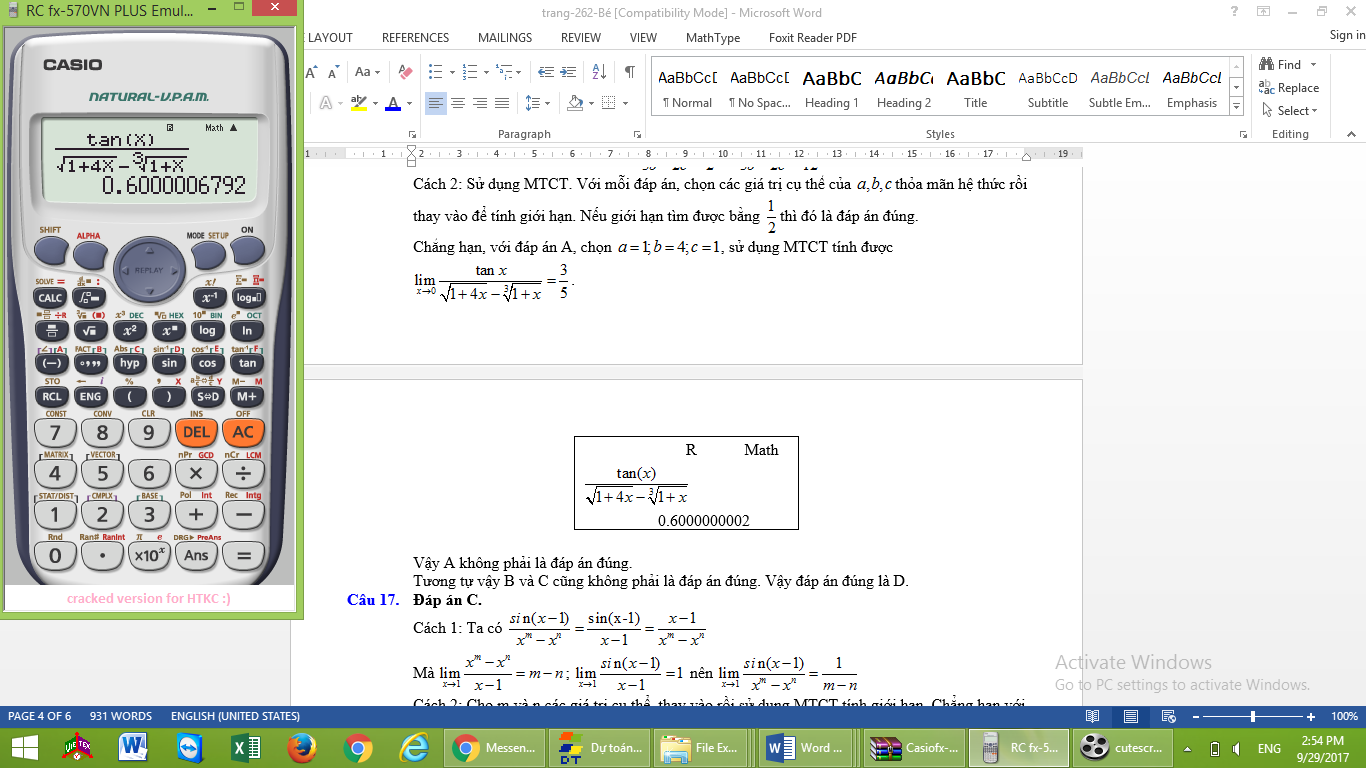
Do đó hệ thức liên hệ giữa là



Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của thỏa mãn hệ thức rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng thì đó là đáp án đúng.



Chẳng hạn, với đáp án A, chọn , sử dụng MTCT tính được .



Vậy A không phải là đáp án đúng.

Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng. Vậy đáp án đúng là D.

1. **Đáp án C.**

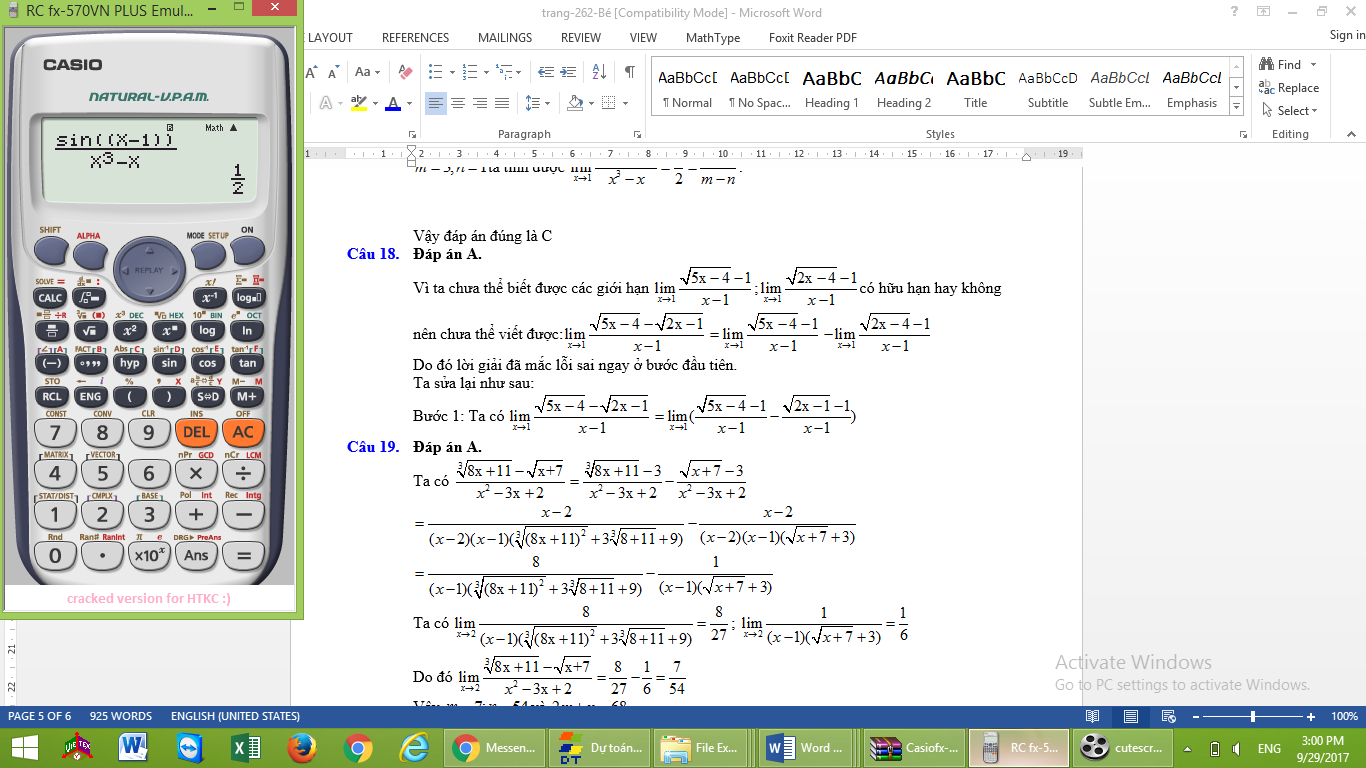
Cách 1: Ta có



Mà ; nên



Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn. Chẳng hạn với ta tính được .



Vậy đáp án đúng là C

1. **Đáp án A.**

Vì ta chưa thể biết được các giới hạn ;có hữu hạn hay không nên chưa thể viết được:



Do đó lời giải đã mắc lỗi sai ngay ở bước đầu tiên.

Ta sửa lại như sau:

Bước 1: Ta có



1. **Đáp án A.**

Ta có



Ta có ;



Do đó



Vậy và .



1. **Đáp án C.**

Ta có



Sử dụng MTCT ta tính được:

;



nên . Vậy .



Giải tự luận: Đặt thì và



Ta có



Vậy

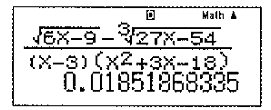


Mặt khác nên



Lưu ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại và tại ta đều thu được kết quả bằng 0 hoặc máy báo lỗi ( tùy theo loại máy). Điều này là do vượt quá khả năng tính toán của máy. Ta thay đổi tính giá trị của hàm số tại thì ta được kết quả như sau





Kết quả hiển thị trên máy như vậy rất khó để ta tìm ra giới hạn chính xác của hàm số. Tuy nhiên nếu phân tích kĩ một chút rồi biến đổi như trong lời giải trên thì ta vẫn có thể tìm ra đáp án đúng chỉ bằng MTCT.

1. **Đáp án A**

Bài tập này có dạng tương tự như bài tập trên. Bằng MTCT, không khó để tìm ra đáp án đúng là **A.** Tuy nhiên nếu giải tự luận thì có một số vấn đề cần bàn. Đặt thì và



Ta có



Vậy



Ta thấy sau khi đổi biến cho gọn, ta thêm bớt tử với hàng số 1 rồi tách ra thành hai phân thức và nhân chia liên hợp mà không thêm bớt đa thức. Vậy khi nào thì thêm bớt hằng số, khi nào thì thêm bớt với đa thức? Quý độc giả hãy nghiên cứu kĩ hai bài tập trên và tự rút ra nhận xét.

1. **Đáp án D**

**Ta có**



1. **Đáp án C**



1. **Đáp án C**

Ta có và



Vậy nên không tồn tại.



1. **Đáp án B**



Dạng 3: Giới hạn vô định dạng



1. **Đáp án B**

**+ +**



**+ +**



1. **Đáp án C**

**+ +**



**+ +**



1. **Đáp án B**

**+ +**



**+ +**



1. **Đáp án C**



1. **Đáp án C**

Ta có



Do đó



1. **Đáp án A**



Do đó



1. **Đáp án D**

**+ + .**



**+ +**



1. **Đáp án D**

**+ Ta có**



+



+



1. **Đáp án B**

**+**



**+**



**+**



1. **Đáp án A**

**+**



**+ (do ).**



**+**



**Dạng 4: Giới hạn vô định dạng**



1. **Đáp án D**

Cách 1: Ta có



Do đó



Vậy nên không tồn tại.



Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn. Từ đó ta tìm được đáp án đúng là **D.**



1. **Đáp án C**

**+**



**+**



**+**



**+**



1. **Đáp án B**

**+**



**+**



**+**



**+**



1. **Đáp án A**

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt thì và



Do đó



1. **Đáp án C**

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt thì**và**



**.**



Do đó:



**Dạng 5: Dạng vô định**



1. **Đáp án B**

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của rooif so sánh với đáp án. Chẳng hạn ta có



Cách 2:



Do đó



Lưu ý:



1. **Đáp án B**

Theo câu 41, ta có



Lại có Để có giới hạn tại điểm thì



1. **Đáp án A**

Ta có Mà nên để là hữu hạn thì điều kiện cần là



Thật vậy, khi Nên



Lưu ý: hữu hạn



1. **Đáp án B**

Cách 1: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn. Đến ý B ta được giới hạn bằng . Vậy đáp án đúng là **B.**



Cách 2: Ta thấy ngay A và C là các giới hạn vô cực, B và D là dạng vô định Ta xét giới hạn ở ý **B.**



Vậy đáp án là **B.**



Bổ sung:

+ +



+



1. **Đáp án D**

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi , ta được Từ đó suy ra đáp án đúng là **D**



Cách 2:



Vì nên để thì



1. **Đáp án D**

Ta có



Do đó nếu thì Vậy Khi đó



Vậy: Do đó



1. **Đáp án C**



Do đó nếu thì Vậy Khi đó ta có



Vậy: DO đó số lớn hơn trong hai số và là số 2. Chọn đáp án **C.**

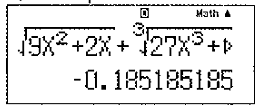


1. **Đáp án C**

Cả bốn giới hạn đều có dạng , tuy nhiên chỉ có giới hạn ở ý C, hệ số trong hai số hạng là khác nhau.Theo kết quả đã biết thì giới hạn ở ý C chắc chắn là . Do đó đáp án đúng là C, Thật vậy:



1. **Đáp án A**

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại ta được kết quả 



Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có Vậy



Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Cách 2:



Suy ra



Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

1. **Đáp án B**

Làm tương tự như câu 49, ta có:



Do đó Suy ra là số chẵn. Vậy là số chẵn. Từ đó loại được đáp án A và C.



Giải hệ được



Giải hệ được (loại).



Vậy B là đáp án đúng.

**HÀM SỐ LIÊN TỤC**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa**

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số xác định trên khoảng và Hàm số được gọi là *liên tục* tại nếu



Hàm số không liên tụctại được gọi là gián đoạn tại điểm đó.



**STUDY TIP**

Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

**Định nghĩa 2**

Hàm số được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.



Hàm số được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** nếu nó liên tục trên khoảng và



Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như được định nghĩa một cách tương tự.



**STUDY TIP**

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó

|  |  |
| --- | --- |
| y  a O b x | y  a  O b x |
| Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng | Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng |

**Định lý 2**

Giả sử và là hai hàm số liên tục tại điểm Khi đó:



a) Các hàm số liên tục tại điểm



b) Hàm số liên tục tại điểm nếu



**STUDY TIP**

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

**Định lí 1**

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực



b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

**STUDY TIP**

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

**Định lí 3**

Nếu hàm số liên tục trên đoạn và thì tồn tại ít nhất một điểm sao cho .



Nói cách khác:

Nếu hàm số liên tục trên đoạn và thì phương trình có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng .



**STUDY TIP**

Một phương pháp chứng minh phương trình có nghiệm trên khoảng :



- Chứng minh hàm số liên tục trên đoạn .



- Chứng minh .



**B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC**

***DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ***

*Phương pháp chung:*

Cho hàm số xác định trên khoảng và . Để xét tính liên tục của hàm số tại ta làm như sau:



* Tính ;



* Tính .



* Nếu thì kết luận hàm số liên tục tại .



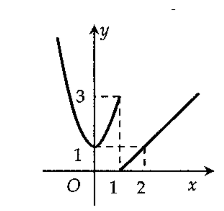
* Nếu không tồn tại hoặcthì kết luận hàm số không liên tục tại.



Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

1. Hàm số có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?





**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án B.**

***Lời giải***

Quan sát đồ thị ta thấy . Vậy nên không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm .



1. Cho hàm số . Hàm số liên tục trên khoảng nào sau đây?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án B.**

***Lời giải***

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng . Vì nên đáp án đúng là **B.**



**STUDY TIP**

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

1. Cho hàm số . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



**A.** liên tục trên .



**B.** liên tục trên các khoảng và .



**C.**  liên tục trên các khoảng và .



**D.**  liên tục trên các khoảng , và .



**Đáp án D.**

***Lời giải***

là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là nên theo Định lí 1, liên tục trên các khoảng , và .



**STUDY TIP**

Thật ra rút gọn ta được nhưng không vì thế mà kết luận trên các khoảng và .



Chú ý: Không được rút gọn biểu thức của hàm số trước khi tìm tập xác định!

1. Cho hàm số . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?



**A.** liên tục tại . **B.** liên tục tại .



**C.** liên tục trên . **D.** liên tục trên .



**Đáp án B.**

***Lời giải***

Hàm số xác định trên . Theo định lí , liên tục trên . Do đó liên tục trên và tại . Vậy đúng suy ra sai .



Thật vậy, vì không tồn tại khoảng nào chứa điểm mà xác định trên nên không thể xét tính liên tục của tại . Do đó không thể khẳng định liên tục tại .



1. Cho hàm số . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



**A.** liên tục trên . **B.** liên tục trên .



**C.** liên tục trên . **D.** liên tục tại .



**Đáp án C.**

***Lời giải***

Trên , nên theo định lí 1, liên tục trên . Vậy chọn đáp án đúng là C.



**Giải thích thêm:**

Ta có , .



Vậy nên không tồn tại.



Do đó không liên tục tại nên sai.



Mặt khác . Vậy nên không liên tục trên . Do đó B sai.



1. Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục tại .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án D.**

***Lời giải***

xác định trên .



Ta có và .



(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để liên tục tại thì .



1. Chon hàm số Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục tại .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án A.**

***Lời giải***

Hàm số đã cho xác định trên .



Ta có .



Tương tự ta có .(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)



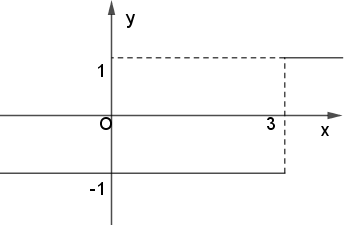
Vậy nên không tồn tại. Vậy với mọi , hàm số đã cho không liên tục tại .



Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi để hiểu rõ hơn.





1. Cho và là các số thực khác . Tìm hệ thức liên hệ giữa và để hàm số liên tục tại .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án B.**

***Lời giải***

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì . Mặt khác . Để hàm số đã cho liên tục tại thì . Vậy đáp án đúng là **B**.



Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của và thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả . Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn ta tìm được nên không thỏa mãn. Với hệ thức ở đáp án B, chọn ta được nên thỏa mãn . Do đó đáp án là B.



**STUDY TIP**

.



1. Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục trên .



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Đáp án C.**

***Lời giải***

Cách 1: Hàm số xác định trên , liên tục trên khoảng .



Ta có .



Nếu thì nên hàm số không liên tục tại .



Nếu thì ta có .



Để hàm số liên tục tại thì .



Với thì khi , liên tục trên .



Tóm lại với thì hàm số đã cho liên tục trên .



Cách 2: Hàm số xác định trên , liên tục trên khoảng .



Ta có .



Thử lần lượt các giá trị từ A dến C thấy thỏa mãn . Do đó chọn đáp án C.



***DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM***

*Phương pháp chung:*

Một phương pháp chứng minh phương trình có nghiệm trên khoảng :



* Chứng minh hàm số liên tục trên đoạn .



* Chứng minh .



* Từ đó kết luận phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng .



Để chứng minh phương trình có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số và sao cho hàm số liên tục trên đoạn và .



1. Cho hàm số xác định trên đoạn . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



**A.** Nếu hàm số liên tục trên đoạn và thì phương trình không có nghiệm trong khoảng .



**B.** Nếu thì phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng .



**C.** Nếu phương trình có nghiệm trong khoảng thì hàm số phải liên tục trên khoảng .



**D.** Nếu hàm số liên tục, tăng trên đoạn và thì phương trình không thể có nghiệm trong khoảng .



**Đáp án D.**

***Lời giải***

A sai. Chẳng hạn xét hàm số . Hàm số này xác định trên đoạn và liên tục trên đó, đồng thời nhưng lại có hai nghiệm thuộc vào khoảng .



B sai . vì thiếu điều kiện liên tục trên đoạn .



C sai. Chẳng hạn xét hàm số . Hàm số này xác định trên đoạn , có nghiệm thuộc vào khoảng nhưng gián đoạn tại điểm , tức là không liên tục trên .



Vậy D đúng. Thật vậy:

* Vì hàm số liên tục, tăng trên đoạn nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn là , giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn là .



* Nếu thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn là một số dương nên không có giá trị nào của trên khoảng làm cho . Do



đó phương trình không thể có nghiệm trong khoảng



+ Nếu do nên suy ra Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn là một số âm nên không có giá trị nào của trên khoảng làm cho . Do đó phương trình không thể có nghiệm trong khoảng .



1. Cho phương trình trong đó là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



**A.** Phương trình vô nghiệm với mọi .



**B.** Phương trình có ít nhất một nghiệm với mọi .



**C.** Phương trình có ít nhất hai nghiệm với mọi .



**D.** Phương trình có ít nhất ba nghiệm với mọi .



***Lời giải***

**Đáp án B.**

Dễ thấy thì phương trình trở thành Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.



***Giải thích thêm:*** Xét bài toán “Chứng minh rằng phương trình luôn có ít nhất một nghiệm với mọi ”. Ta có lời giải cụ thể như sau:



Đặt Ta có:



+ với mọi nên tồn tại một giá trị sao cho .



+ với mọi nên tồn tại một giá trị sao cho .



Vậy mà liên tục trên nên suy ra có ít nhất một nghiệm trên khoảng . Từ đó suy ra ĐPCM.



**STUDY TIP**

Phương trình đa thức bậc lẻ trong đó luôn có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của



1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để phương trình: có nghiệm.



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



***Lời giải***

**Đáp án B.**

Nếu : Phương trình đã cho trở thành



Nếu : theo **STUDY TIP** vừa nêu thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.



Tóm lại với mọi thì phương trình đã cho luôn có nghiệm. Do đó B đúng.



1. Cho phương trình Chọn khẳng định đúng:



**A.** Phương trình có đúng một nghiệm trên khoảng .



**B.** Phương trình có đúng hai nghiệm trên khoảng .



**C.** Phương trình có đúng ba nghiệm trên khoảng .



**D.** Phương trình có đúng bốn nghiệm trên khoảng .

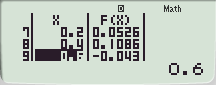


***Lời giải***

**Đáp án D.**

***Cách 1:*** Sử dụng chức năng Table trên MTCT: Start: End: Step: ta được kết quả như sau:









Quan sát kết quả ta thấy giá trị của tại các điểm trong khoảng đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc 4 thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình có đúng bốn nghiệm trên khoảng . Do đó D là đáp án đúng.



***Cách 2:***  Sử dụng chức năng Shift Calc (Solve) của MTCT để tìm nghiệm xáp xỉ của phương trình trong khoảng Tuy nhiên cách này tiềm ẩn nhiều may rủi hơn cách sử dụng chức năng Table như trên.



**STUDY TIP**

Nếu liên tục trên đoạn và đổi dấu khi từ qua thì phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng .



1. Cho phương trình Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



**A.** Phương trình không có nghiệm trong khoảng .



**B.** Phương trình không có nghiệm trong khoảng .



**C.** Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng .



**D.** Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng .



***Lời giải***

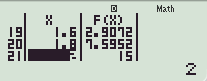
**Đáp án D.**

***Cách 1:*** Sử dụng chức năng Table trên MTCT: Start: End: Step: ta được kết quả như sau:









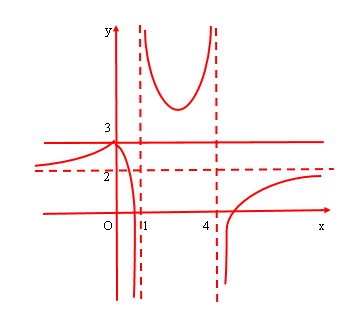
Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng phương trình có ít nhất ba nghiệm, trên khoảng phương trình có ít nhất hai nghiệm. Vậy D là đáp án đúng.



**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

1. Cho hàm số có đồ thị như hình dưới đây:





Chọn khẳng định đúng:

**A.** Hàm số liên tục trên . **B.** Hàm số liên tục trên .



**C.** Hàm số liên tục trên . **D.** Hàm số liên tục trên .



1. Cho hàm số



Chọn khẳng định đúng:

**A.** liên tục tại và không liên tục tại .



**B.** liên tục tại và tại .



**C.** không liên tục tại và liên tục tại .



**D.** liên tục tại và tại .



1. Cho hàm số Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục tại



**A.** Không có giá trị nào của thỏa mãn. **B.** .



**C.** . **D.** .



1. Cho và là các số thực khác Tìm hệ thức liên hệ giữa và để hàm số sau liên tục tại



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho hàm số Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục trên



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



1. Cho hàm số Trong đó và là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại Số nhỏ hơn trong hai số và là



**A.** . **B.** . **C.** 4. **D.** .



1. Cho hàm số Tìm tất cả các giá trị của tham số thực để hàm số liên tục trên .



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** Không có giá trị nào của thỏa mãn.



1. Cho phương trình Chọn khẳng định đúng:



**A.** Phương trình vô nghiệm trên khoảng .



**B.** Phương trình có đúng một nghiệm trên khoảng .



**C.** Phương trình có đúng hai nghiệm trên khoảng .



**D.** Phương trình có ít nhất hai nghiệm trên khoảng .



1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực sao cho phương trình có nghiệm.



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực sao cho phương trình sau có nghiệm



**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**D. HƯỚNG DẪN GIẢI**

1. **Đáp án D.**

Rõ ràng hàm số không liên tục tại và Do đó đáp án đúng là D.



1. **Đáp án A.**

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng và . Do đó hàm số liên tục tại Ta có



+



+



Vậy không tồn tại nên hàm số không liên tục tại Do đó đáp án đúng là A.



1. **Đáp án A.**

Ta có



Do đó . (có thể dùng MTCT để tìm giới hạn một bên).



Vậy hàm số không có giới hạn tại nên không liên tục tại Vậy không có giá trị nào của để hàm số liên tục tại Đáp án đúng là A.



1. **Đáp án C.**

Theo kết quả đã biết thì



Để hàm số liên tục tại thì



Vậy C là đáp án đúng.

Nếu sử dụng MTCT, với mỗi hệ thức ta chọn các giá trị của và thỏa mãn hệ thức, thay vào hàm số tính và Nếu thì đó là hệ thức đúng.



1. **Đáp án B.**

Hàm số đã cho xác định trên , liên tục trên các khoảng và



Theo kết quả đã biết thì (Có thể dùng MTCT để tìm giới hạn trên).



Mặt khác



Để hàm số liên tục trên thì hàm số phải liên tục tại hoặc (Sử dụng chức năng giải phương trình bậc 3 của MTCT). Vậy đáp án đúng là B.



1. **Đáp án B.**

Đặt Ta có



Ta thấy nếu thì nên hàm số không thể liên tục tại



Nếu thì



Hàm số liên tục tại



Vậy và Số nhỏ hơn là .



Do đó đáp án đúng là B.

*Lưu ý:* Để giải phương trình ta có thể làm như sau:

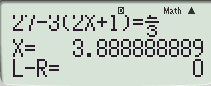


+ Nhập vào màn hình

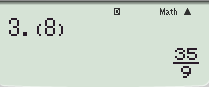


+ Bấm SHIFT CALC (SOLVE), máy báo SOLVE FOR X nhập 1=

Máy hiển thị kết quả



+ Bấm 3.Qs=, máy hiển thị kết quả



Vậy phương trình có nghiệm



1. **Đáp án A.**

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng và .



Ta có



Ta có với mọi Suy ra



Hàm số đã cho liên tục trên hàm số liên tục tại



Vậy đáp án đúng là A.

1. **Đáp án D.**

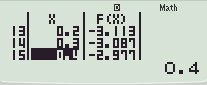
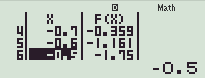
Sử dụng chức năng TABLE của MTCT với

+



+ Start: End: Step:







Ta thấy giá trị tại các điểm đổi dấu hai lần. Suy ra xót ít nhất hai nghiệm trên khoảng Vậy đáp án đúng là D.



1. **Đáp án A.**

+ Nếu thì phương trình đã cho trở thành Đây là một phương trình vô nghiệm.



+ Nếu thì theo kết quả đã biết, phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.



Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì



1. **Đáp án D.**

+ Nếu thì phương trình đã cho trở thành



+ Nếu phương trình đã cho là một đa thưc bậc lẻ (bậc 4035) nên theo kết quả đã biết, phương trình có ít nhất một nghiệm.



Vậy với mọi phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

