**CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**

**Câu 111.** Cho hình chóp  có , , . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A**.  **B.**  **C**.  **D**. 

**Câu 112.** Cho hình hộp chữ nhật  có độ dài đường chéo  Gọi  là diện tích toàn phần của hình hộp đã cho. Tìm giá trị lớn nhất  của 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 113.** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với , cạnh bên  vuông góc với mặt phẳng đáy  và . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B. ** **C.**  **D.** 

**Câu 114.** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều và có . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 115.** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật, . Các cạnh bên bằng nhau và bằng . Tìm thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 116.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi tâm , cạnh bằng   vuông góc với mặt phẳng đáy  và . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 117.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành với . Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 118.** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại . Cạnh bên và vuông góc với mặt phẳng đáy  Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.  C.**  **D.** 

**Câu 119.** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông cân tại  cạnh bên  vuông góc với mặt phẳng đáy  Biết  tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 120.** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại  và  Các cạnh bên  Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 121.** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , cạnh bên   và vuông góc với mặt đáy . Trên cạnh  lấy điểm  và đặt  . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp  biết 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 122.** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với  và mặt bên  là tam giác cân tại  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 123.** Cho hình chóp  có  , tất cả các cạnh còn lại đều bằng . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 124.** **(ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017)** Xét khối tứ diện  có cạnh  và các cạnh còn lại đều bằng . Tìm  để thể tích khối tứ diện  đạt giá trị lớn nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 125.** Trên ba tia  vuông góc với nhau từng đôi, lần lượt lấy các điểm   sao cho  Giả sử  cố định còn  thay đổi nhưng luôn luôn thỏa  Tính thể tích lớn nhất  của khối tứ diện 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 126.** Cho tứ diện  có  đôi một vuông góc với nhau, độ dài các cạnh   . Tính thể tích lớn nhất  khối tứ diện đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 127.** Cho hình chóp  có đáy  hình vuông cạnh  cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy  Trên  lần lượt lấy hai điểm  sao cho   Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp  biết 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 128.** Cho hình hộp chữ nhật  có đáy  là một hình vuông. Biết tổng diện tích tất cả các mặt của khối hộp bằng  Tính thể tích lớn nhất  của khối hộp đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 129.** Cho hình lăng trụ đứng có thể tích  và có đáy là tam giác đều. Khi diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì độ dài cạnh đáy bằng bao nhiêu?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 130.** Cho hình chóp  có , tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng . Với giá trị nào của  thì thể tích khối chóp  lớn nhất?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 131. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017)** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông cân tại ,  vuông góc với đáy, khoảng cách từ  đến mặt phẳng  bằng . Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng  và , tính  khi thể tích khối chóp  nhỏ nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 132.** Cho khối chóp  có đáy là tam giác vuông cân tại  Khoảng cách từ  đến mặt phẳng  bằng   Xác định độ dài cạnh  để khối chóp  có thể tích nhỏ nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 133.** Cho tam giác  đều cạnh . Trên đường thẳng  qua  và vuông góc với mặt phẳng  lấy điểm  sao cho . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên  và . Gọi  là giao điểm của  và . Tìm  để thể tích tứ diện  có giá trị nhỏ nhất.

**A.**  **B. ** **C.**  **D.** 

**Câu 134.** Cho tam giác  vuông cân tại , . Trên đường thẳng qua  vuông góc với mặt phẳng  lấy các điểm  khác phía so với mặt phẳng  sao cho . Tính thể tích nhỏ nhất  của khối tứ diện .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 135.** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại   Cạnh bên  vuông góc với mặt phẳng đáy . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên  và . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 136.** Cho hình hộp chữ nhật  có  góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  bằng  Tìm  để thể tích khối hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 137.** Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng  và độ dài đường chéo bằng  Tính thể tích lớn nhất  của khối hộp chữ nhật đã cho.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 138\*.** Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là . Dựng một hình lập phương có cạnh bằng tổng ba kích thước của hình hộp chữ nhật trên. Biết rằng thể tích hình lập phương luôn gấp 32 lần thể tích hình hộp chữ nhật. Gọi  là tỉ số giữa diện tích toàn phần hình lập phương và diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật. Tìm giá trị lớn nhất  của 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 139\*.** Cho hình chóp  có . Gọi  là trọng tâm tam giác . Mặt phẳng  đi qua trung điểm  của  cắt các cạnh  lần lượt tại . Tính giá trị nhỏ nhất  của biểu thức .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 140\*.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành, thể tích là  Gọi  là trung điểm của cạnh  là điểm nằm trên cạnh  sao cho  mặt phẳng  di động qua các điểm  và cắt các cạnh  lần lượt tại hai điểm phân biệt . Tính thể tích lớn nhất  của khối chóp .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI**

**Vấn đề 5. CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**

**Câu 111.** Gọi  là hình chiếu của  trên mặt phẳng 

Ta có

*C*

*B*

*S*

*A*

*H*

 .

Dấu  xảy ra khi  .

 .

Dấu  xảy ra khi .

Khi đó 

Dấu  xảy ra khi  đôi một vuông góc với nhau.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp là  **Chọn D.**

**Câu 112.** Gọi  là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

Khi đó 

Theo giả thiết ta có 

Từ bất đẳng thức , suy ra 

Dấu  xảy ra  **Chọn D.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 113.** Đặt cạnh  Tam giác vuông  có  Tam giác vuông  có  Diện tích hình chữ nhật  Thể tích khối chóp  Áp dụng BĐT Côsi, ta có  . | 6  *x*  4  *S*  *A*  *B*  *C*  *D* |

Suy ra 

Dấu  xảy ra . Vậy . **Chọn A.**

**Cách 2.** Xét hàm số  trên 

**Câu 114.** Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  Vì  là hình chóp đều .

Đặt  Diện tích tam giác đều 

*S*

*A*

*B*

*C*

*M*

*O*

Gọi  là trung điểm 

Tam giác vuông  có 

Khi đó 

Xét hàm  trên , ta được  **Chọn A.**

**Cách 2.** Ta có 

**Câu 115.** Gọi  Vì  suy ra hình chiếu của  trên mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy 

|  |  |
| --- | --- |
| Đặt  Tam giác vuông  có    Tam giác vuông  có    Khi đó | *O*  6  *D*  *C*  *B*  *A*  *S*  4  *x* |

Dấu  xảy ra  Suy ra  **Chọn B.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 116.** Đặt .  Tam giác vuông  có    Suy ra .  Diện tích hình thoi  Tam giác vuông  có    Thể tích khối chóp | *O*  1  *D*  *C*  *B*  *A*  *S*  1  *x* |



Xét hàm  trên , ta được 

Suy ra . **Chọn D.**

**Cách 2.** Áp dụng BDT Côsi, ta có



**Câu 117.** Do  nên hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, do đó tứ giác  là hình chữ nhật. Gọi , suy ra .

|  |  |
| --- | --- |
| Đặt  Ta có    Tam giác vuông  có    Khi đó | *H*  *D*  *C*  *B*  *A*  *S* |

 **Chọn A.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 118.** Đặt  Suy ra  Diện tích tam giác  Khi đó  **Chọn A.** | *C*  *B*  *A*  *S* |
| **Câu 119.** Giả sử  Suy ra  Diện tích tam giác  Khi đó | 1  *x*  *x*  *S*  *A*  *B*  *C* |

Xét hàm  trên , ta được . **Chọn D.**

**Cách 2.** Ta có 

**Câu 120.** Gọi  là trung điểm của  Suy ra  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  Theo giả thiết, ta có  suy ra  là hình chiếu của  trên mặt phẳng 

|  |  |
| --- | --- |
| Đặt  Suy ra  Tam giác vuông  có  Diện tích tam giác vuông  Khi đó  **Chọn A.** | *I*  *C*  *B*  *A*  *S* |
| **Câu 121.** Từ  Diện tích mặt đáy  Thể tích khối chóp | *a*  *a*  *x*  *y*  *M*  *D*  *C*  *B*  *A*  *S* |

Xét hàm  trên , ta được .

Suy ra . **Chọn B.**

**Câu 122.** Gọi  là trung điểm của 

|  |  |
| --- | --- |
| Mà  Giả sử .  Suy ra  Tam giác vuông  có  Khi đó | *S*  *A*  *B*  *C*  *D*  *H* |

 **Chọn D.**

**Câu 123.** Ta có tam giác  và  là những tam giác đều cạnh bằng .

Gọi  là trung điểm . Trong tam giác , kẻ . 

Ta có

●  là đường cao của tam giác đều 

● . 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Từ và , suy ra .  Diện tích tam giác đều  là  Khi đó    Dấu  xảy ra  **Chọn B.** | *N*  *H*  *C*  *B*  *A*  *S*  *x* | |
| **Câu 124.** Hình vẽ.  Cách làm tương tự như bài trên.  Tam giác  đều cạnh bằng  lớn nhất . Khi đó  vuông.  Trong tam giác vuông cân , có    **Chọn A.** | | *N*  *H*  *C*  *D*  *B*  *A*  *x* |

**Câu 125.** Từ giả thiết ta có 

Do  vuông góc từng đôi nên

Dấu  xảy ra  **Chọn C.**

**Câu 126.** Đặt  Ta có 

*c*

*b*

*a*

*z*

*y*

*x*

*S*

*A*

*B*

*C*

Khi đó 



Dấu  xảy ra khi  **Chọn D.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 127.** Thể tích khối chóp  là  Ta có    Mặt khác | *N*  *S*  *A*  *B*  *C*  *D*  *M* |

Dấu  xảy ra  Suy ra . **Chọn B.**

**Câu 128.** Đặt  là độ dài cạnh của hình vuông đáy,  là chiều cao của khối hộp với 

Theo giả thiết ta có 

Do 

Khi đó thể tích của khối hộp .

Xét hàm  trên , ta được 

**Chọn D.**

**Câu 129.** Gọi  là chiều cao lăng trụ;  là độ dài cạnh đáy.

Theo giả thiết ta có .

Diện tích toàn phần của lăng trụ: .

Áp dụng BĐT Côsi, ta có 



Dấu  xảy ra khi  **Chọn A.**

**Câu 130.** Gọi  là tâm của hình thoi . 

Theo bài ra, ta có  

Từ  và , ta có  vuông tại .

Suy ra  và 

*O*

*S*

*A*

*B*

*C*

*D*

*H*

Diện tích hình thoi 

Ta có , suy ra hình chiếu vuông góc  của đỉnh  trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

Trong tam giác vuông , ta có 

Khi đó 

Suy ra  Dấu  xảy ra  **Chọn C.**

**Câu 131.** Gọi  là trung điểm của , kẻ  

Tam giác  cân suy ra  Mà .

Suy ra  

Từ  và , suy ra  nên 

*H*

*C*

*B*

*A*

*S*

*M*

Tam giác vuông  có 

Tam giác vuông  có 

Tam giác vuông cân  

Diện tích tam giác 

Khi đó 

Xét hàm , ta được  Suy ra 

Dấu  xảy ra khi và chỉ khi  **Chọn B.**

**Cách 2.** Đặt . Khi đó 

Vì  đôi một vuông góc nên 

Suy ra 

Dấu  xảy ra khi và chỉ khi 

**Câu 132.** Gọi  là điểm sao cho  là hình vuông.

Ta có .

Tương tự, ta cũng có . Từ đó suy ra .

|  |  |
| --- | --- |
| Kẻ  Khi đó  Đặt  Trong tam giác vuông  có    Suy ra | *H*  *D*  *S*  *A*  *B*  *C* |

Thể tích khối chóp 

Xét hàm  trên , ta được 

**Chọn B.**

**Câu 133.** Do tam giác  đều cạnh  là trung điểm 

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có  Mặt khác, .  Suy ra  Suy ra  nên  .  Ta có  . | *F*  *E*  *N*  *M*  *B*  *A*  *O* |

Đẳng thức xảy ra khi . **Chọn B.**

**Câu 134.** Đặt  suy ra 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tam giác vuông  có  Diện tích tam giác vuông  Ta có    Dấu  xảy ra khi và chỉ khi . **Chọn D.** | *C*  *A*  *B*  *M*  *N* | |
| **Câu 135.** Đặt  Tam giác vuông  có .  Tam giác  cân tại , có đường cao  suy ra  là trung điểm của  nên .  Tam giác vuông  có    Ta có | | *K*  *H*  *S*  *B*  *A*  *C* |



Xét hàm  trên , ta được  **Chọn A.**

**Câu 136.** Vì  là hình hộp chữ nhật suy ra 

Khi đó  là hình chiếu của  trên mặt phẳng 

Suy ra 

Đặt 

*h*

*x*

3

*A*

*B*

*C*

*D*

*A'*

*B'*

*C'*

*D'*

Tam giác vuông  có 

Tam giác vuông  có 

Thể tích khối hộp chữ nhật  là 

Áp dụng BĐT Côsi, ta có 

Dấu  xảy ra  **Chọn B.**

**Câu 137.** Giả sử  là các kích thước của hình hộp chữ nhật.

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật là 

Tổng diện tích các mặt là 

Theo giả thiết ta có 

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của 

⏺ Ta có 

⏺ Ta có 

Khi đó 

Xét hàm số  với  ta được



**Chọn C.**

Nhận xét. Nếu sử dụng  thì sai vì dấu  không xảy ra.

**Câu hỏi tương tự.** Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả ác cạnh bằng  và độ dài đường chéo bằng  Tính thể tích lớn nhất  của khối hộp chữ nhật đã cho. ĐS: 

**Câu 138\*.** Theo giả thiết ta có cạnh của hình lập phương bằng .

● Hình hộp chữ nhật có:  và .

● Hình lập phương có:  và .

Suy ra .

Ta có .

Đặt 

Khi đó 

Ta có 

.

Xét hàm  trên đoạn , ta được 

**Chọn D.**

**Câu 139\*.** Do  là trọng tâm 



Do  đồng phẳng nên 

Áp dụng BĐT bunhiacopxki, ta có



Suy ra . **Chọn C.**

**Cách trắc nghiệm.** Do đúng với mọi hình chóp nên ta sẽ chọn trường hợp đặc biệt    đôi một vuông góc và tọa độ hóa như sau: , ,  và . Suy ra .

Khi đó mặt phẳng  cắt  lần lượt tại 

 và 

Vì .

Ta có 

**Câu 140\*.** Gọi 

Vì mặt phẳng  di động đi qua các điểm  và cắt các cạnh  lần lượt tại hai điểm phân biệt  nên ta có đẳng thức 



*Q*

*P*

*N*

*M*

*S*

*D*

*A*

*B*

*C*

Ta có 

Xét hàm  trên đoạn , ta được  **Chọn B.**