**ỨNG DỤNG KHOẢNG CÁCH**

**ĐỂ TÍNH GÓC TRONG HÌNH KHÔNG GIAN LỚP 11**

*Bài toán tính góc trong không gian là dạng bài quan trọng trong chương trình toán lớp 11. Đây cũng là dạng toán thường xuất hiện trong kỳ thi THPT Quốc gia những năm gần đây.*

*Giữa hai bài toán tính góc và tính khoảng cách có mối liên hệ rất chặt chẽ. Bài viết này đề cập đến một trong những ứng dụng của khoảng cách, đó là tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, tính góc giữa hai mặt phẳng trong không gian.*

**I. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

**1. Lý thuyết**

Trong không gian, cho đường thẳng  và mặt phẳng  không vuông góc và không song song với nhau. Gọi . Ta biết rằng:

**

với  là hình chiếu của  trên ,  và , ,  là hình chiếu của  trên .



Từ đó ta có: .

Như vậy việc tính góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  có thể quy về việc tính khoảng cách từ  tới  và tính độ dài .

**2. Ví dụ minh họa**

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành, , , , cạnh bên , . Gọi  là góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng , tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

****

Trong mặt phẳng  kẻ  tại .

Trong mặt phẳng  dựng  tại .

Chứng minh được. Từ đó ta có: .

Trong  có .

.

Ta có: .

Gọi . Ta có .

Gọi . Ta có .

1. Cho hình chóp đều  có . Gọi là trung điểm của cạnh . Tính tan của góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Gọi , ta có  là trung điểm của .

Vì  là hình chóp đều nên .

 là hình vuông cạnh .

có ,  vuông cân tại  

Gọi , . Ta có 

Ta có 

Kẻ  tại  và  tại . Ta chứng minh được: . Khi đó:



Xét  vuông tại  là đường cao nên: .

.

Ta có:  vì .

Từ đó ta có:.

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật, , , , . Gọi  là trọng tâm tam giác ,  là trung điểm của . Góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**



Ta có  nên suy ra được tam giác  đều cạnh .

Gọi  là trung điểm của  thì  nên .

Do đó .

Xét tam giác tam giác vuông  có ,  suy ra .

Vì  nên 

Mà   .

Suy ra .

1. Cho hình hộp  có đáy  là hình chữ nhật cạnh , . Gọi  là trọng tâm tam giác ,  là góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . Giá trị của  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

****

Gọi  là góc tạo bởi đường thẳng  và mặt phẳng ,  là trọng tâm tam giác . Ta có: .

Gọi  là hình chiếu của  lên ,  là hình chiếu của  lên , ta chứng minh được .

Ta có: .

Mà .



.

1. Cho lăng trụ tam giác đều , . Gọi  là trung điểm ,  là góc tạo bởi  và . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **

**Lời giải**



Gọi  là trung điểm ,  là góc giữa  và . Ta có: 

Ta có:

 .

Mặt khác  là trung điểm  nên 

Gọi  là giao điểm của  và , ta có 

Mặt khác 

Suy ra 



.

**II. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG**

 **1. Lý thuyết**

a) Góc giữa hai mặt phẳnglà góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



b) Trong trường hợp 2 mặt phẳng cắt nhau: *“Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm”.*

**c) Ứng dụng khoảng cách để tính góc giữa hai mặt phẳng**

****Gọi  và . Ta có:



Như vậy, bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng có thể quy về bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

**2. Ví dụ minh họa**

1. Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Côsin của góc giữa hai mặt phẳng và  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Gọi .

Ta có:  và .

Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên .

Khi đó: .

.

Từ đó ta có: .

Ta có:  và 

Suy ra: .

1. Cho hóp chóp đều có tất cả các cạnh bằng . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và  là trọng tâm tam giác  Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng  và . Giá trị của  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Dựng đường cao  của hình chóp.

Gọi .

Ta có:  song song với .

Khi đó:  thẳng hàng và .

Ta có: .

Dễ thấy tam giác  vuâng cân tại  nên .

Chứng minh được: 

Trong tam giác  dựng hai đường cao 

Ta có: 

Do đó:

.



1. Cho khối chóp  có đáy là hình bình hành, , cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy. Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh . Tính góc giữa hai mặt phẳng  và .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Ta có: .

Gọi  là trung điểm của . Ta có: .

Dễ dàng chứng minh được  đồng quy tại . Như vậy  là trung điểm của ,  là trung điểm của .

Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng  và . Ta có: .



Hạ .

.

.

Ta có .

.

, , .

Mặt khác .

Vậy .

1. Cho hình hộp chữ nhật  có  Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng  và  Tính 

**A.  B.  C.  D. **

**Lời giải**



Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên  và  là hình chiếu vuông góc của  lên mp. Khi đó:



Ta tính được 

Ta có:  với 

Trong tam giác : 

Đặt  ta có 



Do  

Trong tứ diện : 

Vậy, 

1. Cho hình lăng trụ đứng  có , . Gọi  là trung điểm của . Tính sin của góc giữa mặt phẳng  và mặt phẳng .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

****

Gọi . Dễ thấy  là trung điểm của .

Ta có .

\* Tính 





Do đó từ suy ra 

\* Tính 

Ta có



Do đó 

Vậy từ suy ra .

**III. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

1. Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh đáy bằng , với  là tâm của đáy. Gọi  là trung điểm cạnh ,  là góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Gọi  là trung điểm của . Do  là hình chóp tứ giác đều nên  và tứ giác  là hình vuông.

Trong , gọi , , .

Ta có:  (1)

Do  nên  (2)

 là đường trung bình của  và .

Suy ra .

.

Ta có  là tứ diện vuông nên

 (3).

Thay (2), (3) vào (1) được .

1. Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi cạnh ,  và . Hình chiếu vuông góc của điểm  lên mặt phẳng  trùng với trọng tâm của tam giác . Gọi  là góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**



Gọi  là trọng tâm của tam giác . Theo giả thiết ta có .

Gọi  là góc tạo bởi đường thẳng  và mặt phẳng .

Ta có .

Kẻ  tại *P.*

+)  đều .

+) .

+) .

Do  là hình thoi cạnh  và  nên tam giác  là tam giác đều .

Từ đó ta có: .

1. Cho lăng trụ đều  có tất cả các cạnh bằng . Tính côsin của góc giữa mặt phẳng và mặt phẳng .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

****

Ta có .

Gọi  là góc giữa mặt phẳng  và , khi đó .

Gọi  là trung điểm của . Ta có  mặt khác .

Suy ra . Do đó: .

Trong mặt phẳng  kẻ . Tam giác  cân tại  có  suy ra .

Suy ra . Vậy .

1. Cho lăng trụ đều  có cạnh đáy bằng , cạnh bên bằng . Gọi  là trung điểm của . Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng  và .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

****

Gọi  là tâm hình chữ nhật  và  là giao điểm của  và .

Ta có .

Gọi  là góc giữa 2 mặt phẳng  và . Khi đó: .

Gọi , suy ra  là trung điểm của    vuông tại    .

Dựng  .

Từ  và  suy ra  .

Tam giác  có ,  .

 .

Ta có: ;  .

 .