**§4 TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ**

**A. TÓM TẮT Lý THUYẾT :**

**I.TRỤC TỌA ĐỘ:**

**1. Định nghĩa:** Trục tọa độ (Trục , hay trục số ) là một đường thẳng trên đó ta đã xác định một điểm O và một vectơ đơn vị ( tức là )



Hình 1.30

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ* , vec tơ  được gọi là *vectơ đơn vị* của trục tọa độ. Kí hiệu (O ; ) hay  hoặc đơn giản là 

**2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục:**

+ Cho vec tơ  nằm trên trục (O ; ) thì có số thực a sao cho  với . Số a như thế được gọi là tọa độ của vectơđối với trục (O ; )

+ Cho điểm M nằm trên (O ; ) thì có số m sao cho . Số m như thế được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục (O ; )

Như vậy tọa độ điểm M là trọa độ vectơ 

**3. Độ dài đại số của vec tơ trên trục :**

Cho hai điểm A, B nằm trên trục  thì tọa độ của vectơ  kí hiệu là  và gọi là độ dài đại số của vectơ  trên trục 

Như vậy 

Tính chất :

+ 

+ 

+ 

**II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ**

|  |  |
| --- | --- |
| **1. Định nghĩa:** Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc  và  với hai vectơ đơn vị lần lượt là . Điểm O gọi là *gốc tọa độ*,  gọi là *trục hoành* và  gọi là *trục tung.*  Kí hiệu  hay | Hình 1.31 |

**2. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ .**

+ Trong hệ trục tọa độ  nếu  thì cặp số  được gọi là tọa độ của vectơ , kí hiệu là  hay .

x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của vectơ 

+ Trong hệ trục tọa độ , tọa độ của vectơ  gọi là tọa độ của điểm M, kí hiệu là  hay . x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của điểm M.

*Nhận xét:* (hình 1.31) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên  và  thì 

Như vậy  hay 

**3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.**

+ Cho  và M là trung điểm AB. Tọa độ trung điểm  của đoạn thẳng AB là 

+ Cho tam giác  có . Tọa độ trọng tâm  của tam giác  là  và 

**4. Biểu thứ tọa độ của các phép toán vectơ.**

Cho  ; và số thực k. Khi đó ta có :

1) 

2) 

3) 

4)  cùng phương () khi và chỉ khi có số k sao cho 

5) Cho  thì 

**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

* **DẠNG 1: Tìm tọa độ của một điểm; tọa độ vectơ; độ dài đại số của vectơ và chứng minh hệ thức liên quan trên trục (O ;** **)**

**1. Phương pháp giải**.

Sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

* Điểm M có tọa độ 
* Vectơ  có độ dài đại số là 
* Nếu a, b lần lượt là tọa độ của A, B thì 
* Các tính chất

+ 

+ 

+ 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Trên trục tọa độ (O ; ) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là

–2 ; 1 và 4.

a) Tính tọa độ các vectơ 

b) Chứng minh B là trung điểm của AC.

***Lời giải:***

a) Ta có 

b) Ta có  suy ra B là trung điểm AC

***Ví dụ 2:*** Trên trục tọa độ (O; ) cho 4 điểm  bất kỳ. Chứng minh 

***Lời giải:***

Cách 1: Giả sử tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d.

Ta có 



Cộng vế với vế lại ta được 

Cách 2: 



**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.80.**Trên trục tọa độ (O; ) Cho 2 điểm A và B có tọa độ lần lượt và .

a)Tìm tọa độ điểm M sao cho 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b)Tìm tọa độ trung điểm I của AB

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c)Tìm tọa độ điểm N sao cho 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.80:** a)  b)  c) 

**Bài 1.81**.Trên trục (O ; ) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là a ; b ; c . Tìm điểm I sao cho : 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.81:** 

**Bài 1.82**. Trên trục tọa độ (O ; ) cho 4 điểm  có tọa độ lần lượt là  và thỏa mãn hệ thức. Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

**Bài 1.82:** Ta có 



* **DẠNG 2: Tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ trên mặt phẳng** **.**

**1. Phương pháp.**

* Để tìm tọa độ của vectơ  ta làm như sau

Dựng vectơ . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên . Khi đó  với 

* Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ 
* Nếu biết tọa độ hai điểm  suy ra tọa độ  được xác định theo công

thức 

*Chú ý:*  nếu H nằm trên tia (hoặc  ) và  nếu H nằm trên tia đối tia (hoặc )

**2. Các ví dụ:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong mặt phẳng tọa độ . Cho điểm .  Tìm tọa độ của các điểm | Hình 1.32 |

a)  đối xứng với M qua trục hoành

**A.**  đối xứng với M qua trục hoành suy ra 

**B.**  đối xứng với M qua trục hoành suy ra 

**C.**  đối xứng với M qua trục hoành suy ra 

**D.**  đối xứng với M qua trục hoành suy ra 

b)  đối xứng với M qua trục tung

**A.**  đối xứng với M qua trục tung suy ra 

**B.**  đối xứng với M qua trục tung suy ra 

**C.**  đối xứng với M qua trục tung suy ra 

**D.**  đối xứng với M qua trục tung suy ra 

c)  đối xứng với M qua gốc tọa độ

**A.**  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra 

**B.**  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra 

**C.**  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra 

**D.**  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra 

***Lời giải:***

(hình 1.32)

a)  đối xứng với M qua trục hoành suy ra 

b)  đối xứng với M qua trục tung suy ra 

c)  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra 

***Ví dụ 2:*** Trong hệ trục tọa độ (O; ;  ), cho hình vuông  tâm I và có . Biết điểm B thuộc trục (O; ) và  cùng hướng với . Tìm tọa độ các vectơ  và 

**A.**  **B.**

**C.**  **D.** Cả A, B, C đều đúng

***Lời giải:***

(hình 1.33)

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ

|  |  |
| --- | --- |
| (hình bên)  Vì điểm  suy ra  Do đó  Vậy  và | Hình 1.33 |

***Ví dụ 3:*** Trong mặt phẳng tọa độ . Cho hình thoi  cạnh a và . Biết A trùng với gốc tọa độ O, C thuộc trục  và . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi 

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

|  |  |
| --- | --- |
| ***Lời giải:***  (hình 1.34)  Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ  Gọi I là tâm hình thoi ta có    Suy ra | Hình 1.34 |

**3. Bài tập luyên tập.**

**Bài 1.83**: Trong hệ trục tọa độ (O; ;  ), Cho tam giác đều  cạnh a, biết O là trung điểm BC,  cùng hướng với ,  cùng hướng .

a) Tính tọa độ của các đỉnh của tam giác 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**Cả A, B, C đều đúng

b) Tìm tọa độ trung điểm E của AC

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.83:** a) 

b) 

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm 

**Bài 1.84:** Trong hệ trục tọa độ (O; ;  ), Cho hình thoi  tâm O có . Biết  và  cùng hướng,  và  cùng hướng.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

b) Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm tam giác 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.84:** a) 

b) 

**Bài 1.85:** Cho hình bình hành  có  và chiều cao ứng với cạnh AD = 3, . Chọn hệ trục tọa độ  sao cho  và  cùng hướng,  . Tìm Khẳng định sai?

**A.** 

**B.**

**C.**

**D.**

***Lời giải:***

**Bài 1.85:** Kẻ 



**Bài 1.86:** Cho lục giác đều . Chọn hệ trục tọa độ (O; ;  ), trong đó O là tâm lục giác đều , cùng hướng với ,  cùng hướng . Tính tọa độ các đỉnh lục giác đều , biết cạnh của lục giác là 6 .

**A.** 

, **B.** 

**C.** 

**D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.86:** ĐS: 



* **DẠNG 3: Xác định tọa độ điểm, vectơ liên quan đến biểu thức dạng** 

**1. Phương pháp.**

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ

Với  ; và số thực k, khi đó  và 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Trong mặt phẳng , cho 3 vecto: 

Tìm tọa độ của vectơ sau

a)  với  và 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b)  và 

**A.**  **B.** 

**C.** Ca A, B đều đúng **D.** Cả A, B đều sai

***Lời giải:***

a) Ta có  suy ra 

b) Ta có suy ra ;

 và suy ra



***Ví dụ 2:*** Cho . Tìm tọa độ của vectơ  biết

a) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Ta có 

Suy ra 

b) Ta có 

Suy ra 

***Ví dụ 3:*** Cho ba điểm  và 

a) Xác định tọa độ vectơ 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Tìm điểm M sao cho 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Ta có  suy ra 

b) Gọi , ta có 

Suy ra 

Do đó 

Vậy 

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.87**.Cho các vecto .

Tìm tọa độ vectơ  biết

a) 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.87:** ĐS: a)  b) 

**Bài 1.88**. Cho ba điểm  và 

a) Tìm tọa độ vectơ 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Tìm điểm M sao cho 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.88:** ĐS: a)  b)

* **DẠNG 4: Xác định tọa độ các điểm của một hình**

**1. Phương pháp.**

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng  suy ra 

+ G trọng tâm tam giác  suy ra 

+ 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác  có .

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Xác định trọng tâm tam giác 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Tìm điểm D sao cho  là hình bình hành

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) C là trung điểm của MB suy ra 

và 

Vậy 

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

 và 

Vậy 

c) Gọi 

Ta có:  là hình bình hành suy ra

.

Vậy 

***Ví dụ 2:*** Trong mặt phẳng tọa độ  cho  và . Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác  là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác . Tìm tọa tâm O của hình bình hành .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

Vì I là trọng tâm tam giác  nên





suy ra 

Tứ giác là hình bình hành suy ra



Điểm O của hình bình hành  suy ra O là trung điểm AC do đó



**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.89:** Cho ba điểm 

1. Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác 

**A.**  **B.** 

**C.**Cả A, B đều đúng **D.** Cả A, B đều sai

1. Tìm tọa độ điểm D sao cho  là hình bình hành

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.89:** a) Trung điểm BC là , trọng tâm của tam giác  là 

b) Tứ giác  là hình bình hành 

**Bài 1.90:** Trong mặt phẳng tọa độ  cho . Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác  là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa tâm O của hình bình hành .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.90:** Do  là trung điểm của CD nên đặt 

Tứ giác  là hình bình hành 

Vậy 

**Bài 1.91:** Cho tam giác  có , đỉnh C nằm trên  và trọng tâm G nằm trên trục . Tìm tọa độ đỉnh C

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.91:** Từ giả thiết ta có 

G là trọng tâm tam giác nên 

Vậy 

**Bài 1.92:** Cho tam giác  có  lần lượt là trung điểm của . Biết . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**Cả A, B, C đều đúng

***Lời giải:***

**Bài 1.92:** Ta có 

N là trung điểm AC suy ra 

M là trung điểm BC suy ra 

**Bài 1.93:** Cho tam giác có . A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A.

a) Tìm tọa độ các điểm A', B', C'

**A.**  **B.** 

**C.** **D.**Cả A, B, C đều đúng

b) Chứng minh các tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

**Bài 1.93:** a) A' là điểm đối xứng của A qua B suy ra B là trung điểm của AA' do đó . Tương tự 

b) Trọng tâm của tam giác  và  có cùng tọa độ là 

* **DẠNG 5: Bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vectơ. Phân tích một vectơ qua hai vectơ không cùng phương.**

**1. Phương pháp.**

* Cho  ; . Vectơ cùng phương với vectơ () khi và chỉ khi có số k sao cho 

*Chú ý:* Nếu  ta có  cùng phương 

* Để phân tích  qua hai vectơ  không cùng phương, ta giả sử . Khi đó ta quy về giải hệ phương trình 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho 

a) Khẳng định nào sau đây đúng

**A.** hai vectơ  không cùng phương

**B.** hai vectơ cùng phương

**C.** hai vectơ  song song

**D.** hai vectơ  ngược chiều

b) Phân tích vectơ  qua 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Ta có  và  không cùng phương

b) Giả sử . Ta có 

Suy ra 

***Ví dụ 2:*** Cho  và . Tìm m để hai vecto  cùng phương.

**A.**  và  **B.**  và 

**C.**  và  **D.**  và 

***Lời giải:***

+ Với : Ta có 

Vì  nên hai vectơ không cùng phương

+ Với : Ta có cùng phương khi và chỉ khi



Vậy với  và  là các giá trị cần tìm.

***Ví dụ 3:*** Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba điểm .

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

d) Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Ta có . Vì suy ra và  không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành 

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra và  không cùng phương

Mặt khác  do đó 

Vậy 

c) Vì E thuộc đoạn BC và  suy ra 

Gọi  khi đó 

Do đó 

Vậy 

d) Gọi  là giao điểm của DE và AC.

Do đó  cùng phương suy ra  (1)

 cùng phương suy ra  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  và 

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là 

**3. Bài tập luyên tập.**

**Bài 1.94**. Trong mặt phẳng tọa độ  cho 4 điểm  và .

a) Bộ ba trong 4 điểm trên bộ nào thẳng hàng

**A.** A, B, D thẳng hàng **B.** A, B,C thẳng hàng

**C.** A, C, D thẳng hàng **D.** C, B, D thẳng hàng

b) Chứng minh  và  không cùng phương

c) Phân tích  qua  và 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.94:** a) A, B, D thẳng hàng

b) . Vì và  không cùng phương

c) . 

**Bài 1.95**. Trong mặt phẳng tọa độ  cho 4 điểm  và . Tìm giao điểm của 2 đường thẳng AC và BD

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.95:** Gọi  là giao điểm AC và BD suy ra  cùng phương và  cùng phương

Mặt khác

 suy ra  (1)

suy ra  thế vào (1) ta có 

Vậy  là điểm cần tìm.

**Bài 1.96**. Cho 

a) Chứng minh  và  không cùng phương

b) Đặt . Tìm  sao cho  cùng phương với  và  .

**A.**  hoặc  **B.**  hoặc 

**C.**  hoặc  **D.**  hoặc 

***Lời giải:***

**Bài 1.96:**  b) Ta có 



 cùng phương với  và  khi và chỉ khi có sô  sao cho 

Do đó 

Suy ra  hoặc 

**Bài 1.97**. Cho tam giác  có . Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.97:** Ta có

Gọi 

Suy ra  hoặc 

Vậy có hai điểm thỏa mãn 

**Bài 1.98**. Cho ba điểm 

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

b) Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.98:** a) Ta có . Vì  và  không cùng phương

b) Ta có 

Do đó 

c) Ta có . Gọi  là giao điểm của AD và BG.

Do đó  cùng phương suy ra 

 cùng phương suy ra tồn tại 

Từ đó 

**Bài 1.99**. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

a)  và 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b)  và 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.99.** a) Dễ thấy điểm A, B nằm ở hai phía với trục hoành

Ta có . Dấu bằng xảy ra  cùng phương với 

Suy ra 

b) Dễ thấy A, B cùng phía với trục hoành. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trục hoành, suy ra  và 

Ta có . Dấu bằng xảy ra  cùng phương với 

Suy ra 

**Bài 1.100:** Cho hình bình hành  có  và tâm . Biết điểm  nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** Cả A, B, C đều đúng

***Lời giải:***

**Bài 1.100:** I là trung điểm AC nên 

Gọi 



Vì  cùng phương nên 