**§3 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

**A. TÓM TẮT lý thuyẾt**

**1. Định nghĩa:** Tích của vectơ  với số thực  là một vectơ, kí hiệu là , cùng hướng với cùng hướng với  nếu , ngược hướng với  nếu  và có độ dài bằng 

Quy ước:  và 

**2. Tính chất :**



**3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương**

*  cùng phương () khi và chỉ khi có số  thỏa 
* Điều kiện cần và đủ để  thẳng hàng là có số k sao cho 

**4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.**

Cho  không cùng phương . Với mọi vectơ  luôn được biểu diễn  với  là các số thực duy nhất.

**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

* **DẠNG 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.**

**1. Phương pháp giải.**

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựngvectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác đều  cạnh . điểm  là trung điểm . tính độ dài của chúng.

a) 

**A.**a **B.**2a **C.**3a **D.**4a

b) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

d) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

(Hình 1.14)

|  |  |
| --- | --- |
| a) Do  suy ra theo quy tắc ba điểm ta có    Vậy | Hình 1.14 |

b) Vì  nên theo quy tắc trừ ta có 

Theo định lí Pitago ta có



Vậy 

c) Gọi  là trung điểm ,  là điểm đối xứng của  qua  và  là đỉnh của hình bình hành .

Khi đó ta có  suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có 

Gọi  là hình chiếu của  lên 

Vì 

Xét tam giác vuông  ta có 



Ta lại có 

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác  ta có



Vậy 

d) Gọi  là điểm nằm trên đoạn  sao cho ,  thuộc tia  sao cho .

Khi đó 

Do đó 

Ta có , 

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông  ta có



Vậy 

***Ví dụ 2:*** Cho hình vuông  cạnh .

a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

(Hình 1.15)

|  |  |
| --- | --- |
| a) Gọi  là tâm hình vuông.  Theo quy tắc ba điểm ta có    Mà  nên  Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M | Hình 1.15 |

b) Lấy điểm  trên tia sao cho  khi đó

 do đó 

Mặt khác 

Suy ra 

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.26.** Cho tam giác đều  cạnh . Gọi điểm ,  lần lượt là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

|  |  |
| --- | --- |
| ***Lời giải:***  **Bài 1.26:** a) Theo quy tắc ba điểm ta có    Suy ra | Hình |

b) Theo quy tắc trừ ta có 



c) Gọi  là điểm đối xứng của  qua , điểm  là là đỉnh của hình bình hành , theo quy tắc hình bình hành ta có 

Gọi  là hình chiếu của  lên .

Vì 





Áp dụng định lí Pitago ta có



Suy ra .

d) Lấy các điểm  sao cho 

Suy ra 

Do đó 

**Bài 1.27:** Cho hình vuông  cạnh .

a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.27:** Gọi  là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có



Mà  nên 

Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) 

* **DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.**

**1. Phương pháp giải.**

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

* Các tính chất phép toán vectơ
* Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
* Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB

M là trung điểm đoạn thẳng AB(Với O là điểm tuỳ ý)

* Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC++=

G là trọng tâm của tam giác ABC++=(Với O là điểm tuỳ ý)

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tứ giác . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Khẳng định nào sau đây đúng?

a)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

c) với M là điểm bất kì

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

|  |  |
| --- | --- |
| ***Lời giải:***  (Hình 1.16)  a) Theo quy tắc ba điểm ta có    Tương tự | Hình 1.16 14 |

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên 

Vậy  đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có 

Mặt khác O là trung điểm IJ nên 

Suy ra  đpcm

c) Theo câu b ta có  do đó với mọi điểm M thì



 đpcm

***Ví dụ 2:*** Cho hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G. Gọi  lần lượt là trọng tâm tam giác . Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

Vì  là trọng tâm tam giác  nên 

Tương tự  lần lượt là trọng tâm tam giác  suy ra

 và 

Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có



Mặt khác hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G nên

 và 

Suy ra 

***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chọn khẳng định đúng?

a)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b)

**A.** **B.**

**C.** **D.**

c)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Lời giải:***  Hình 1.17)  a) Dễ thấy  nếu tam giác  vuông  Nếu tam giác không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó  (vì cùng vuông góc với AC)  (vì cùng vuông góc với AB) | Hình 1.17 |

Suy ra  là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì  (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

b) Theo câu a) ta có



 đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác  nên 

Mặt khác theo câu b) ta có 

Suy ra 

***Ví dụ 4:*** Cho tam giác  với  và có trọng tâm G. Gọi  lần lượt là hình chiếu G lên cạnh .

Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

(hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho  và dựng hình bình hành 



Hình 1.18

Ta có 

 (\*)

Ta có , mặt khác  là trọng tâm tam giác  nên  suy ra 

Vậy 

Ta có  và  (góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)

Suy ra 

 và 

Ta có  thẳng hàng do đó  là trung điểm của 

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có



Vậy .

***Ví dụ 5:*** Cho tam giác  với các cạnh . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

|  |  |
| --- | --- |
| *Cách 1:* (Hình 1.19)Gọi D là chân đường phân giác góc A  Do D là đường phân giác giác trong góc A nên ta có | Hình 1.19 |

Do I là chân đường phân giác nên ta có :



Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

*Cách 2*: (hình 1.20)Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tai B’;song song với BI cắt AI tại A’

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có  (\*)  Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :    Tương tự : | Hình 1.20 |

Từ (1) và (2) thay vào (\*) ta có :



**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.28:** Cho tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của .Chọn khẳng định đúng

a)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b) với O là điểm bất kỳ.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

|  |  |
| --- | --- |
| ***Lời giải:***  **Bài 1.28:**  (hình 1.49)  a)  b) | Hình 1.49 |

**Bài 1.29**: Cho tam giác ABC .Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác. Chọn khẳng định đúng?

a),

**A.**  **B.** 

**C.**Cả A, B đều đúng  **D.**Cả A, B đều sai

b) với M là trung điểm của BC

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.29:** a) Ta có 



b) 

**Bài 1.30:** Cho tam giác  có điểm M thuộc cạnh BC. Chọn khẳng định đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.30:** Ta có 



**Bài 1.31:** Cho hai hình bình hành  và  có chung đỉnh A. Chọn khẳng định đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.31:** Ta có:



**Bài 1.32:** Cho tam giác  đều tâm O. M là điểm tùy ý trong tam giác. Hạ MD, ME, MF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chọn khẳng định đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.32:** (hình 1.50) Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh Δ ABC, các đường thẳng này lần lượt cắt tại các điểm như hình vẽ. Dễ thấy ta có các tam giác đều  và các hình bình hành .



Hình 1.50

Ta có: , , .

Cộng từng vế 3 đẳng thức và nhóm ta được: 

**Bài 1.33:** Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Một đường thẳng  là đường thẳng bất kỳ. Gọi G là trọng tâm  và A’, B’, C’, G’ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C, G lên đường thẳng .Chọn khẳng định đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Bài 1.34:** Cho  vectơ đôi một khác phương và tổng của  vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại. Chứng minh rằng tổng  vectơ cho ở trên bằng vectơ không.

***Lời giải:***

**Bài 1.34:** Giả sử n vectơ là . Đặt 

Vì tổng của  vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại do đó  cùng phương với hai vectơ  nên .

**Bài 1.35:** Cho tam giác  với các cạnh . Gọi I là tâm và D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác . M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) 

b) 

c) 

d) 

***Lời giải:***

**Bài 1.35:** (hình 1.51)

|  |  |
| --- | --- |
| a) Gọi  là bán kính đường tròn nội tiếp  ta có    Theo ví dụ 5 ta có | Hình 1.51 |



b) Ta có 

Theo câu a) ta có 

Suy ra 

c) Ta có

Kết hợp ví dụ 5 suy ra



d) 

 với  là nửa chu vi.

Tương tự ta có :





**Bài 1.36:** Cho tam giác . M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng : 

***Lời giải:***

**Bài 1.36:** (hình 1.52)Gọi A' là giao điểm AM với BC ta có  (\*)



Hình 1.52

Mặt khác 

Và  (1)

Mặt khác  (2)

Thay (1) và (2) vào (\*) ta được điều phải chứng minh.

**Bài 1.37**: Cho đa giác lồi ();  là vectơ đơn vị vuông góc với  (xem ) và hướng ra phía ngoài đa giác. Chứng minh rằng

 (*định lý con nhím*)

***Lời giải:***

**Bài 1.37:** (hình 1.53)Ta chứng minh bằng quy nạp



Hình 1.53

Với  đẳng thức trở thành 

(đúng vì đẳng thức này tương đương với đẳng thức ở bài 11)

Giả sử đúng với 

Gọi  là vectơ đơn vị vuông góc với  và hướng ra ngoài tam giác 

Theo giả thiết quy nạp ta có

 (1)

Mặt khác xét tam giác ta có  (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 1.38**: Cho đa giác lồi () với I là tâm đường tròn tiếp xúc các cạnh của đa giác; gọi  là véc tơ đơn vị cùng hướng với véc tơ . Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

**Bài 1.38:** (hình 1.54)Gọi  là các tiếp điểm đường tròn nội tiếp với cạnh 



Hình 1.54

Xét tứ giác  có  và 

Suy ra . Mặt khác  dó đó 

Tương tự ta có 

Xét đa giác lồi  theo định lý con nhím ta có





Mà  suy ra đpcm.

**Bài 1.39:** Cho tam giác  vuông tại A. I là trung điểm của đường cao AH. Chứng minh rằng : .

***Lời giải:***

**Bài 1.39:**  Ta có ,

Suy ra 

Mà  và  nên suy ra 

Hay .

* **DẠNG 3: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước**

**1. Phương pháp giải.**

* Ta biến đổi đẳng thức vectơ về dạng  trong đó điểm A và  đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho , để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ  suy ra điểm ngọn vectơ này chính là điểm M.
* Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết 

***Lời giải:***

(hình 1.21)

Hình 1.21



Ta có 



M nằm trên tia AB và 

***Ví dụ 2:*** Cho tứ giác . Xác định điểm  sao cho

a) 

**A.** M là trung điểm AE, với E là trung điểm AC

**B.** M là trung điểm AF, với F là trung điểm AB

**C.** M là trung điểm AG, với G là trọng tâm ABC

**D.** M là trung điểm AI, với I là trung điểm BC

b) 

**A.** N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AC, BD

**B.** N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, BCD

**C.** N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AD, BC

**D.** N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD

c) 

**A.** P là trung điểm ,  là trọng tâm tam giác 

**B.** P là trung điểm ,  là trọng tâm tam giác 

**C.** P là trung điểm ,  là trọng tâm tam giác 

**D.** P là trung điểm ,  là trọng tâm tam giác 

***Lời giải:***

(hình 1.22)

a)

|  |  |
| --- | --- |
| Gọi I là trung điểm BC suy ra  Do đó    Suy ra M là trung điểm AI | Hình 1.22 |

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có



N là trung điểm của KH

c) Gọi  là trọng tâm tam giác  khi đó ta có 

Suy ra 

 là trung điểm .

***Ví dụ 3:*** Cho trước hai điểm A, B và hai số thực ,  thoả mãn  Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn 

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì

***Lời giải:***

Ta có: 



Vì A, B cố định nên vectơ  không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện.

Từ đó suy ra



 đpcm.

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.40:** Xác định điểm M biết 

**Bài 1.41:** Xác định các điểm I, J, K, L biết



**A.** I là điểm đối xứng của A qua B. **B.**I là trung điểm AB

**C.**Cả A, B đều đúng  **D.**Cả A, B đều sai



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài 1.42:** Cho tứ giác . Tìm điểm cố định I và hằng số k để hệ thức sau thỏa mãn với mọi M



**A.** Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC, k=1

**B.** Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC, k=4

**C.** Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC, k=2

**D.** Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC, k=3



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.42:** a) Cho 

Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC



b) 

c) 

**Bài 1.43:** Cho tam giác  với các cạnh . Tìm điểm M sao cho 

**A.**  trung điểm AB

**B.**  trực tâm ABC

**C.**  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác

**D.**  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

***Lời giải:***

**Bài 1.43:**  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác

**Bài 1.44:** Cho tam giác  và ba số thức  không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu  thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho 

b) Nếu  thì không tồn tại điểm N sao cho 

***Lời giải:***

**Bài 1.44:**  a) Vì 

Không mất tính tổng quát giả sử 

Suy ra 

Do đó tồn tại duy nhất điểm M

b) Giả sử tồn tại điểm N và 

Ta có  (mâu thuẫn với  là tam giác)

**Bài 1.45:** Cho n điểm  và n số  mà 

a) Chứng minh rằng có duy nhất điểm G sao cho.

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm*  *gắn với hệ số* . Trong trường hợp các hệ số  bằng nhau(ta có thể chọn các đều bằng 1 ) thì G gọi là *trọng tâm của hệ điểm* 

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với điểm M bất kỳ ta có 

***Lời giải***

**Bài 1.45:** O là điểm tùy ý, ta có:





Suy ra G xác định duy nhất

* **DẠNG 4: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.**

**1. Phương pháp giải.**

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác . Đặt .

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: 

b) Hãy phân tích  qua các véc tơ  và .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**Cả A, B, C đều đúng

c) Gọi I là điểm thỏa: . Chứng minh  thẳng hàng

***Lời giải*** (hình 1.23)



Hình 1.23

a) Vì  suy ra M thuộc cạnh AB và ; , suy ra N thuộc tia BC và .

b) Ta có: 



.

c) Ta có: 

 A, I, N thẳng hàng.

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  , trên cạnh BC lấy M sao cho , trên đoạn AM lấy N sao cho . G là trọng tâm tam giác .

a) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và 

**A.**  **B.** 

**C.**Cả A, B đều đúng  **D.**Cả A,B đều sai

b) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và 

**A.**  **B.** 

**C.**Cả A, B đều đúng  **D.**Cả A,B đều sai

***Lời giải***

(hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có:  và 



Hình 1.24

suy ra 







b) Vì G là trọng tâm tam giác  nên  suy ra 

Ta có 





***Ví dụ 3:*** Cho hình bình hành . Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho  và G là trọng tâm tam giác . Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**Cả A, B, C đều đúng

***Lời giải:***



Hình 1.25

(hình 1.25)

Ta có: 



Vì G là trọng tâm tam giác nên 

Suy ra 

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.46:** Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho , *,*

a) Biểu diễn các vectơ  theo các vectơ và

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.**Cả A, B, C đều đúng

b) Biểu diễn các vectơ, theo các vectơ và

**A.**  **B.** 

**C.**Cả A, B đều đúng  **D.**Cả A,B đều sai

c) Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.46:** a) 

b) 

M, N, P thẳng hàng

**Bài 1.47:** Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi 

a)Tính theo  và .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác 

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.47:** a) 

b)  suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

**Bài 1.48.** Cho tam giác  có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho  và J là điểm trên BC kéo dài sao cho .

a) Hãy phân tích  theo  và .

**A.**  **B.** 

**C.** Cả A,B đều đúng **D.**Cả A, B đều sai

b) Hãy phân tích  theo  và .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Lời giải:***

**Bài 1.48:**  a) Ta có:



b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:





**Bài 1.49:** Cho hai vectơ  không cùng phương. Tìm x sao cho

a)  và  cùng phương

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b)  và  cùng hướng

**A.**  **B.**   **C.**  **D.**

***Lời giải:***

**Bài 1.49:**  a)  cùng phương với  có số thực k sao cho 



b)  cùng phương với  có số thực k dương sao cho 



* **DẠNG 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác cùng trọng tâm**

**1. Phương pháp giải.**

* Để chứng minh hai điểm  và  trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau :

*Cách 1:*  Chứng minh 

*Cách 2:* Chứng minh  với O là điểm tuỳ ý.

* Để chứng minh hai tam giác  và  cùng trọng tâm ta làm như sau:

*Cách 1*: Chứng minh  là trọng tâm trùng với  là trọng tâm

*Cách 2:* Gọi  là trọng tâm(tức ta có ) ta đi chứng minh 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Chứng minh rằng  khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

***Lời giải:***

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra 

Do đó 

 hay I trùng với J

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác , trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho . Chứng minh rằng hai tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

Giả sử  suy ra 

*Cách 1*: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm  và 

Suy ra  và  (\*)

Ta có 

Tương tự 

Và 

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

Kết hợp với (\*) ta được 

Suy ra điều phải chứng minh

*Cách 2*: Gọi G là trọng tâm tam giác  suy ra 

Ta có: 



Vậy hai tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Ví dụ 3:*** Cho lục giác . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Chứng minh rằng hai tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

(hình 1.26)

Gọi G là trọng tâm của  suy ra  (\*)



Hình 1.26

Mặt khác    Kết hợp với (\*) ta được





Suy ra G là trọng tâm của .

Vậy  và  có cùng trọng tâm.



Hình 1.27

***Ví dụ 4:*** Cho hai hình bình hành  và  chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác  và  cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

(hình 1.27)

Gọi G là trọng tâm tam giác  suy ra 

 (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

 (2)

Từ (1) và (2) ta có  hay G là trọng tâm tam giác 

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.50**. Cho các tam giác  có G, G’ lần lượt là trọng tâm . Chứng minh rằng: . Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm .

***Lời giải:***

**Bài 1.50:** Ta có



Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là 

**Bài 1.51**. Cho tam giác, vẽ các hình bình hành .

Chứng minh rằng  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

**Bài 1.51:** G là trọng tâm  

Ta có 



Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 1.52**. Cho tam giác có A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

**Bài 1.52:** Tam giác  và  có cùng trọng tâm

 (đúng)

**Bài 1.53**. Cho tứ giác . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

**Bài 1.53:** G là trọng tâm  

Ta có 

Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 1.54**. Cho tam giác . Gọi A', B' ,C' là các điểm xác định bởi , , 

Chứng minh rằng  và  cùng trọng tâm

***Lời giải:***

**Bài 1.54:** G là trọng tâm  

Ta có 



 (1)

Tương tự ta có Cộng vế với vế lại ta được

Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 1.55.**  Cho và có cùng trọng tâm G, gọi là trọng tâm các tam giác .Chứng minh rằng cũng có trọng tâm G

***Lời giải:***

**Bài 1.55:** Vì và có cùng trọng tâm G suy ra 

Vì là trọng tâm các tam giác  nên 



Suy ra  do đó G là trọng tâm 

**Bài 1.56.** Cho tứ giác  có trọng tâm G. Gọi lần lượt là trọng tâm các tam giác . Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác 

***Lời giải:***

**Bài 1.56:** G là trọng tâm tứ giác  (\*)

Vì  là trong tâm , tương tự ta có

, , 

Do đó (\*) (đúng) đpcm

**Bài 1.57**. Cho tam giác  đều và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi  lần lượt là điểm đối xứng M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác  và  có cùng trọng tâm.

***Lời giải:***

**Bài 1.57:** Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của  với các cạnh BC, CA, AB. O là trọng tâm đều 

Ta có 

Mặt khác theo bài tập 6 (dạng 2) thì 

Suy ra  do đó O là trọng tâm tam giác 

**Bài 1.58.** Cho các tam giác , điểm O nằm trong tam giác. Gọi  lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB. Lấy các điểm  lần lượt thuộc các tia  sao cho . Chứng minh O là trọng tâm tam giác 

***Lời giải:***

**Bài 1.58:** Ta có 

 (Theo định lý con nhím)

Do đó O là trọng tâm tam giác 

* **DẠNG 6: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.**

**1. Phương pháp giải.**

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu  với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu  với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng .

- Nếu  với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

+ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng  với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng  với 

- Nếu  với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác 

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : .’

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : .

**A.** quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính .

**B.** quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính .

**C.** quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính .

**D.** quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính .

***Lời giải:***

a) Ta có: 

I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

 và  nên



Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính .

***Ví dụ 2*:** Cho tam giác  . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) 

**A.** M là đường trung trực của EF , E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

**B.** M là đường thẳng đi qua A song song vơi BC

**C.** M là đường tròn tâm I bán kính .

**D.**Cả A, B, C đều sai

b)  với k là số thực thay đổi

**A.** M là đường trung trực của EF , E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

**B.** M là đường thẳng đi qua A song song vơi BC

**C.** M là đường tròn tâm I bán kính .

**D.** Với H là điểm thỏa mãn  , M là đường thẳng đi qua E và song song với HB, E là trung điểm của AB

***Lời giải:***



Hình 1.28

(hình 1.28)

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

 và

Khi đó 



Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có 



Với H là điểm thỏa mãn 

Suy ra 



Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

***Ví dụ 3:*** Cho tứ giác . Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho . Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

**A.** tập hợp điểm I là đường thẳng OO', O, O' lần lượt là trung điểm của AC và BD,

**B.** tập hợp điểm I là đường thẳng OO', O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC,

**C.** tập hợp điểm I là đường thẳng OO', O, O' lần lượt là trung điểm của AB và DC,

**D.** Cả A, B, C đều sai

***Lời giải:***

(hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có



Hình 1.29

 và 

Suy ra 

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên 

Do đó 

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.59**. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) 

**A.** Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

**B.** Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

**C.** Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

**D.** Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

b) 

***Lời giải:***

**Bài 1.59:** a) Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

b) Gọi K là điểm thoả mãn: 

L là điểm thoả mãn: 

Ta có:

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

**Bài 1.60.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a)  với k là số thực thay đổi

b) cùng phương với véc tơ 

c)  (HD: dựng hình bình hành ABCD)

***Lời giải:***

**Bài 1.60:**  a) Ta có:



Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với cạnh BC của ΔABC.

b) Gọi J là trung là điểm AB, I là trung điểm JC ta có 



Do đó  cùng phương với  M thuộc đường thẳng đi qua I và song song với BC.

**Bài 1.61.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:





***Lời giải:***

**Bài 1.61:** a) Gọi K là điểm thoả mãn: 

L là điểm thoả mãn: 

Ta có:

⇒ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

b) Với I là trung điểm của BC. Gọi J là điểm thoả mãn: 

Ta có:





Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính .

**Bài 1.62:** Cho tứ giác .

a)Xác định điểm O sao cho :*.*

b)Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức 

***Lời giải:***

**Bài 1.62:** a) với I là trung điểm BD

b) 

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn OA.

**Bài 1.63:** Cho lục giác đều ABCDEF . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

 nhận giá trị nhỏ nhất

***Lời giải:***

**Bài 1.63:** Gọi P là trọng tâm của , Q là trọng tâm của 

 +  =



Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mọi điểm thuộc đoạn PQ

**Bài 1.64:** Trên hai tia  và  của góc  lấy hai điểm M, N sao cho  với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thằng MN

**Bài 1.64:** Gọi hai điểm  lần lượt thuộc tia  và  sao cho . Giả sử  khi đó ta có . Do đó tập hợp điểm I là đoạn 

* **DẠNG 7: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ**

**1. Phương pháp giải.**

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả "  với  là hai vectơ không cùng phương "

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác . Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết . tứ giác  là hình gì?

**A.** hình bình hành **B.**hình thang **C.**hình chữ nhật **D.**hình vuông

***Lời giải:***

Ta có: 



 là hình bình hành.

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn:  là tam giác gì ?

**A.**đều **B.**cân tại A **C.**thường **D.**Vuông tại B

***Lời giải:***

G là trọng tâm tam giác  nên 

Suy ra 



Vì  và  là hai vecơ không cùng phương, do đó (\*) tương đương với:

 hay tam giác  đều.

***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn . Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác .

***Lời giải:***

Giả sử 

Suy ra 

và 

Mặt khác A' là trung điểm của BC nên 

Do đó 



hay 

Vì  không cùng phương suy ra  do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác .

**3. Bài tập luyên tập.**

**Bài 1.65:** Cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn . tứ giác  là hình gì?

**A.** hình bình hành **B.**hình thang **C.**hình chữ nhật **D.**hình vuông

***Lời giải:***

**Bài 1.65:** Đặt 

Suy ra 

Do đó  nên tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 1.66:** Cho  có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn . Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

***Lời giải:***

**Bài 1.66:** Ta có 



AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 1.67:** Cho có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho  đồng quy và thoả mãn  Chứng minh  là các trung tuyến của tam giác .

***Lời giải:***

**Bài 1.67:** Giả sử 



Tương tự ta có , 



Suy ra .

Mặt khác theo định lí Xêva ta có  nên 

Vậy  là các trung tuyến của tam giác 

**Bài 1.68:** Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn . Chứng minh J là trung điểm của CD.

***Lời giải:***

**Bài 1.68:**  

Gọi K là trung điểm DC suy ra  do đó  hay J là trung điểm của CD.

**Bài 1.69:** Cho tứ giác . Giả sử tồn tại điểm O sao cho  và . Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

***Lời giải:***

**Bài 1.69:** (hình 1.55) Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA từ phương trình thứ hai ta được:



Hình 1.55

  thẳng hàng và O là trung điểm MP

  thẳng hàng và O là trung điểm NQ.

Ta có  cân tại O nên ,  cân tại O nên  suy ra .

Tương tự  suy ra  là hình bình hành

Mà N, Q là trung điểm của BC, AD nên 

Suy ra  là hình chữ nhật.

**Bài 1.70:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác  . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác .

***Lời giải:***

**Bài 1.70:** G là trọng tâm tam giác  nên 

Do đó 

Suy ra G là trực tâm tam giác 

**Bài 1.71:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác .

***Lời giải:***

**Bài 1.71:** H là trực tâm tam giác  suy ra 

Do đó  hay H là trọng tâm tam giác .

**Bài 1.72:** Cho tam giác  và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu  thì M là trọng tâm tam giác .

***Lời giải:***

**Bài 1.72:** Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Cho ba véc tơ  đôi một không cùng phương và thỏa mãn điều kiện : 

Chứng minh rằng : . Thật vậy :

Dễ thấy  thì suy ra ngay n, n’, p, p’ cũng phải khác không.

Từ giả thiết ta có :

vì một véc tơ chỉ phân tích được một cách duy nhất qua hai véc tơ không cùng phương nên 

Trở lại bài toán

Ta có 

Mặt khác , tương tự  và 

(với )

Do đó ta có 

Mặt khác ta cũng có 

Áp dụng bổ đề suy ra  hay M trùng trọng tâm tam giác 

* **DẠNG 8: Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vectơ**

**1. Phương pháp.**

* Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ  ta luôn có

+ , dấu bằng xảy ra khi  cùng hướng

+ , dấu bằng xảy ra khi  ngược hướng

* Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của  với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng  khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên .

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn;  đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác  và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất 

***Lời giải:***

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành  thì 

Khi đó : 



Vậy  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  và  là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng 

**Giải:** Vì  và  nên



Do đó:



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ  cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là

**3. Bài tập luyên tập.**

**Bài 1.73:** Cho tam giác , đường thẳng d và ba số sao cho . Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

***Lời giải:***

**Bài 1.73:** Do  nên tồn tại duy nhất điểm I sao cho .

Ta có 



Do đó 

Suy ra  nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d

**Bài 1.74:** Cho tam giác . Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác  sao cho 

a) Đạt giá trị lớn nhất

b) Đạt giá trị nhỏ nhất

***Lời giải:***

**Bài 1.74:** G là trọng tâm tam giác  ta có 

a) M là giao điểm của tia GO với (C)

b) M là giao điểm của tia OG với (C)

**Bài 1.75**: Cho tứ giác  và  là các tứ giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng 

***Lời giải:***

**Bài 1.75:** ĐS: 

**Bài 1.76:** Cho tam giác . M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho . Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Do đó các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

***Lời giải:***

**Bài 1.76:**  Ta có 

Suy ra 

Vì  và  không cùng phương nên không thể xảy ra dấu bằng do đó

. Tương tự ta có 

**Bài 1.77** : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các

đỉnh ta có: 

***Lời giải:***

**Bài 1.77:** 

Hay 

**Bài 1.78**: Cho tứ giác , M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi  lần lượt là chu vi của các tam giác . Chứng minh rằng .

***Lời giải:***

**Bài 1.78:** Ta có: 

và 

Từ đó suy ra



Hay 

**Bài 1.79:** Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy  điểm  ở cùng phía với đối với đường kính nào đó. Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

**Bài 1.79:** Ta chứng minh bằng quy nạp

+ Với : hiển nhiên

+ Giả sử BĐT đúng với  ta đi chứng minh đúng với  hay 

Trong  vectơ ta chọn hai vectơ có góc lớn nhất, giả sử .

Đặt , .

Suy ra điểm A, B nằm trong góc  do đó 



Mặt khác theo giả thiết quy nạp ta có 

Suy ra 