**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9 – PHÂN SỐ**

**CHỦ ĐỀ 7: BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN PHÂN SỐ**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.**

**I. Khái niệm bất đẳng thức**

**1. Định nghĩa :** Số  gọi là lớn hơn số , ký hiệu  nếu  là một số dương, tức là . Khi đó ta cũng ký hiệu 

Ta có: 

Nếu hoặc , ta viết . Ta có:

**2. Quy ước :**

* Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
* Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

**II. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức**

**1. Tính chất 1:** 

**2. Tính chất 2:** 

Từ đó ta suy ra





**3. Tính chất 3:** 

**4. Tính chất 4:** 

Từ đó ta suy ra





**5. Tính chất 5:** 

**6. Tính chất 6:** 

**7. Tính chất 7:** 

**8. Tính chất 8:** Nếu  và  là hai số dương thì : 

Nếu  và  là hai số không âm thì : 

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.**

**Dạng 1: TỔNG LŨY THỪA**

**I. Phương pháp giải**

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ. Nếu muốn chứng minh lớn hơn một giá trị  nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn và ngược lại

**I. Bài toán**

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:



Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

 



**Bài 2:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

 và chứng minh 

Ta có: 

 đến đây, ta sẽ so sánh  với  như sau:

Ta có:  bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số  với 96 để được hai phân số cùng tử rồi so sánh khi đó ta có:  

Chiều thứ hai, ta cần chứng minh: 

Ta làm tương tự như sau:



 

Từ  và  ta có: 

**Bài 3:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta biến đổi:





**Bài 4:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Nhận thấy bài này là tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số chẵn nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số tự nhiên liên tiếp như sau:





**Bài 5:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Nhận thấy bài này có dạng tổng các phân số có mẫu là các lũy thừa cùng cơ số nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng 

Việc tính chính xác được tổng  sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được.

Ta tính tổng  như sau: 

Sau đó lấy  trừ  theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được:

, đặt  và tính tổng  theo cách như trên ta được: , thay vào A ta được: 

**Bài 6:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Tính tượng tự như bài  , ta có: ,

Đặt , và tính rồi thay vào tổng ta được







**Bài 7:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta có: 

**Bài 8:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta có: 

**Bài 9:** So sánh  với 

***Lời giải:***



**Bài 10:** Chứng minh rằng với số tự nhiên  thì  không là số tự nhiên

***Lời giải:***

Ta có: . Mặt khác ta thấy 

Vậy ta có:  .

**Bài 11:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***



**Bài 12 :** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Đặt 

.

Đặt 

Ta có:



, thay vào  ta được:



 (1)

Mặt khác:  (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra ĐPCM

**Bài 13 :** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Tính tổng , ta được: 

Đặt







**Bài 14 :** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta có: 



**Bài 15 :** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có: 



**Bài 16:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***





**Bài 17:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***





Hay 

**Bài 18:** Chứng tỏ rằng: có giá trị không nguyên

***Lời giải:***

Ta có: 

Ta có 







Đặt 







 

Từ  và 

Vậy không có giá trị nguyên

**Bài 19:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***



**Bài 20:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***



**Bài 21:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

,

Đặt  ta có:





  




**Bài 22:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Đặt 

Ta có: 





**Bài 23:** Chứng tỏ rằng: thì 

***Lời giải:***

Ta có: 

Mặt khác:



Vậy 

**Bài 24:** Cho , chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có 



TH1: 

TH2: 

**Dạng 2: TỔNG PHÂN SỐ TỰ NHIÊN**

**I. Phương pháp giải.**

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường.

**II. Bài toán.**

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Ta có 











Vậy 

**Bài 2:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

 

**Bài 3:** Cho . Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có 



Ta có 



Vậy 

**Bài 4:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Nhóm thành 2 ngoặc. Khi đó ta có:







**Bài 5:** So sánh A và B biết:  và 

***Lời giải:***







Vậy 

**Bài 6:** Cho , chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Ta có: 

và 

Vậy 

**Bài 7:** Cho  . Chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

.

Suy ra .

.

Suy ra .

Vậy .

**Bài 8:** Cho . Chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Tổng trên có 30 số hạng:

Ta có: 

Suy ra .

Ngược lại: .

Suy ra .

**Bài 9:** Chứng tỏ rằng:  thì 

***Lời giải:***

Ta thấy tổng  có  số, như vậy ta sẽ nhóm thành  ngoặc, mỗi ngoặc sẽ có hai phân số, gồm một phân số đứng đầu và một phân số đứng cuối, cứ như vậy dồn sâu vào trong tổng.

 ( ngoặc)

, lúc này ta sẽ so sánh tất cả với chung một phân số đầu hoặc cuối,

TH1: Ta chứng minh  thì ta có:

 (1)

TH2: Ta chứng minh  ta có:

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra .

**Bài 10:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Nhận thấy tổng  chính là tổng bài 9

Nên ta chứng minh được , mà .

**Bài 11:** Cho . Chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Thấy rằng tổng  có  số hạng

TH1: Ta chứng minh  bằng cách nhóm hai số một ngoặc thông thường

Ta có:  ( ngoặc)



TH2: Tuy nhiên để chứng minh , nếu chúng ta làm như trên thì sẽ không chứng minh được

Lý do: vì việc chứng minh nhỏ hơn mà chúng ta so sánh lớn hơn lượng dư thừa, dẫn đến tổng lớn hơn , do đó để giảm bớt lượng dư, tùy vào bài toán, chúng ta nên nhóm thành 6 ngoặc.





=

**Bài 12:** Cho . Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Nhóm tổng  thành ba ngoặc làm tương tự bài 11 ta có





Mặt khác: 

Suy ra .

**Bài 13:** Cho . Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Tách tổng  thành:



Và: 

**Bài 14:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Thấy rằng tổng  có  số hạng, số hạng ở giữa là 

TH1:





TH2:=

**Bài 15:** Cho . Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Tổng  có  số hạng

Ta có:  ( ngoặc)



 (1)

Mặt khác:  (2)

Từ (1) và (2) ta có 

**Bài 16:** Cho . Chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Tổng  có  số hạng:  ( ngoặc)



Mặt khác: 

Suy ra 

**Bài 17:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Nhận thấy các mẫu của tổng  là bình phương cảu các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là  nên ta tách  như sau:



Mà .

.

Vậy .

**Bài 18:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Nhận thấy tổng  có phân số cuối có dạng , nên muốn chứng minh tổng  lớn hơn số ta nhóm sao cho phân số có dạng ở cuối ngoặc:

Ta có: 







**Bài 19:** Cho: . Chứng tỏ rằng:  và 

***Lời giải:***

Nhận thấy tổng  giống với bài , muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng  ở cuối ngoặc:







Mặt khác muốn chứng minh , ta nhóm sao cho phân số có dạng  nằm ở đầu ngoặc:







Vậy 

***Lời giải:***

Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***





**Bài 21:** Cho  . So sánh A với 2007

***Lời giải:***

Ta có: 



Xét













Khi đó: 

**Bài 22:** Chứng tỏ rằng luôn tồn tại số tự nhiên  để: 

***Lời giải:***

Chọn  Khi đó: 

**Bài 23:** Cho . So sánh với .

***Lời giải:***







**Bài 24:** Chứng tỏ rằng:.

***Lời giải:***

.

Ta có  số hạng do đó:

.

Vậy  .

**Bài 25:** Chứng tỏ rằng:.

***Lời giải:***

Tổng này là một trường hợp của Bài 15: Áp dụng cách làm Bài 15 ta có:



**Bài 26:** Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Tương tự tổng này có dạng của bài 15, nên ta có:



**Dạng 3: TÍCH CỦA MỘT DÃY**

**I. Phương pháp giải.**

Với dạng tích ta sử dụng tính chất:  với  và ngược lại

**II. Bài toán.**

**Bài 1:** Cho . Chứng tỏ rằng:14 < A < 20

***Lời giải:***

Ta thấy: Phân số  nên ta có:

 khi đó:





Mặt khác:  nên ta có:

 khi đó:



.

**Bài 2:** Cho . Chứng minh rằng A

***Lời giải:***

Ta thấy A có dạng ,





**Bài 3:** Cho . Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

A có dạng  khi đó ta có:

 khi đó:



Mặt khác:





**Bài 4:** Chứng minh rằng 

***Lời giải:***







Suy ra 

Vậy .

**Bài 5:** Chứng tỏ rằng:. Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

Ta có: 



.

Vậy .

**Bài 6:** Cho . Chứng tỏ rằng:.

***Lời giải:***

Ta có: 



Mặt khác: 

.

Vậy .

**Bài 7:** Cho . So sánh  với 

***Lời giải:***

Ta thấy tích  gồm  số âm:

.

.

Mà: 

Vậy .

**Dạng 4: BẤT ĐẲNG THỨC CHỮ**

**I. Phương pháp giải**

Với chương trình lớp 6 các dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức chữ, ta thường sử dụng tính chất:  hoặc ngược lại và đưa về cùng mẫu.

**II. Bài toán**

**Bài 1:** Cho , chứng tỏ rằng: có giá trị không nguyên

***Lời giải:***

Ta có:













Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

, hay ,

Vậy không có giá trị nguyên

**Bài 2:** Cho  là số tự nhiên khác , chứng minh rằng:

 có giá trị không nguyên

***Lời giải:***

Ta có:









Cộng theo vế ta được: .

Mặt khác









Cộng theo vế ta được: .

Suy ra , Vậykhông có giá trị nguyên

**Bài 3:** Cho  là các số dương, và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại.

Chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Chúng ta có thể làm theo cách ở trên, hoặc làm theo cách thứ hai như sau:

Giả sử: 

Khi đó:







Cộng theo vế ta được: 

**Bài 4:** Cho  và , chứng tỏ rằng:

***Lời giải:***

Ta có:









Cộng theo vế ta được: .

**Bài 5:** Cho các số  nguyên dương, chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ngoài hai cách như trên, ta cũng có thể hướng dẫn học sinh làm theo cách như sau:

Ta có: , tương tự ta cũng có: 

Mà  Nên 

**Bài 6:** Cho các số  nguyên dương, chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Ta có: , tương tự ta cũng có: 

Mà  nên 

Vậy .

**Bài 7:** Cho ba số dương , chứng tỏ rằng: .

***Lời giải:***

Vì 





  

Mà .

Chứng minh tương tự ta có:  và .

Cộng theo vế ta được: .

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Cho , chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có: 

**Bài 2:** Chứng tỏ rằng:

a, 

b, 

***Lời giải:***

a, Ta có: 



Nên 

b, Ta có: 

Đặt , thay vào  ta được:



**Bài 3:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Đặt 





**Bài 4:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có:  ,  , tương tự như vậy:



Mặt khác:  , ,

Tương tự như vậy:



**Bài 5:** Chứng tỏ rằng: > 48

***Lời giải:***





**Bài 6:** Cho , chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Chứng tỏ rằng: 

Suy ra 

TH1: 

TH2: 

**Bài 7:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***





**Bài 8:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***



**Bài 9:** Chứng tỏ rằng:.

***Lời giải:***

Ta có: 





**Bài 10:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***







**Bài 11:** Cho  . So sánh với 

***Lời giải:***

Ta có **:**

****

****

****

**...**

****

****





Vậy 

**Bài 12:** Cho  . So sánh A và B.

***Lời giải:***

Ta có:











Vậy .

**Bài 13:** Chứng tỏ rằng: 

***Lời giải:***

Ta có:









…



Suy ra 



 (đpcm)

**Bài 14:** Chứng minh rằng: 

***Lời giải:***

Ta có:















Vậy 

**Bài 15:** Cho  và . Chứng tỏ  không là một số tự nhiên

***Lời giải:***

Ta có: 







Cộng vế theo vế ta được 









Cộng vế theo vế ta được 

Suy ra . Chứng tỏ  không là một số tự nhiên.

🙢 **HẾT** 🙠