**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9 - PHÂN SỐ**

**CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH HAI PHÂN SỐ**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ CÙNG MẪU**

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

**2. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ KHÔNG CÙNG MẪU**

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu số, ta viết chúng dưới dạn hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số với nhau.

Tuy nhiên, nhiều bài toán sẽ gặp khó khăn khi quy đồng mẫu số các phân số. Bởi vậy, có rất nhiều cách khác nhau để so sánh các phân số, ta sẽ đi tìm hiểu ở phần sau.

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: So sánh hai phân số cùng mẫu**

***I. Phương pháp giải***

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: 

***Lời giải:***

Vì các phân số trên đều có cùng mẫu số nên ta được:



**Bài 2:** Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần: 

***Lời giải:***

Viết lại các phân số dưới dạng mẫu dương:



Vì  nên .

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:



**Bài 3:** Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: .

***Lời giải:***

Vì  nên 

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

.

**Bài 4:** Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7. Sắp xết các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

***Lời giải:***

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7 là:



**Bài 5:** Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4. Sắp xết các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

***Lời giải:***

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4 là:



**Bài 6:** Viết các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7. Sắp xết các phân số đó theo thứ tự giảm dần.

***Lời giải:***

Các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7 là:



**Bài 7:** Điền số thích hợp vào chỗ chấm: .

***Lời giải:***

Do các phân số đều có cùng mẫu (dương) nên ta sẽ điền tử số là dãy các số nguyên tăng dần.

Vậy ta điền được kết quả là: 

**Bài 8:** Điền số thích hợp vào chỗ trống

a) 

b) 

***Lời giải:***

a) 

b) 

**Bài 9:** Tìm số  nguyên thỏa mãn:

a)  b)  c) 

***Lời giải:***

a) 

b) 

c) 

**Dạng 2: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng mẫu dương**

***I. Phương pháp giải***

Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: Tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

***II. Bài toán***

**Bài 1:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:a) và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có mà 

b) Ta có ; mà .

**Bài 2:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a) và  b) và 

***Lời giải:***

a) Ta có ;  mà 

b) Ta có ;  mà .

**Bài 3:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có:  . Vì  nên  

b) Ta có: ;  . Vì  nên  

**Bài 4:** So sánh các phân số sau:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a)  

b)   

**Bài 5:** So sánh các phân số :

a)  và  b)  và  c)  và 

***Lời giải:***

a) Vì  nên mẫu chung là .

Ta có : 

Vì  nên .

b) Ta rút gọn các phân số trước : 

Chú ý là , nên ta viết 

Do  nên  hay 

c) Ta có :  và  nên ta biến đổi như sau :

, do  nên 

**Bài 6:** Cho các phân số: 

1. Quy dồng mẫu của các phân số ấy.

2. Sắp xếp các phân số theo thứ tự tăng dần.

***Lời giải:***

1) Quy đồng mẫu chung, ta được các phân số tương ứng là:



2) Sau khi so sánh, ta xếp được các số theo thứ tư tăng dần như sau:



**Bài 7:** Tìm số nguyên dương  sao cho .

***Lời giải:***

Trước tiên ta sẽ quy đồng mẫu số các phân số:



Vì  Suy ra  hoặc 

Mà  là số nguyên dương .

**Bài 8:** Tìm số nguyên dương , biết:

a)  ; b)  ; c)  .

***Lời giải:***

a) 

b) 

c) 

 (vì 

**Bài 9:** Tìm  sao cho  .

***Lời giải:***

Từ  suy ra 

Vì , từ đó ta tìm được   

**Bài 10:** Tìm ba phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Quy đồng các phân số với mẫu số chung là , ta được:



Ta có: 

Rút gọn các phân số trên ta được: .

Vậy ba phân số cần tìm là:  và .

**Bài 11:** Tìm hai phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn  nhưng nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Quy đồng hai phân số  và  với mẫu số chung là , ta được:



Ta có: .

Rút gọn các phân số trên ta được: .

Vậy hai phân số cần tìm là:  và .

**Bài 12:** Tìm hai phân số có mẫu số khác nhau, các phân số này lớn hơn  nhưng nhỏ hơn 

***Lời giải:***

Chọn mẫu chung là 18, ta có: 

Ta có 

Rút gọn các phân số này ta được: 

Ta tìm được hai phân số  và  có mẫu khác nhau, lớn hơn  nhưng nhỏ hơn 

*Nhận xét:*

Có nhiều cặp phân số thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Chẳng hạn, chọn mẫu chung là 120,

ta có: 

Trong các phân số từ  đến  ta có thể chọn các cặp như:  và  hoặc  và  … đều thỏa mãn bài toán.

**Bài 13:** Tìm các phân số có mẫu số là  và nhỏ hơn , lớn hơn 

***Lời giải:***

Phân số có dạng : 

Suy ra 

Vậy phân số cần tìm là: 

**Bài 14:** Tìm ba phân số mà lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Gọi phân số cần tìm  

Ta có: 

Lấy  và  ta được các phân số: .

**Bài 15:** Hãy tìm các phân số, thoả mãn mỗi điều kiện sau

a) Có mẫu là  , lớn hơn  và nhỏ hơn  :

b) Có mẫu là , lớn hơn  và nhỏ hơn ;

Trong mỗi trường hợp trên hãy sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

***Lời giải:***

a) Gọi phân số cân tìm là . trong đó , ta có: 

Quy đồng mẫu chung của ba phân số, ta được: 

Suy ra , do dó , mà , nên .

Có hai phân số phải tìm là :  và .

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: .

b) Gọi phân số phải tìm là , ta có: 

Biến đổi các phân số đã cho sao cho có mẫu dương, ta dược: 

Quy đồng mẫu các phân số: 

Do đó , mà , nên  và 

Ba số phải tìm là :  và .

Sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: .

**Bài 16:** Cho hai phân số  và . Hãy tìm :

a) Năm phân số có tử và mầu cùng là số dương, sao cho các phân số đó lớn hơn  và nhỏ hơn ;

b) Hai mươi phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số lớn hơn  và nhỏ hơn ;

c) Có nhận xét gì về số các phân số có tử và mầu cùng là số dương, sao cho phân số đó lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Lời giải:***

a) Quy đồng mẫu chung hai phân sô  va , chú ý chọn mẫu sao cho xen giữa hai phân số này có 5 phân số. Ta có: ;

b) Tương tự a), chọn mẫu chung là 42. Các phân số cân tìm là: 

c) Có nhiều phân số thoả mãn đề bài. Các phân số cần tìm phụ thuộc vào cách tìm mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì số các phân số cần tìm càng lớn. Chẳng hạn chọn mẫu chung là 120, khi đó  va , vì thế xen giữa hai phân số  và  có 59 phân số là: .

**Bài 17:** So sánh hai phân số sau:  và 

***Lời giải:***

Quy đồng mẫu hai phân số với , ta có :





Hãy chứng tỏ rằng  để suy ra .

Từ đó có .

**Dạng 3: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng tử**

***I. Phương pháp giải***

Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu: Mẫu nào lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn

***II. Bài toán***

**Bài 1:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có mà 

b) Ta có mà .

**Bài 2:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) và  b) và 

***Lời giải:***

a) Ta có ;  mà 

b) Ta có ;  mà .

**Bài 3:** So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a)  và  b)  và  c)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có:  và ; Vì 

b) Ta có:  và ; Vì .

c) Ta có: 

Hai phân số  và  có tử bằng nhau, nhưng  nên  hay .

**Bài 4:** So sánh các phân số sau:  

***Lời giải:***

 

Vì  nên 

**Bài 5:** So sánh các phân số sau:  ;

***Lời giải:***

  

 

Ta có:  nên từ  và  suy ra 

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  sao cho: .

***Lời giải:***

Trước tiên ta sẽ quy đồng tử số các phân số:



Vì  Suy ra  hoặc 

Mà  là số tự nhiên .

**Bài 7:** Tìm sốthỏa mãn:

a) b)  c) 

***Lời giải:***

a)

b) 

c) .

**Bài 8:** Tìm phân số có tử số là  và lớn hơn , nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Phân số cần tìm có dạng : 

Suy ra:  

Ta có 7 phân số: .

**Dạng 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.**

***I. Phương pháp giải***

+ Định nghĩa: Cho phân số , ta gọi *phần bù đến đơn vị* của phân số  là hiệu , tức là .

+ Nếu  mà  thì 

* +  là phần thừa so với  của  phân số đã cho .
  + Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

+ Nếu  mà  thì 

* +  là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.
  + Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** So sánh các phân số sau mà không quy đồng mẫu số và tử số:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Nhận thấy hai phân số này đều lớn hơn  và nhỏ hơn  nên ta sẽ sử dụng phần bù đến đơn vị.

Ta có: , 

Có .

b) Ta có: , 

Có .

**Bài 2:** So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với .

a) và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có ; .. mà .

b) Ta có ;  mà .

**Bài 3:** So sánh các phân số sau:

a)  và  ; b) và  .

***Lời giải:***

a) Ta có:  

 

Vì  nên từ  và  suy ra 

Do đó 

b) Làm tương tự câu a) ta có: 

**Bài 4:** So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với .

a)  và  b) và 

***Lời giải:***

a) Ta có ;  mà .

b) Ta có ..;  mà .

**Bài 5:** So sánh: a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có:  và ; Vì 

b) Ta có :  và ; Vì .

**Bài 6:** So sánh các phân số sau bằng cách hợp lí nhất:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a)  

Vì  suy ra 

d)  

 

Vì  nên từ  và  suy ra 

**Bài 7:** So sánh các biểu thức sau:  

***Lời giải:***

 

 

Vì  nên từ  và suy ra  .

**Bài 8:** So sánh:  và 

***Lời giải:***

Ta có: 



Vì  nên .

**Bài 9:** So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có: 

Vì  nên 

b) Ta có: 

Vì  nên .

**Bài 10:** Hãy so sánh bốn phân số:

a) ; b)  ; c)  ; d) 

***Lời giải:***

Ta có:

 .





.

Suy ra  ( Do đó ).

**Dạng 6: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian**

***I. Phương pháp giải***

**1. Dùng số**  **làm trung gian:**

a) Nếu  và 

b) Nếu  và 

**2. Dùng 1 phân số hoặc số xấp xỉ làm trung gian**:(Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ hai)

\*Nhận xét: Trong hai phân số, phân số nào vừa có tử lớn hơn, vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương ).

\*Tính bắc cầu :  và 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có 

c) Ta có 

**Bài 2:** So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a) và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Ta có 

b) Ta có 

**Bài 3:** So sánh hai phân số sau:

a)  và b)  và .

***Lời giải:***

a) 

b) 

 

Từ  và  suy ra 

**Bài 4:** So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Vì  và  

b) Cách 1: Vì  và  

Cách 2: Vì  và  

**Bài 5:** So sánh các phân số sau:

a)  và  b)  và 

***Lời giải:***

a) Quy đồng tử số ta được: 

Rõ ràng  tức là 

b) Chọn phân số trung gian là  ta có:

 do đó 

**Bài 6:** So sánh:  và .

***Lời giải:***

Ta có :  và 

**Bài 7:** So sánh hai phân số bằng cách dùng số xấp xỉ làm trung gian.

a)  và  b) và  c)  và 

***Lời giải:***

a) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là .

Ta có : .

b) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là .

Ta có : .

c) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là .

Ta có : .

**Bài 8:** So sánh:   

***Lời giải:***







Vì  nên 

**Bài 9:** So sánh:  và 

***Lời giải:***





Vì  nên 

**Bài 10:** So sánh  và 

***Lời giải:***

Ta có: 



Vi 





Vậy .

**Dạng 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng tính chất phân số.**

***I. Phương pháp giải***

**1. Tính chất 1:** Với  ta có :





**2. Tính chất 2:** Với các số nguyên dương :

Nếu  thì .

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm 3 phân số mà: lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Vì  nên  

Vì  nên  

Vì  nên  

Ta có ba phân số cần tìm là: .

**Bài 2:** Tìm ba phân số khác nhau, các phân số này lớn hơn  nhưng nhỏ hơn  .

***Lời giải:***

Từ  suy ra hay .

Từ  suy ra hay .

Từ  suy ra hay .

Vậy, ta có .

**Bài 3:** So sánh  và 

***Lời giải:***



Ta có:  nên .

**Bài 4:** So sánh hai phân số sau:  và 

***Lời giải:***

Ta có :  (vì tử nhỏ hơn mẫu)



Vậy .

**Bài 5:** So sánh hai phân số sau: 

***Lời giải:***

Vì  (vì tử nhỏ hơn mẫu)

nên 

Vậy .

**Bài 6:** So sánh hai phân số sau:  và .

***Lời giải:***

Ta thấy  (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:



Vậy .

**Bài 7:** So sánh hai phân số sau:  và .

***Lời giải:***

Ta thấy  (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:



Vậy .

**Bài 8:** So sánh hai phân số sau:  và 

***Lời giải:***

Ta có :

Cộng theo vế ta có kết quả .

**Bài 9:** So sánh hai phân số sau:  và ?

***Lời giải:***

(áp dụng )

Vậy .

**Bài 10:** So sánh hai phân số :  và .

***Lời giải:***

Vì  nên 



Vậy .

**Bài 11:** So sánh hai phân số:  và 

***Lời giải:***

Dễ thấy  nên:







Vậy 

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. ( Khoảng 15 bài )**

### So sánh và biết và

***Lời giải:***

Ta có:



Lần lượt so sánh từng phân số của  và  với các tử là: thấy được các phân số của  đều lớn hơn các phân số của .

Vậy 

**Bài 2:** So sánh không qua quy đồng: 

***Lời giải:***

Ta có





Ta thấy 

**Bài 3:** Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:



***Lời giải:***

Ta có:



Ta thấy 

**Bài 4:** Cho .

So sánh  với ?

***Lời giải:***

Ta có: 









.

**Bài 5:** So sánh và biết: và 

***Lời giải:***

Ta có:



Vì nên .

### **Bài 6:** Cho: . Hãy so sánh và .

***Lời giải:***

Ta có:  (1)

Tương tự:  (2)

Từ (1) và (2) ta thấy :    .

**Bài 7:** So sánh và .

***Lời giải:***

Xét: 

Và 

Ta có: 

Vậy 

### **Bài 8:** So sánh:và**.**

***Lời giải:***



Và 

Ta có: 

Vậy .

**Bài 9:** So sánh và B biết:



***Lời giải:***

Vì 

**Bài 10:** Chứng tỏ rằng:  +  + + …+  +  > 

***Lời giải:***

Ta thấy:  đến  có  phân số.

Vậy 

=   (1)

Vì …..> và  >  >…>  (2)

Ta có + 

=  (3)

Từ (1) , (2), (3) Suy ra:

 >

**Bài 11:** Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau:  và .

***Lời giải:***

 mà  (1)

Ta có :  và  (2)

Từ (1) và (2) .

**Bài 12:** So sánh: *A* =  và *B =* .

***Lời giải:***

*A* =  < = =  =  *B.*

Vậy *A < B.*

**Bài 13:** So sánh:  và 

***Lời giải:***

Ta có nếu  thì 



Vậy *A < B.*

**Bài 14:** So sánh các biểu thức:  với .

***Lời giải:***





Vậy  hay 

**Bài 15:** Cho:. Hãy so sánh  và .

***Lời giải:***

Ta có:  (1)

Tương tự:  (2)

Từ (1) và (2) ta thấy :  .

**Bài 16:** a) So sánh phân số: với 

b) So sánh tổng S =  với 2. ( )

***Lời giải:***

a) So sánh phân số: với 

. Vậy < 

b) So sánh tổng S =  với 2. ( )

Ta có : 

 (đpcm)

Với  ta có: . Từ đó ta có:

S = . Vậy S < 2

**Bài 17:** Tìm các số tự nhiên  thoả mãn điều kiện:  và 

***Lời giải:***

 







; .

**Bài 18:**  So sánh:  và .

#### (Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 1997-1998)

***Lời giải:***

Ta có : 



⇒ 

Vậy .

**Bài 19:** Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

a)  b)

#### (Đề thi HSG 6\_ Quận Hai bà Trưng 1999 - 2000)

***Lời giải:***

a) Cách 1 : Qui đồng mẫu số rồi so sánh tử.

Cách 2: 

Cách 3: Ta có: 

mà 

b) 



**Bài 20:**  Thực hiện so sánh:

1.  với 
2.  với .

#### (HSG 2013 – 2014)

***Lời giải:***

a) Thực hiện qui đồng mẫu số:





Vì 



Do  nên .

(Có thể chứng tỏ để kết luận ).

Cách khác: Có thể so sánh với trước.

b) 



Vậy .

**Bài 21:**  So sánh:  với .

#### (HSG THANH OAI 2013 – 2014)

***Lời giải:***





Do  nên .

(Có thể chứng tỏ  để kết luận ).

Cách khác: Có thể so sánh  với  trước.

**Bài 22:**  So sánh A =  với B = 

***Lời giải:***

Thực hiện qui đồng mẫu số:





Ta có: 



mà . Từ đó suy ra .

**Bài 23:** So sánh: và 

#### (Đề thi HSG 6 Kinh Môn 2017 - 2018)

***Lời giải:***

Ta có: 



Vì 

Hay 

Vậy .

**Bài 24:** So sánh các phân số sau: 

***Lời giải:***

Ta có:









**Bài 25:** So sánh và biết:  và 

#### (Đề thi HSG 6 huyện Bạch Thông 2018-2019)

***Lời giải:***

Ta có: 



Vì nên 

**Bài 26:** So sánh và biết: và 

#### (Đề thi HSG 6 huyện Lý Nhân 2018-2019)

***Lời giải:***



Từ đó suy ra .

**Bài 27:** Cho 2 phân số 

Tìm 10 phân số có dạng sao cho 

Có thể tìm được bao nhiêu phân số thỏa mãn điều kiện trên ?

#### (Đề HSG Toán 6\_Đặng Chánh Kỷ\_2018-2019)

***Lời giải:***

a)  phân số  thỏa mãn là: 

b) Có vô số phân số thỏa mãn điều kiện trên vì các phân số cần tìm phụ thuộc vào mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì phân số càng nhiều

**Bài 28:** Cho biết . Chứng minh rằng 

(Đề HSG Toán 6 huyện Thanh Oai 2013-2014)

***Lời giải:***

+) Chứng minh 









 hay  (1)

+) Chứng minh 







 Hay  (2)

Từ (1) và (2) ta có .

🙢 **HẾT** 🙠