**CHUYÊN ĐỀ 6: SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**CHỦ ĐỀ 5: PHƯƠNG PHÁP KẸP TRONG BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Không tồn tại số chính phương nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

Cụ thể: Nếu có  thì k không là số chính phương.

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI:**

**Dạng 1: Chứng minh một số, một biểu thức số không là số chính phương.**

***I. Phương pháp giải:***

1. Để chứng tỏ một số không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ  

Bước 2: Chứng tỏ  

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra   không là số chính phương

1. Sử dụng các hằng đẳng thức để biến đổi biểu thức số:





***II. Bài toán:***

**Bài 1:** Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Nhận thấy: 



Suy ra 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 2:** Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Nhận thấy: 



Suy ra 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh số  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có 



Suy ra 

Chứng tỏ không là số chính phương.

**Bài 4:** Chứng minh số  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có 



Suy ra 

Chứng tỏ không là số chính phương.

**Bài 5:** Chứng minh rằng:

1.  không là số chính phương.
2. không là số chính phương

**Lời giải:**

1. Ta có 

 

Ta đi chứng minh 

Thật vậy :

 ( 1000 số )



Mà 



 

Từ 

Suy ra không là số chính phương (ĐPCM)

1. Ta có : 

 

Lại có:

(1000 số )



 

Từ 

Suy ra không là số chính phương (ĐPCM)

**Bài 6:** Chứng minh rằng:

 không là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có : 

 

Lại có:

 (100 số )





 

Từ 

Suy ra không là số chính phương (ĐPCM)

**Dạng 2: Chứng minh biểu thức**  **không là số chính phương.**

***I. Phương pháp giải:***

- Để chứng tỏ biểu thức  không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ 

Bước 2: Chứng tỏ 

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra  không là số chính phương.

- Sử dụng các hằng đẳng thức sau để biến đổi biểu thức:











***II. Bài toán:***

**Bài 1:** Chứng minh rằng tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương.

**Lời giải:**

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp khác 0 là 

Tích 2 số là 

Ta có   

Mặt khác  

Từ 

 thì  là không là số chính phương.

Vậy tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương (ĐPCM)

**Bài 2:** Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**Lời giải:**

Gọi 4 số nguyên dương liên tiếp là 

Đặt 





Đặt  

Nhận thấy  

Suy ra không là số chính phương 

Suy ra không là số chính phương 

Vậy tích bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng tổng bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

**Lời giải:**

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là  

Đặt 













 

Mặt khác ta có:



 

Từ   không là số chính phương.

**Bài 4:** Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương

1. 
2. 

**Lời giải:**

1. Nhận thấy : 

Mà 

nên  

Cũng có 

Mà 

nên  

Từ ,  thì  không là số chính phương

1. Nhận thấy ta có:









 thì  không là số chính phương

**Bài 5** Chứng minh rằng với  là số tự nhiên thì các số sau không phải số chính phương

1. 
2. 

**Lời giải:**

1. Ta có: 



Mà 

nên 

 không là số chính phương

1. Ta có: 



Mà 

nên 

không là số chính phương

**Bài 6:** Chứng minh rằng số có dạng  trong đó không là số chính phương.

**Lời giải:**

Đặt 











Với thì 

 

Mặt khác với ta có 

 

Từ ,suy ra  không phải là một số chính phương.

Vậy số có dạng  trong đó không là số chính phương (ĐPCM)

**Bài 6:** Cho  là số nguyên dương và  là ước nguyên dương của  .

CMR:  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Giả sử:  là số chính phương.

Đặt:  (1)

Theo bài ra ta có: 

Thay vào (1) ta được: 





Do  là các số chính phương nên  là số chính phương.

Mặt khác:  không là số chính phương (Mâu thuẫn với giả sử)

Vậy  không là số chính phương.

**Dạng 3: Tìm giá trị của**  **để biểu thức**  **là một số chính phương.**

***I. Phương pháp giải:***

Xét các trường hợp có thể xảy ra của . Dùng tính chất “Nếu  thì k không là số chính phương” đề loại các giá trị không phù hợp của  và từ đó chọn giá trị phù hợp của .

***II. Bài toán:***

**Bài 1:** Tìm số tự nhiênđể là số chính phương.

**Lời giải:**

Vì  là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+)  là số chính phương

+) 

Ta có   

Mặt khác  

Từ 



 thì  là không là số chính phương.

Vậy thì  là số chính phương

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  để là số chính phương.

**Lời giải:**

Vì  là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+)  là số chính phương

+) 

Ta có 

Đặt  

Nhận thấy  

Suy ra  không là số chính phương 

Suy ra  không là số chính phương với 

Vậy thì là số chính phương.

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  để  là số chính phương

**Lời giải:**

Vì  là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+)  là số chính phương

+)  là số chính phương

+) 

Ta có 

Cũng có 



 không là số chính phương

Vậy với  thì  là số chính phương.

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  để  là số chính phương

**Lời giải:**

Vì  là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+)  không là số chính phương.

+)  là số chính phương.

+)  là số chính phương.

+) 

Ta có  

Mặt khác ta có: 

Xét hiệu:







 

 

Từ , 

 không là số chính phương.

Vậy với  thì  là số chính phương.

**Bài 5:** Tìm tất các các số nguyên  để :  là số chính phương

**Lời giải:**

Đặt 

 hoặc 

Khi  hoặc  không phải là số chính phương

Với  và 

Ta có : 

Lúc đó : 

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  có 2 chữ số biết rằng  và  đều là các số chính phương

**Lời giải:**

Ta có số tự nhiên  có 2 chữ số nên 

  
Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được bằng 

Tương ứng với số  bằng   
Tương ứng bằng 37; 73; 121; 181; 253. Trong đó chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy số tự nhiên  có 2 chữ số cần tìm là 

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên  để  là số chính phương

**Lời giải:**

Vì  là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+)  không là số chính phương.

+)  ta xét:



 (1)



 (2)

Từ (1) và (2) 







Vậy  thì  là số chính phương

**Dạng 4: Tìm một số chính phương thỏa mãn các điều kiện cho trước.**

**Bài 1:** Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số B cũng là số chính phương. Tìm hai số A và B.

**Lời giải:**

Gọi , khi đó: 

Ta có :









 (1)

Nhận xét thấy tích với là hai số nguyên dương.

và  (2)

Từ (1), (2) 

Vậy hai số 

**Bài 2:** Tìm 1 số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm hai chữ số sau một đơn vị.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương có 4 chữ số là 

Đặt  



Mặt khác theo bài ra ta có : 



 

Từ suy ra 



hoặc 

Mà  nên 

Do 









Vậy số chính phương có 4 chữ số cần tìm là 

**Bài 3:** Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương phải tìm là : 

Ta có : 

 (1)



Mà  là số nguyên tố  (2)

Từ (1),(2) ta suy ra 

Mà 





Thay vào (1) ta được :  là số chính phương

Bằng phép thử  từ 1 đến 9 ta thấy có  là thỏa mãn 

Vậy số cần tìm là .

**Bài 4:** Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương đó là: 

Theo bài ra ta có 

Vì  cũng là một số chính phương.

Mặt khác ta có : 





Mà y là số chính phương nên 





Vậy số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương là 

**Bài 5:** Tìm số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

**Lời giải:**

Gọi số phải tìm là 

Theo bài ra ta có: 

Khi đó  là một lập phương và  là một số chính phương

Đặt 

Vì 



hoặc 

hoặc 

TH1 :  là số chính phương

TH2 :  không là số chính phương ( loại)

Vậy số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó là 27.

**Bài 6:** Tìm ba số chính phương lẻ liên tiếp mà tổng của chúng là một số có 4 chữ số giống nhau.

**Lời giải:**

Gọi ba số lẻ liên tiếp đó là: 

Ta xét: 





Theo bài ra ta có  ( lẻ và )



 (\*)







Vì 

Mà lẻ nên 

Vì  lẻ nên 

+ Thay vào (\*) ta được 



Mà  là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có tận cùng là  (loại)

+ Thay vào(\*) ta được 









Vậy ba số chính phương lẻ liên tiếp cần tìm là 

**Bài 7:** Tìm số chính phương mà nó bằng bình phương của một số có hai chữ số và bằng lập phương của tổng hai chữ số của số có hai chữ số đó.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương cần tìm là 

Theo bài ra ta có  nên là số chính phương.

Đặt 

mà  

Nếu  (thỏa mãn)

Nếu  (loại)



Vậy số chính phương cần tìm là

**Bài 8:** Tìm một số chính phương biết nó bằng tổng của một số có hai chữ số với số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương đó có dạng 

Theo bài ra ta có : 



Mà  là số nguyên tố nên 



Mà 



Vậy số chính phương cần tìm là 

**Bài 9:** Tìm một số chính phương biết nó bằng bình phương của một số có hai chữ số trừ đi bình phương của số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương đó có dạng 

Theo bài ra ta có : 









Mà  là số nguyên tố nên 



Vì 

suy ra là số chính phương

Mà 

Mặt khác vì cùng tính chẵn lẻ nên 



Vậy số chính phương cần tìm là 

**Bài 10:** Tìm số chính phương có dạng , biết : 

**Lời giải:**

Đặt 

Mà 

nên 







Vì  là số nguyên tố 

Ta có : 



**Bài 11:** Tìm một số chính phương có 4 chữ số là số là một lập phương của một số tự nhiên.

**Lời giải:**

Gọi số chính phương đó là : 

Vì  cũng là một số chính phương.

Ta có : 

Mà y là số chính phương nên 



Vậy số chính phương cần tìm là 

**Bài 12:** Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố và số đó bằng bình phương của số có tổng các chữ số là một số chính phương.

**Lời giải:**

Gọi số phải tìm là :  với 

Vì  là số chính phương nên  mà d là số nguyên tố nên 

Đặt  với k là 1 số có hai chữ số mà  có tận cùng là 5

có tận cùng là 5 và tổng các chữ số của là một số chính phương 

Vậy 