**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 6 – SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**CHỦ ĐỀ 1: ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**I. ĐỊNH NGHĨA:**

Số chính phương là bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ :  và  là hai số chính phương vì 

**II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG:**

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là , không thể có chữ số tận cùng là 

 Để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 

1. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với mũ chẵn, không chứa TSNT với mũ lẻ.

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

1. Số chính phương chia hết cho  thì phải chia hết cho .
2. Số chính phương chia hết cho  thì phải chia hết cho .
3. Số chính phương chia hết cho  phải chia hết cho .
4. Số chính phương chia hết cho  thì phải chia hết cho .
5. Tích của các số chính phương là một số chính phương.
6. Với là số chính phương và , nếu a là số chính phương thì b cũng là số chính phương.

 Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì có số mũ lẻ.

1. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  hoặc  (, ), không có SCP nào có dạng  .
2. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  hoặc  (, ) không có SCP nào có dang  hoặc  
3. Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.
4. Nếu  số một số chính phương, chia hết cho  và  là một số nguyên tố thì chia hết cho .
5. Nếu  chia hết cho  và  là một số nguyên tố thì chia hết cho .
6. Hai số chính phương  và  được gọi là hai số chính phương liên tiếp. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

Nghĩa là: nếu  thì  không là số chính phương.

1. Nếu tích  là một số chính phương và  thì hai số  và  đều là các số chính phương
2. Số chính phương biểu diễn được thành tổng các số lẻ : 

Chứng minh:

Giả sử:  với 

Ta có từ  đến  có =  số hạng

 (đpcm)

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Bài 1:** Cho các số  . Hãy tìm các số chính phương .

**Lời giải:**

Ta có: 







Tổng quát: 

**Bài 2:** Các biểu thức số sau có phải số chính phương hay không?

 a) 

 b) 

 c) 

 d) 

 e) 

 f) 

 g) 

 h) 

**Lời giải**

1. Ta có:  với mọi  nên 

Suy ra  chia cho  dư .

Vì  chia hết cho  nhưng không chia hết cho  nên  không phải là số chính phương.

1. Ta có: 







 có chữ số tận cùng là 3 nên  không phải là số chính phương.

1. Ta có  có chữ số tận cùng là  nên không phải là số chính phương.
2. Ta có có chữ số tận cùng là  nên không phải là số chính phương.
3. Ta có  có cặp chữ số tận cùng là  chia hết cho  nhưng không chia hết cho  nên không phải là số chính phương.
4. Ta có  có tổng các chữ số là  chia hết cho  nhưng không chia hết cho 9 nên không phải là số chính phương.
5. Ta có số  có tận cùng là  chữ số 

 không tận cùng là chẵn lần chữ số 

 không là số chính phương.

1. Ta có: 

 là số chính phương, ta xét số :

Vì  có tổng các chữ số là  nên số  chia hết cho  mà không chia hết cho .

 số  không là số chính phương.

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng:

a) Một số chính phương khi chia cho  chỉ có thể có số dư là  hoặc .

b) Một số chính phương khi chia cho  chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

c) Một số chính phương khi chia cho  chỉ có thể có số dư là  hoặc  hoặc .

d) Một số chính phương lẻ khi chia cho  chỉ có số dư là .

**Lời giải:**

a) Ta xét các trường hợp của  khi chia cho :

+ Nếu  

+ Nếu   chia  dư 

+ Nếu   chia  dư 

Vậy một số chính phương khi chia cho  chỉ có thể có số dư là  hoặc .

b) Ta xét các trường hợp của  khi chia cho :

+ Nếu  chia  dư 

+ Nếu   chia  dư 

Vậy một số chính phương khi chia cho  chỉ có thể có số dư là  hoặc  hoặc .

c) Ta xét các trường hợp của  khi chia cho :

+ Nếu  chia  dư 

+ Nếu   chia  dư 

+ Nếu    chia  dư 

d) Ta có: 

Vì là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên  chia hết cho .

  chia hết cho .

 chia dư .

Vậy một số chính phương lẻ khi chia cho  chỉ có số dư là .

**Bài 4:** a) Cho . Chứng minh rằng  không là số chính phương.

b) Cho . Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải:**

a) Ta có: 

 

Lấy  trừ  ta được: 







Mà trong tích  ta có số không là số chính phương

 không là số chính phương

b) Ta có:  

  

Lấy  trừ  ta được: 









Ta có  không là số chính phương do  không là số chính phương.

Vậy  không là số chính phương.

* **Lưu ý:** ,  cũng có thể kết luận ngay chúng không là số chính phương ( Chứ thừa số nguyên tố với số mũ lẻ )

**Bài 5:** Cho hai số chính phương có tổng là một số chia hết cho . Chứng minh rằng cả hai số chính phương đó đều chia hết cho .

**Lời giải**

Gọi hai số chính phương là: . Theo đầu bài ta có: 

Ta xét các trường hợp:

+ Giả sử  chia  dư  (theo tính chất )

 mâu thuẫn giả thiết 

+ Giả sử hoặc  hoặc  không chia hết cho 3, số còn lại chia hết cho 3  (mâu thuẫn giả thiết)

, mà  là số nguyên tố.

 (đpcm)

**Bài 6:** Cho  là số chính phương gồm bốn chữ số, nếu ta thêm vào mỗi chữ số của số  một đơn vị thì ta được số chính phương . Tìm  và .

**Lời giải**

Đặt 

Vì thêm vào mỗi chữ số của số  một đơn vị thì ta được số  nên dễ thấy: 

Mà:  và 









Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 7:**  Tìm số nguyên tố , sao cho  là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có:  là số chính phương;

Mà  là số chính phương.

 là số chính phương



+) Với  

+) Với 

Vậy các số nguyên tố  thỏa yêu cầu đề bài là: 

**Bài 8:**  Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

**Lời giải**

Gọi số chính phương cần tìm là :  

Ta có : 



 

Lại có : 

 mà 



Mà :   

Thay  vào , ta được : 

phải là số chính phương (do  là số chính phương)

Ta có bảng sau:



Ta có : 

Vậy số cần tìm là : .

Cách 2:

Gọi số chính phương cần tìm là :  

Ta có: =

Do đó: 

Ta có: 





Ta có bảng:



Mà 

chọn 



**Bài 9:**  Tìm số tự nhiên  để  là số chính phương.

**Lời giải**

Đặt  

+) Với   vô lí

+) Với 











**Bài 10:**  Viết liên tiếp từ  đến  được số .

 Hỏi: số  có thể có 81 ước được không?

**Lời giải**

Giả sử  có  ước.

Vì số lượng các ước của  là  (là số lẻ) nên  là số chính phương (1)

Mặt khác, tổng của các chữ số của  là 

Vì  nên  chia hết cho  nhưng  không chia hết cho , do đó  không là số chính phương mâu thuẫn với (1).

Vậy  không thể có  ước.

**Bài 11:** Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với  thì ta được một số chính phương.

**Lời giải**

Gọi số phải tìm là  

Ta có:  hay 

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên 

+) Với (không thỏa mãn)

+) Với 

+) Với 

+) Với 

+) Với  (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là 

**Bài 12:**  Chứng minh rằng: một số tự nhiên viết toàn bằng chữ số  thì không phải số chính phương.

**Lời giải**

Gọi  là số tự nhiên được ghi bởi  chữ số  ()

Ta có:  

 là số tự nhiên chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4

 không là số chính phương.

**Bài 13:** Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng  thì có thể là số chính phương được không? Vì sao?

**Lời giải**

Gọi  là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng  

Ta có: 

Vì tổng các chữ số của  chia  dư  nên số khi chia cho  cũng có số dư là 

có dạng 

Mà một số chính phương không có dạng nên số tự nhiên n không là số chính phương.

Vậy một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng  thì không là số chính phương.

**Bài 14**: Cho . Hỏi  có là số chính phương không? Vì sao?

**Lời giải**

Ta có:











 có chữ số tận cùng là 3

 không là số chính phương.

**PHẦN III. CÁC BÀI TRONG ĐỀ THI**

**Bài 1:** Chứng minh rằng  không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương .

*(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 – 2016)*

**Lời giải**

Ta có

 

 chia cho  dư 

chia cho  dư 

Do đó  chia cho  dư 

Ta có  nhưng  không chia hết cho , mà là số nguyên tố nên  không là số chính phương.

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 2:** Chứng minh rằng không phải là số chính phương.

*(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)*

**Lời giải**

Ta có





Ta thấy

 







Nên chia  dư , mà không có số chính phương nào chia dư .

 Vậy  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

*(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)*

**Lời giải**

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là 

Ta xét 

Vì  và  nên 

Mặt khác  và  không chia hết cho 4 nên  không chia hết cho 4.

Vậy  chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên  không là số chính phương.

**Bài 4:** Cho  với . Chứng minh rằng  không là số chính phương.

 *(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)*

**Lời giải**

Ta có

 

Ta có: 

 

Suy ra 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 5:** Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương không là số chính phương.

 *(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)*

**Lời giải**

Ta có: 



Để  là số chính phương thì 

Điều này vô lí vì 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 6:** Cho 

a) Chứng minh  chia hết cho 6.

b) Chứng minh  không là số chính phương.

 *(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)*

**Lời giải**

a) Ta có: 



b) Ta có:

 

Mặt khác:

không chia hết cho 



 không chia hết cho 25.

Ta có  nhưng không chia hết cho  nên  không là số chính phương.

**Bài 7:** Cho Chứng minh  là một số chính phương.

 *(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)*

**Lời giải**

 Ta có: 

Nên

 

Nên là số chính phương.

**Bài 8:** Cho 

a) Chứng minh  chia hết cho .

b) Chứng minh  không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

**Lời giải**

a) Ta có:

 



Ta lại có  có tổng các chữ số bằng 1 nên khi chia cho 3 đều dư .

Ta có  chia  dư .

Vậy chia  có số dư là dư của phép chia 

Hay dư của phép chia 6 chia cho 3 (có số dư bằng 0)



Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố nguyên cùng nhau, ,  nên 

b) Ta có  có chữ số tận cùng là 0 nên:

 có chữ số tận cùng là 

Vậy  không là số chính phương vì số chính phương có tận cùng là 

**Bài 9:** Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

**Lời giải**

Gọi số chính phương phải tìm là 

- Vì số chính phương không có chữ số tận cùng là 3; 8 do đó phải có tận cùng là 6.

- Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

  có tận cùng là 36.

Vậy số chính phương đó là 8836 (với ).

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với thì ta được một số chính phương?

*(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)*

**Lời giải**

Gọi số phải tìm là  ()

Ta có:  hay 

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên 

+) Với 

+) Với 

+) Với  (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là .

**Bài 11:** Cho tổng . Chứng tỏ là một số chính phương.

(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 – 2014)

**Lời giải**

Ta có: 

Vậy  là một số chính phương.

**Bài 12:** Cho tổng  (với )

Chứng tỏ là một số chính phương.

*(Trích đề thi HSG huyện Lương Tài năm học 2015 – 2016)*

**Lời giải**

Xét dãy số trong tổng , từ  đến có   (số số hạng).



Vì  nên là một số chính phương.

**Bài 13:** Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên khác  và có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương**.**

*(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Vũ Thư, năm học 2018 – 2019)*

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên đó là 

Nếulà số chính phương.

Nếu . Phân tích ra thừa số nguyên tố ta có:  (với  là các số nguyên tố).

Khi đó số lượng các ước của là .

Theo đề ta có:  là số lẻ

 đề là các số lẻ

 đều là các số chẵn

Đặt 

Ta được 

Vậy là số chính phương.

**Bài 14:** Tìm  để  là một số chính phương.

*(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Sơn Tây, năm học 2015 – 2016)*

**Lời giải**

Giả sử  là số chính phương

Đặt 



 

+) Nếu  khác tính chẵn lẻ thì vế trái của  là số lẻ nên không thỏa mãn 

+) Nếu  cùng tính chẵn lẻ





Mà vế phải của  là không chia hết cho 4

 vô lý

Vậy không tồn tại  để  là một số chính phương.

**Bài 15:** Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng số gồm 2 số đầu lớn hơn số gồm 2 số sau 1 đơn vị.

*(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Liên Hòa năm học 2008 – 2009)*

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là 

Theo đề bài ta có:

,,



Ta có: 

   hoặc 

Mà  nên 

Mà 

Vậy số cần tìm là .

🙢 **HẾT** 🙠