**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 4- ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT**

**CHỦ ĐỀ 3: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ƯCLN, BCNN**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Kiến thức cần nhớ**

1. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

2. Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai hay nhiếu số là số lớn nhất trong các ước chung của các số đó.

3. Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiếu số lớn hơn  , ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mổi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

4. Để tìm ước chung của nhiều số, ta có thể tìm ƯCLN của các số đó rồi tìm ước của ƯCLN đó.

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

6. Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác  trong các bội chung của các số đó.

7. Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn  , ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa sổ nguyên tố chung và riêng.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

8. Để tìm bội chung của nhiều số, ta có thể tìm BCNN của các số đó rồi nhân BCNN đó lần lượt với 

**2. Các tính chất**

1. Khi cần kí hiệu gọn, ta có thể viết ƯCLN  là  , viết  là 

2. Nếu  và  thì  .

3. Nếu  và  thì  . Đặc biệt, nếu  và  thì 

4. Nếu ƯCLN  thì  với  .

5. Nếu  thì  với  .

6. ƯCLN  .

7. Người ta chứng minh được rằng:

Cho hai số tự nhiên  và  trong dó  .

+ Nếu a chia hết cho  thì ƯCLN  .

+ Nếu  không chia hết cho  thì ƯCLN  bằng ƯCLN của  và số dư trong phép chia  cho  .

Từ đó, ta có thuật toán Euclide tìm ƯCLN của hai số mà không cần phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố như sau:

- Chia số lớn cho số nhỏ.

- Nếu phép chia còn dư, lấy số chia đem chia cho số dư.

- Nếu phép chia này còn dư, lại lấy số chia mới chia cho số dư mới.

- Cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi được số dư bằng  thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Phương pháp phân tích ra các thừa số nguyên tố**

***I. Phương pháp giải***

Muốn tìm ƯCLN, BCNN của hai hay nhiều số ta làm như sau

*Bước 1:* Phân tích các số ra thừa số nguyên tố với số mũ tương ứng

*Bước 2:* Tìm các thừa số chung và riêng

*Bước 3:* ƯCLN là tích các thừa số nguyên tố chung với số mũ nhỏ nhất

BCNN là tích của các thừa số nguyên tố chung và riêng với số mũ lớn nhất

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  lớn nhất sao cho khi chia  cho  , ta được ba số dư bằng nhau.

***Lời giải:***

 chia cho  có cùng số dư nên các hiệu của hai số trong ba số ấy chia hết cho  .

Ta có:

 , tức là  ,

 , tức là  ,

 , tức là  .

Để  lớn nhất thì  là ƯCLN  .

Phân tích ra thừa số nguyên tố:







ƯCLN 

Vậy 

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  nhỏ hơn  để các số  và  có ước chung khác  .

***Lời giải:***

Gọi  là một ước chung của  và  .

Ta có  và  nên  , tức là 

Suy ra  .

Để  và  có ước chung khác  , ta phải có  tức là  hay 

Ta lại có  nên  .

Do  nên  hoặc  .

Thử lại  ,  thỏa mãn. Vậy  ,

**Bài 3:** Tổng của năm số tự nhiên bằng  . Ước chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

***Lời giải:***

Gọi năm số tự nhiên đã cho là  , ước chung lớn nhất của chúng là  .

Ta có: 

nên 

do đó 

Suy ra  là ước của  .

Ta lại có  nên  , suy ra  .

Phân tích ra thừa số nguyên tố:  .

Ước lớn nhất của  không vượt quá  là  .

Giá trị lớn nhất của  là  , xảy ra khi chẳng hạn  và  hoặc các hoán vị của chúng.

**Bài 4:** Có ba đèn tín hiệu, chúng phát sáng cùng một lúc vào  giờ sáng. Đèn thứ nhất cứ  phút phát sáng một lần, đèn thứ hai cứ  phút phát sáng một lấn, đèn thứ ba cứ  phút phát sáng một lần. Thời gian đầu tiên để cả ba đèn cùng phát sáng sau  giờ trưa là lúc mấy giờ?

***Lời giải:***

Gọi thời gian ít nhất để sau đó, cả ba đèn lại cùng phát sáng là  (phút).

Ta có  là  .

Phân tích ra thừa số nguyên tố:  nên 

Sau  phút, cả ba đèn cùng phát sáng. Chúng cùng phát sáng vào lúc  giờ  phút,  giờ  phút,  giờ  phút. . .

Thời gian đầu tiên sau  giờ trưa để cả ba đèn cùng phát sáng là lúc  giờ  phút.

**Bài 5:** Điền các chữ số thích hợp vào dấu \* để số  chia hết cho tất cả các số 

***Lời giải:***

Điều kiện để  chia hết cho tất cả các số  là  chia hết cho  

Ta thấy  chia  được  , dư  nên  chia hết cho  ,  chia hết cho  .

Đáp số:  và  .

**Bài 6:** Tìm các số tự nhiên  và   biết ƯCLN 

***Lời giải:***

Ta có  ƯCLN  

ƯCLN  nên  trong đó 

Suy ra  

Từ  và  suy ra  hay  .

Ta có  nên  . Các số  nguyên tố cùng nhau và có tích bằng  nên

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Suy ra

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Bài 7:** Cho  Tìm  Từ đó kiểm tra công thức

ƯCLN  ƯCLN(ƯCLN 

***Lời giải:***

Ta có: 



ƯCLN  ƯCLN   ƯCLN(ƯCLN  ƯCLN 



**Bài 8:** Tìm ƯCLN, BCNN của các số sau

a) 

b) 

***Lời giải:***

a) Ta có:  ;  ; 

 ƯCLN 

b) Ta có

 ;  ;  ; 

 ƯCLN 

**Bài 9:** Một trường tổ chức cho khoảng  và  học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết rằng nếu xếp  người hoặc  người lên xe ô tô thì vừa đủ.

***Lời giải:***

Gọi số học sinh của trường là: 

Theo bài ta có: 

Vì 

Ta có: 





Vậy Số học sinh là  .

**Dạng 2: Thuật toán EUCLID để tìm ƯCLN**

Trong [toán học](https://vi.wikipedia.org/wiki/To%C3%A1n_h%E1%BB%8Dc), giải thuật Euclid (hay thuật toán Euclid) là một [giải thuật](https://vi.wikipedia.org/wiki/Thu%E1%BA%ADt_to%C3%A1n) để tính [ước chung lớn nhất](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C6%AF%E1%BB%9Bc_s%E1%BB%91_chung_l%E1%BB%9Bn_nh%E1%BA%A5t) (ƯCLN) của hai [số nguyên](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_nguy%C3%AAn), là số lớn nhất có thể chia được bởi hai số nguyên đó với [số dư](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_d%C6%B0) bằng không. Giải thuật này được đặt tên theo nhà toán học người Hy Lạp cổ đại [Euclid](https://vi.wikipedia.org/wiki/Euclid), người đã viết nó trong bộ [*Cơ sở*](https://vi.wikipedia.org/wiki/C%C6%A1_s%E1%BB%9F_(Euclid)) của ông (khoảng năm 300 TCN). Nó là một ví dụ về [*thuật toán*](https://vi.wikipedia.org/wiki/Thu%E1%BA%ADt_to%C3%A1n), một chuỗi các bước tính toán theo điều kiện nhất định và là một trong số những thuật toán lâu đời nhất được sử dụng rộng rãi.

Giải thuật Euclid dựa trên nguyên tắc là ước chung lớn nhất của hai số nguyên không thay đổi khi thay số lớn hơn bằng hiệu của nó với số nhỏ hơn. Chẳng hạn,  là ƯCLN của  và  (vì  và  ) và cũng là ƯCLN của  và  . Khi lặp lại quá trình trên thì hai số trong cặp số ngày càng nhỏ đến khi chúng bằng nhau, và khi đó chúng là ƯCLN của hai số ban đầu. Bằng cách [đảo ngược lại các bước](https://vi.wikipedia.org/wiki/Gi%E1%BA%A3i_thu%E1%BA%ADt_Euclid_m%E1%BB%9F_r%E1%BB%99ng), ƯCLN này có thể được biểu diễn thành tổng của hai số hạng, mỗi số hạng bằng một trong hai số đã cho nhân với một số nguyên dương hoặc âm ([đồng nhất thức Bézout](https://vi.wikipedia.org/wiki/B%E1%BB%95_%C4%91%E1%BB%81_B%C3%A9zout)), chẳng hạn, 

Dạng ban đầu của giải thuật như trên có thể tốn nhiều bước thực hiện phép trừ để tìm ƯCLN nếu một trong hai số lớn hơn rất nhiều so với số còn lại. Một dạng khác của giải thuật rút ngắn lại các bước này, thay vào đó thế số lớn hơn bằng số dư của nó khi chia cho số nhỏ hơn (dừng lại khi số dư bằng không). Dạng thuật toán này chỉ tốn số bước nhiều nhất là năm lần số chữ số của số nhỏ hơn trên [hệ thập phân](https://vi.wikipedia.org/wiki/H%E1%BB%87_th%E1%BA%ADp_ph%C3%A2n). [Gabriel Lamé](https://vi.wikipedia.org/w/index.php?title=Gabriel_Lam%C3%A9&action=edit&redlink=1) chứng minh được điều này vào năm 1844, đánh dấu sự ra đời của [lý thuyết độ phức tạp tính toán](https://vi.wikipedia.org/wiki/L%C3%BD_thuy%E1%BA%BFt_%C4%91%E1%BB%99_ph%E1%BB%A9c_t%E1%BA%A1p_t%C3%ADnh_to%C3%A1n). Nhiều phương pháp khác để tăng hiệu quả của thuật toán cũng đã được phát triển trong thế kỷ 20.

Giải thuật Euclid có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết và thực tế. Nó được dùng để rút gọn [phân số](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A2n_s%E1%BB%91) về [dạng tối giản](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A2n_s%E1%BB%91_t%E1%BB%91i_gi%E1%BA%A3n) và thực hiện phép chia trong [số học module](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_h%E1%BB%8Dc_m%C3%B4_%C4%91un). Thuật toán cũng là một thành phần then chốt trong [giao thức mật mã](https://vi.wikipedia.org/wiki/Giao_th%E1%BB%A9c_m%E1%BA%ADt_m%C3%A3) để bảo mật kết nối [Internet](https://vi.wikipedia.org/wiki/Internet) và được dùng để phá vỡ hệ thống mật mã này qua [phân tích số nguyên](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A2n_t%C3%ADch_s%E1%BB%91_nguy%C3%AAn). Nó cũng được áp dụng để giải [phương trình Diophantine](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C6%B0%C6%A1ng_tr%C3%ACnh_Diophantine), chẳng hạn như tìm một số thỏa mãn nhiều biểu thức đồng dư theo [định lý số dư Trung Quốc](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BB%8Bnh_l%C3%BD_s%E1%BB%91_d%C6%B0_Trung_Qu%E1%BB%91c), để xây dựng [liên phân số](https://vi.wikipedia.org/wiki/Li%C3%AAn_ph%C3%A2n_s%E1%BB%91) hay tìm [xấp xỉ gần đúng nhất](https://vi.wikipedia.org/wiki/X%E1%BA%A5p_x%E1%BB%89_Diophantos) cho số thực. Cuối cùng, nó là công cụ cơ bản để chứng minh nhiều định lý trong [lý thuyết số](https://vi.wikipedia.org/wiki/L%C3%BD_thuy%E1%BA%BFt_s%E1%BB%91) như [định lý bốn số chính phương của Lagrange](https://vi.wikipedia.org/w/index.php?title=%C4%90%E1%BB%8Bnh_l%C3%BD_b%E1%BB%91n_s%E1%BB%91_ch%C3%ADnh_ph%C6%B0%C6%A1ng_c%E1%BB%A7a_Lagrange&action=edit&redlink=1) và [tính duy nhất của phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BB%8Bnh_l%C3%BD_c%C6%A1_b%E1%BA%A3n_c%E1%BB%A7a_s%E1%BB%91_h%E1%BB%8Dc). Thuật toán Euclid ban đầu chỉ được giới hạn về [số tự nhiên](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_t%E1%BB%B1_nhi%C3%AAn) và độ dài hình học ([số thực](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_th%E1%BB%B1c)), nhưng đến thế kỷ 19 đã được mở rộng cho nhiều dạng số khác như [số nguyên Gauss](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_nguy%C3%AAn_Gauss) và [đa thức](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90a_th%E1%BB%A9c) một biến, dẫn đến các khái niệm về [đại số trừu tượng](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BA%A1i_s%E1%BB%91_tr%E1%BB%ABu_t%C6%B0%E1%BB%A3ng) như [miền Euclid](https://vi.wikipedia.org/w/index.php?title=Mi%E1%BB%81n_Euclid&action=edit&redlink=1).

Giải thuật Euclid dùng để tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai [số tự nhiên](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_t%E1%BB%B1_nhi%C3%AAn)  và  . Ước chung lớn nhất  là số lớn nhất chia được bởi cả  và  mà không để lại số dư và được ký hiệu là ƯCLN  hoặc  .

Nếu ƯCLN  thì  và  được gọi là hai số [nguyên tố cùng nhau](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_nguy%C3%AAn_t%E1%BB%91_c%C3%B9ng_nhau). Tính chất này không khẳng định  là [số nguyên tố](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_nguy%C3%AAn_t%E1%BB%91). Chẳng hạn,  và  đều không phải là số nguyên tố vì chúng đều có thể được phân tích thành tích của các thừa số nguyên tố:  và  . Tuy nhiên,  và  nguyên tố cùng nhau vì chúng không có một thừa số chung nào.

Gọi  ƯCLN  . Vì  và  đều là bội của  nên chúng có thể được viết thành  và  , và không tồn tại số  nào để các biểu thức trên đúng. Hai số tự nhiên  và  phải nguyên tố cùng nhau vì có thể phân tích bất kỳ thừa số chung nào từ  và  để  lớn hơn. Do đó, một số  bất kỳ được chia bởi  và  cũng được chia bởi  . Ước chung lớn nhất  của  và  là ước chung (dương) duy nhất của chúng có thể chia được bởi một ước chung  bất kỳ.

ƯCLN có thể được minh họa như sau: Xét một hình chữ nhật có kích thước là  và một ước chung  bất kỳ có thể chia được hết cả  và  . Cả hai cạnh của hình chữ nhật có thể được chia thành các đoạn thẳng bằng nhau có độ dài là  để chia hình chữ nhật thành các hình vuông có cạnh bằng  . Ước chung lớn nhất  chính là giá trị lớn nhất của  để điều này có thể xảy ra. Chẳng hạn, một hình chữ nhật có kích thước  có thể được chia thành các hình vuông có cạnh là  hoặc  , nên  là ước chung lớn nhất của  và  , tức là hình chữ nhật trên có hai hình vuông nằm trên một cạnh (  ) và năm hình vuông nằm trên cạnh còn lại (  ).

Ước chung lớn nhất của hai số  và  là tích của các thừa số nguyên tố chung của hai số đã cho, trong đó một thừa số có thể được nhân lên nhiều lần, chỉ khi tích của các thừa số đó chia được cả  và  . Chẳng hạn, ta phân tích được  và  nên ước chung lớn nhất  và  bằng  (là tích của các thừa số nguyên tố chung). Nếu hai số không có một thừa số nguyên tố chung nào thì ước chung lớn nhất của chúng bằng  (một trường hợp của [tích rỗng](https://vi.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADch_r%E1%BB%97ng)), hay nói cách khác chúng nguyên tố cùng nhau. Một ưu điểm quan trọng của giải thuật Euclid là nó có thể tính được ƯCLN đó mà không cần phân tích ra thừa số nguyên tố. Bài toán [phân tích các số nguyên](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A2n_t%C3%ADch_s%E1%BB%91_nguy%C3%AAn) lớn là rất khó và tính bảo mật của nhiều [giao thức mật mã](https://vi.wikipedia.org/wiki/Giao_th%E1%BB%A9c_m%E1%BA%ADt_m%C3%A3) phổ biến được dựa trên tính chất này.

ƯCLN của ba số trở lên bằng tích của các thừa số nguyên tố chung của cả ba số đã cho, nhưng nó cũng có thể được tính bằng cách tìm ƯCLN của từng cặp số trong ba số đó.  Chẳng hạn,

ƯCLN 

ư Vì vậy, giải thuật Euclid, vốn dùng để tính ƯCLN của hai số nguyên cũng có thể được áp dụng để tính ƯCLN của một số lượng số nguyên bất kỳ.

Giải thuật Euclid gồm một dãy các bước mà trong đó, đầu ra của mỗi bước là đầu vào của bước kế tiếp. Gọi  là số nguyên dùng để đếm số bước của thuật toán, bắt đầu từ số không (khi đó bước đầu tiên tương ứng với  , bước tiếp theo là  ,...)

Mỗi bước bắt đầu với hai số dư không âm  và  . Vì thuật toán giúp đảm bảo số dư luôn giảm dần theo từng bước nên  nhỏ hơn  . Mục tiêu của bước thứ  là tìm thương  và số dư  thỏa mãn  và  . Nói cách khác, từ số lớn hơn  , trừ đi bội của số nhỏ hơn  đến khi phần dư  nhỏ hơn  .

Ở bước đầu tiên (  ), số dư  và  bằng  và  , hai số cần tìm ƯCLN. Đến bước kế tiếp (  ), hai số dư lần lượt bằng  và số dư  ở bước đầu tiên,... Do đó, thuật toán có thể được viết thành một dãy các bước:



Nếu  nhỏ hơn  thì thuật toán đảo ngược vị trí của hai số. Chẳng hạn, nếu  thì thương  bằng không và số dư  bằng  . Do đó,  luôn nhỏ hơn  với mọi  .

Vì các số dư luôn giảm dần theo từng bước nhưng không thể là số âm nên số dư sau cùng  phải bằng không và thuật toán dừng lại tại đó. Số dư khác không cuối cùng  chính là ước chung lớn nhất của  và  . Số  không thể là vô hạn vì chỉ có một số lượng hữu hạn các số nguyên dương nằm giữa số dư ban đầu  và  .

Tính đúng đắn của giải thuật Euclid có thể được chứng minh qua hai bước lập luận.

Bước thứ nhất, cần chứng minh số dư khác không cuối cùng  chia được cả  và  . Vì  là một ước chung nên nó phải nhỏ hơn hoặc bằng với ước chung lớn nhất  .

Bước thứ hai, cần chứng minh rằng bất kỳ ước chung nào của  và  , trong đó có  cần phải chia được  ; từ đó,  phải nhỏ hơn hoặc bằng  . Hai kết luận trên là mâu thuẫn trừ khi  .

Để chứng tỏ  chia được cả  và  , cần biết  chia được số dư liền trước  :  vì số dư cuối cùng  bằng không.  cũng chia được số dư  :  vì nó chia được cả hai số hạng trong vế phải của phương trình. Chứng minh tương tự,  cũng chia được tất cả số dư liền trước nó kể cả  và  . Không có số dư liền trước  ,  ,... chia bởi  và  cho số dư bằng không. Vì  là ước chung của  và  nên  .

Trong bước thứ hai, một số tự nhiên  bất kỳ chia được cả  và  (là ước chung của  và  ) cũng chia được số dư  . Theo định nghĩa thì  và  có thể được viết thành bội của  :  và  với  và  là các số tự nhiên. Ta có  nên  là một ước của số dư ban đầu  . Chứng minh như bước thứ nhất, ta thấy  cũng là ước của các số dư liền sau  Từ đó, ước chung lớn nhất  là ước của  hay  . Kết hợp hai kết luận thu được, ta có  . Vậy  là ước chung lớn nhất của tất cả cặp số liền sau:



***I. Phương pháp giải***

Muốn tìm ƯCLN của  và  (giả sử 

*Bước 1:* Chia  cho  có số dư là 

*Bước 2:*

+ Nếu  thì ƯCLN  . Việc tìm ƯCLN dừng lại.

+ Nếu  , ta chia tiếp  cho  , được số dư 

- Nếu  thì  . Dừng lại việc tìm ƯCLN

- Nếu  thì ta thực hiện phép chia  cho  và lập lại quá trình như trên.

ƯCLN *** là số dư khác  nhỏ nhất trong dãy phép chia nói trên.***

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Hãy tìm ƯCLN  bằng thuật toán Ơclide

***Lời giải:***

Ta có: 









 (chia hết)

Vậy ƯCLN 

Trong thực hành làm như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 1575 | 343 |
|  |  |  |  | 343 | 203 | 4 |
|  |  |  | 203 | 140 | 1 |  |
|  |  | 140 | 63 | 1 |  |  |
|  | 63 | 14 | 2 |  |  |  |
| 14 | **7** | 4 |  |  |  |  |
| 0 | 2 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Vậy ƯCLN 

**Bài 2:** Tìm ƯCLN  bằng thuật toán Euclide

***Lời giải:***

Ta có: 

  ƯCLN  .

**Bài 3:** Chứng minh rằng ƯCLN  .

***Lời giải:***

Cách 1:

Gọi  .

Vậy ƯCLN  .

Cách 2:

Ta có: 

Mà  chia cho  dư 

Suy ra ƯCLN 

**Bài 4:** Chứng minh rằng  và  là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

**Cách 1:**

Gọi  .

Mà  và  lẻ nên  lẻ. Suy ra  .

Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Cách 2:**

Ta có:   chia cho  dư 

Suy ra ƯCLN  (Vì  lẻ ,  là số chẵn).

Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 5:** Biết số  gồm  chữ số  và  gồm  chữ số  . Hãy tìm ƯCLN 

***Lời giải:***

Ta có 

Vì 

Ta có: 

**Bài 6:** Số  gồm  chữ số  , Y gồm  chữ số  . Tìm ƯCLN 

***Lời giải:***

Có: 



Từ  ƯCLN 

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên  , biết rằng khi chia  và  cho  thì số dư lần lượt là  và 

***Lời giải:***

Theo đầu bài ta có:



ƯCLN 

Vì  chia cho  dư  

Vậy 

**Bài 8:** Người ta đếm số trứng trog một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng  quả thì lần nào cũng dư  quả. Tính số trứng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn  và nhỏ hơn  quả.

***Lời giải:***

Gọi số trứng trong rổ là  (  )

Ta có: 

Theo  

Vạy số trứng trong rổ là  quả

**Bài 9:** Một trường học có số lượng học sinh không quá  . Khi xếp hàng  thì đều dư  . Nhưng khi xếp hàng  thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường?

***Lời giải:***

Gọi số học sinh của trường là:  (  )

Theo bài ra ta có: 

Lại có: 

Mà 

Vậy số học sinh của trường là  (học sinh).

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho  thì số dư lần lượt là 

***Lời giải:***

Gọi số tự nhiên cần tìm là:  (  )

Theo bài ta có: 

Ta tìm số  sao cho: 

Nhận thấy: 

Vì  nhỏ nhất





Vậy số tự nhiên cần tìm là  .

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho  dư  , chia cho  dư  , chia cho  dư 

***Lời giải:***

Gọi số cần tìm là  , ta có: 





Mà  nhỏ nhất  nhỏ nhất 

Do ƯCLN 



Vậy số tự nhiên cần tìm là:  .

**Bài 12:** Cho  là các số tự nhiên khác  sao cho  là số tự nhiên. Gọi  là ƯCLN của  . Chứng minh rằng: 

***Lời giải:***

 , đặt 



**Bài 13:** Một số tự nhiên chia cho  dư  , chia cho  dư  . Nếu đem số đó chia cho  thì dư bao nhiêu?

***Lời giải:***

Gọi số đó là 

Vì  chia cho  dư  , chia cho  dư  

mà ƯCLN  nên 



Vậy  chia cho  dư  .

**Bài 14:** Tìm số tự nhiên  biết rằng khi chia  cho  ta được số dư là  và khi chia  cho  có số dư là  .

***Lời giải:***

Theo đề khi chia  cho  ta được số dư là  nên ta có  với  và  hay  (1) và khi chia  cho  có số dư là   với  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  là số tự nhiên cần tìm.

**Bài 15:** Một số chia cho  dư  , chia cho  dư  , chia cho  dư  . Hỏi số đó chia cho  dư bao nhiêu?

***Lời giải:***

Gọi số đã cho là  . Theo bài ra ta có: 

Mặt khác: 

Như vậy  đồng thời chia hết cho  và  .

Nhưng ƯCLN  



Do  nên  là số dư của phép chia số  cho  .

**Bài 16:** Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho  thì dư  và chia nó cho  thì dư  .

***Lời giải:***

Gọi số cần tìm là  (  )

Vì a chia cho  thì dư  và chia nó cho  thì dư  nên:



Vì 

Vì  là số có 3 chữ số lớn nhất nên  , khi đó 

Vậy số cần tìm là  .

**Bài 17:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số biết rằng số đó chia cho  đều dư  .

***Lời giải:***

Gọi số cần tìm là  . điều kiện 

Vì  chia cho  đều dư  

Mà  nhỏ nhất nên  nhỏ nhất 

Mà ƯCLN 



Vậy số cần tìm là  .

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất sao cho  chia cho  thì dư  ,  chia cho  thì dư  .

***Lời giải:***

Ta có  chia cho  thì dư  ,  chia cho  thì dư 

 và  và 

 và  là bội chung của  và 

Vì  là số tự nhiên nỏ nhất nên 

**Bài 19:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho  , cho  , cho  , cho  đều dư là  , còn chia cho  thì dư  .

***Lời giải:***

Gọi số tự nhiên cần tìm là  

Ta có khi chia  cho  , cho  , cho  , cho  đều dư là 



Nên  nhận các giá trị 

Mặt khác  là số nhỏ nhất chia cho  thì dư  tức là  là số nhỏ nhất chia hết cho 

 (vì  thì  không chia hết cho  ).

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng  và ƯCLN bằng  .

***Lời giải:***

Gọi 2 số cần tìm là  và  , giả sử 

Vì ƯCLN 

Ta có 

Lập bảng:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Vậy hai số cần tìm là  và  ;  và  ;  và  .

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  biết  chia hết cho  .

***Lời giải:***

Ta có 

Vì  nên để  thì 

 phải là ước của  

Mà  nên 

Vậy  thì  chia hết cho  .

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  biết  là số tự nhiên.

***Lời giải:***

Để  là số tự nhiên thì  chia hết cho 

 chia hết cho  chia hết cho 

Mà  nên  phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng  và đồng thời là ước của 



Vậy  thì  là số tự nhiên.

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  biết 

***Lời giải:***

Ta có 

Vì  nên để  thì 

Mà  nên  phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng  và đồng thời là ước của 



Vậy  thì 

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  biết  có giá trị là một số nguyên

***Lời giải:***

Ta có  là một số nguyên khi 

Ta có  do đó  khi 

 là ước của 



Vậy  thì  có giá trị là một số nguyên.

**Bài 6:** Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng  , ƯCLN của chúng bằng  và các số đó trong khoảng từ  đến  .

***Lời giải:***

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là  và giả sử 

Đặt ƯCLN  với 

Mà ƯCLN  nên  là ước của  hay 

Xét  ta có  với ƯCLN  nên ta có các trường hợp của m, n như sau:

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

*Trường hợp 3:* 

Xét  ta có  (không thỏa mãn)

**Bài 7:** Cho  Tìm ƯCLN của  và 

***Lời giải:***

Gọi 

-Nếu  

Vậy nếu  có dạng  thì 

**Bài 8:** Tìm ƯCLN  với 

***Lời giải:***



Giả sử  ,  là ước nguyên tố của 

 (vô lý) 

**Bài 9:** Tìm ƯCLN của  và 

***Lời giải:***

Gọi ƯCLN 

Khi đó ta có: 



Do  mà  không chia hết cho  , nên  (loại)

Do đó 

- Để  thì  phải chẵn

- Để  thì  phải chia hết cho 

- Để  thì  là số lẻ

Vậy  thì ƯCLN 

 thì ƯCLN 

 thì ƯCLN  .

**Bài 10:** Biết  . Tìm 

***Lời giải:***

Gọi ƯCLN 

 hoặc 

và  hoặc  hoặc 

mà ƯCLN  nên  hoặc 

Vậy ƯCLN  hoặc  .

**Bài 11:** Học sinh khối 6 khi xếp hàng; nếu xếp hàng  , hàng  , hàng  đều dư  học sinh. Nhưng khi xếp hàng  thì vừa đủ. Biết số học sinh khối 6 chưa đến  học sinh. Tính số học sinh khối 6?

***Lời giải:***

Gọi số học sinh khối 6 là  

Vì khi xếp hàng  , hàng  , hàng  đều dư  học sinh

 

 

Ta có: 

 

 

mà 

Vậy số học sinh khối 6 là  học sinh.

**Bài 12:** Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là:  ;  ;  ;  ;  . Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài?

***Lời giải:***

Tổng số xoài và cam lúc đầu: 

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho  , mà  chia cho  dư  nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho  dư  .

Trong các số  chỉ có  chia cho  dư  .

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ  .

Số xoài và cam còn lại: 

Số cam còn lại: 

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng  ;  .

Các giỏ xoài là giỏ đựng  .

**Bài 13:** Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được  còn lại mỗi bạn thu được  . Lớp 6B có 1 bạn thu được  còn lại mỗi bạn thu được  . Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng  đến  .

***Lời giải:***

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là  và 

Do đó  và 

Số học sinh lớp 6A là:  (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là:  (học sinh)

**Bài 14:** Số học sinh khối 6 của một tr­ường ch­ưa đến  bạn, biết khi xếp hàng  đều dư­  nh­ưng nếu xếp hàng  thì không dư­. Tính số học sinh khối 6 của tr­ường đó.

***Lời giải:***

Gọi số học sinh là 

Vì số học sinh khi xếp hàng  đều dư­  

Mà 

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Vì số học sinh chưa đến  bạn và khi xếp hàng  thì không dư nên  và 

Trong các giá trị trên, chỉ có  thỏa mãn bài toán

Vậy số học sinh cần tìm là  học sinh.

**Bài 15:** Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có  người, hoặc  người, hoặc  người đều thừa  người. Nếu xếp mỗi hàng  người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến  ?

***Lời giải:***

Gọi số người của đơn vị bộ đội là 

Ta có  dư 

 dư 

 dư 



Ta có 



Mà  nên chỉ xét  khi đó 

Vì số bộ đội khi xếp mỗi hàng  người thì vừa đủ tức là:  do đó có  thỏa mãn bài toán

Vậy đơn vị bộ đội có  người.

**Bài 16:** Cho  là hai số tự nhiên. Gọi  là tập hợp các ước chung của  và  .  là tập hợp các ước số chung của  và  . Chứng minh rằng 

***Lời giải:***

Gọi 

Khi đó ta có:  

Tương tự ta có:  

Từ  và  ta có: 

Mà 

Suy ra .

🙢**HẾT**🙠