**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ - ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT**

**CHỦ ĐỀ 1: CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN VÀ BÀI TOÁN ƯCLN VÀ BCNN**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. ĐỊNH NGHĨA VỀ ƯỚC VÀ BỘI**

**Ước:**  Số tự nhiên  được gọi là ước của số tự nhiên *a* khi và chỉ khi *a* chia hết cho *d .* Ta nói *d*  là ước của *a*.

*Nhận xét:* Tập hợp các ước của a là Ư

**Bội:** Số tự nhiên *m* được gọi là bội của  khi và chỉ khi *m* chia hết cho *a* hay *a* là một ước số  *m.*

*Nhận xét:* Tập hợp các bội của *a* là 

**2) Tính chất:**

**-** Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số  và  là ước của mọi số nguyên.

**-** Nếu Ư thì a là số nguyên tố.

- Số lượng các ước của một số : Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên  là  … thì số lượng các ước của  bằng  …

Thật vậy ước của  là số có dạng …trong đó:

 có  cách chọn (là)

 có  cách chọn (là)

 có  cách chọn (là),…

Do đó, số lượng các ước của  bằng 

**II. Ước chung và bội chung**

**1) Định nghĩa**

**Ước chung (ƯC):** Nếu hai tập hợp Ư và Ư có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của *a* và b. Kí hiệu: ƯC.

*Nhận xét:* Nếu ƯCthì *a* và  *b* nguyên tố cùng nhau.

**Ước chung lớn nhất (ƯCLN):**Số  được gọi là ước số chung lớn nhất của  *a*  và *b*  khi  *d* là phần tử lớn nhất trong tập hợp ƯC. Kí hiệu ước chung lớn nhất của  *a* và *b*  là ƯCLN hoặc  hoặc *gcd**.*

**Bội chung (BC):** Nếu hai tập hợp B và B có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của *a* và *b*. Kí hiệu BC.

**Bội chung nhỏ nhất (BCNN):**Số  được gọi là bội chung nhỏ nhất của  *a*  và *b*  khi  *m*  là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp BC. Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của *a* và *b* là BCNN hoặc  hoặc *lcm**.*

**2) Tính chất**

**Một số tính chất của ước chung lớn nhất:**

● Nếu thì ta nói các số  nguyên tố cùng nhau.

● Nếu  thì ta nói các số  đôi một nguyên tố cùng nhau.

● ƯCthì 

● 

● 

●  và thì

● 

● Cho 

- Nếu  thì 

- Nếu  thì 

**Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:**

● Nếu  thì 

● 

● 

● 

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Các tính chất và bài toán cơ bản về ƯCLN và BCNN**

***I. Phương pháp giải***

Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên  là  … thì số lượng các ước của  bằng  …

Thật vậy ước của  là số có dạng …trong đó:

 có  cách chọn (là)

 có  cách chọn (là)

 có  cách chọn (là),…

Do đó, số lượng các ước của  bằng 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số ước của số .

***Lời giải:***

Ta có : 

Vậy số ước của số  là 

**Bài 2:** Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

***Lời giải:***

Giả sử với  nguyên tố và 

n là số chính phương khi và chỉ khi là các số chẵn khi đó  là số lẻ.

Mặt khác  là số các số ước của n, do đó bài toán được chứng minh.

**Bài 3:** Một số tự nhiên *n* là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng *n* không thể có đúng 17 ước số.

*Lời giải*

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

 không thể là số chính phương.

Nếu *n*  có đúng 17 ước số thì *n*  là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3:** Cho  Chứng minh rằng:

a)  c) 

b)  d) 

*Lời giải*

a) Đặt 

c) 

Giả sử  Gọi p là số ước nguyên tố của d (1 số tự nhiên khác 1 bào giờ cũng tồn tại ít nhất một ước nguyên tố) 

Ta có:  (vô lý)

Vậy 

d) 

**Bài 3:** Biết rằng  là bội chung của . Chứng minh rằng:

1.  là bội của  b)  là bội của 

*Lời giải*

a)  (do c có một chữ số,  có hai chữ số)

- 

Đặt 

- 



Vì  đpcm

b)  đpcm

**Bài 4:** Biết rằng 

a.  nhỏ hơn 10 lần (a, b). Số thứ nhất là 120, tìm số thứ hai

b. (a, b) = 12, [a, b] lớn gấp 6 lần (a, b). Số thứ nhất là 24, tìm số thứ hai

c. Tổng cuả hai số bằng 60, tổng giữa UCLN và BCNN của chúng là 84. Tìm hai số đó

*Lời giải*

a. Ta có: 

b. Số thứ hai là 36

c. Gọi hai số phải tìm là: a và b

 đặt ; 

Có: 

Vì tổng của hai bằng 60 nên 

Từ (1)(2) 

Hoặc 

**Dạng 2: Tìm số nguyên  để thỏa mãn điều kiện chia hết**

***I. Phương pháp giải***

Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  để  chia hết cho .

***Lời giải:***

Ta có: 

Mà  chia hết cho 

Do đó  chia hết cho 4 chia hết cho  là ước của 4.



Do đó 

Vậy với  thì  chia hết cho .

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  để  là số tự nhiên.

***Lời giải:***

Để  là số tự nhiên thì  chia hết cho .

 chia hết cho .

12 chia hết cho .

 là Ư.



Vậy với  thì  là số tự nhiên.

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  để .

***Lời giải:***

Ta có: 

Suy ra:  

Do đó   Ư

Vậy  thì .

**Bài 4:** Tìm số nguyên  để phân số  có giá trị là một số nguyên.

***Lời giải:***

Ta có: 

Vì 2 là số nguyên nên để  là số nguyên thì  là số nguyên

Suy ra  Ư

  

Vậy với  thì  có giá trị là một số nguyên.

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  để biểu thức sau là số tự nhiên:



*Lời giải*

Ta có:



Để  là số tự nhiên thì  là số tự nhiên

   Ư

Do  nên .

Vậy  thì  là số tự nhiên.

**Bài 6:** Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số  là một số nguyên dương.

*Lời giải*

Ta có:  n là một số nguyên dương khi và chỉ khi 

Ta có 484 = 222 = 4.121= 44.21

Với , ta có 

Với , ta có 

Vậy giá trị  lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

**Dạng 3: Tìm số tự nhiên khi biết điều kiện về tổng, tích, thương các số và dữ kiện về ƯCLN, BNCC.**

***I. Phương pháp giải***

- Biết ƯCLN(a, b) = k thì  và  với ƯCLN(m, n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b

- Biết BCNN(a, b) = k thì ta gọi ƯCLN(a, b) = d thì  và  với ƯCLN(m, n) = 1

(là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm hai số nguyên dương  biết  và ƯCLN(a, b) = 16.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

Giả sử . Ta có ƯCLN(a, b) = 16

 với ; ƯCLN

Biết 

Vì ƯCLN nên ta có hai trường hợp của m và n

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

**Bài 2:** Tìm hai số tự nhiên a, b, biết rằng:  và ƯCLN

***Lời giải:***

Điều kiện: . Giả sử 

Ta có: 

Đặt với 

Từ 

Do  , lập bảng:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 8 | 7 | 6 | 5 |
|  | 18 | 36 | loai | 72 |
|  | 144 | 126 |  | 90 |

Kết luận: Các số cần tìm là: 

**Bài 3:** Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

***Lời giải:***

Gọi hai số cần tìm là  

Ta có: 

Đặt 

Lại có: 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 13 | 7 | 195 | 105 |
| 11 | 5 | 65 | 75 |
| 7 | 1 | 85 | 15 |

Vậy: 

**Bài 4:** Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6.

***Lời giải:***

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là . Điều kiện: .

Ta có: 

Đặt  với (m, n) = 1 và m ***≤***  n 

Ta được:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| m | n | a | b |
| 1 | 12 | 6 | 72 |
| 3 | 4 | 18 | 24 |

Vậy .

**Bài 5:** Tìm hai số  biết  và ƯCLN.

*Lời giải*

Từ  suy ra 

Từ ƯCLN 

Mà:  vì => 

Vậy hai số  cần tìm là  và.

**Bài 6:** Cho 

a) Tìm  và .

b) So sánh với  Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên và  khác tùy ý.

*Lời giải*

a) 

ƯCLN(1980, 2100) 



b) ( đều bằng ). Ta sẽ chứng minh rằng 

*Cách 1.* Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn  chứa thừa số không chứa thừa số  thì ra coi như chứa thừa số  với số mũ bằng . Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:





 là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất .  là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất 

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

 

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của  chính là các thừa số nguyên tố có trong và  Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi là thừa số nguyên tố tùy ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của trong  là số mũ của  trong là trong đó  và có thể bằng  Không mất tính tổng quát, giả sử rằng  Khi đó vế phải của  chứa  với số mũ . Còn ở vế trái, [a, b] chứa  với số mũ x, (a, b) chứ p với số mũ  nên vế trái cũng chứa  với số mũ 

*Cách 2.* Gọi  thì , trong đó 

Đặt , ta cần chứng minh rằng .

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho ,  và (x, y) = 1.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra ,

 Do đó, ta chọn  thế thì  vì 

Vậy tức là 

**Bài 7:** Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng , BCNN của chúng bằng 900.

*Lời giải*

Gọi các số phải tìm là  và . Điều kiện: . Giả sử .

Ta có  nên. , ,  Do đó . Mặt khác 

Từ  và  suy ra  Ta có các trường hợp :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 90 | 45 | 18 | 10 |

Suy ra:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10 | 20 | 50 | 90 |
|  | 900 | 450 | 180 | 100 |

**Bài 5:** Tìm hai số tự nhiên  sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15.

*Lời giải*

Điều kiện: . Giả sử .

Gọi d = ƯCLN( a; b) , và d < 15

Nên BCNN(a; b) = 

Theo bài ra ta có: , Mà d < 15, Nên

TH1 :  hoặc 

TH2 : 

TH3 : 

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (1 ;14), (2 ; 7), (3 ; 12), ( 5 ; 10) và đảo ngược lại.

**Bài 8:** Tìm hai số nguyên dương  biết  và ƯCLN.

*Lời giải*

Điều kiện: . Giả sử . Ta có ƯCLN.



Biết 

Vì ƯCLN nên ta có hai trường hợp

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 9:** Tìm hai số nguyên dương  biết  và ƯCLN .

*Lời giải*

Điều kiện: 

ƯCLN 

Biết  với ƯCLN (m, n) = 1.

 và  và 

**Bài 10:** Tìm  biết  và .

*Lời giải*

Gọi ƯCLN với ; 

Không mất tính tổng quát, giả sử  nên 

Biết 

Biết 

 là ước chung của 42 và 72 

Lần lượt thay các giá trị của d và (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp  thì  và 

 (thỏa mãn các điều kiện của m và n)

Vậy  và .

**Bài 11:** Tìm hai số nguyên dương  biết , .

*Lời giải*

Điều kiện: 

Đặt ƯCLN với ƯCLN

Biết 

Từ đây bài toán đã biết  và 

 hoặc .

**Bài 12:** Tìm  biết  và .

*Lời giải*

Đặt ƯCLN.

Vì , mặt khác 

Mà , nên 

Từ đây bài toán đã biết  và 

.

**Bài 13:** Tìm hai số tự nhiên  biết  và 

*Lời giải*

Điều kiện: .

Gọi ƯCLNƯCLN

Biết 

Biết 

 là ước chung của 7 và 140



Thay lần lượt các giá trị d vào (1) và (2) để tính m, n ta được kết quả duy nhất  thì  và  (thỏa mãn )

Vậy  và .

**Bài 14:** Tìm hai số tự nhiên  biết  và ƯCLN

*Lời giải*

Điều kiện: . Giả sử .

Biết ƯCLNƯCLN

Mà  nên 

Mà ƯCLN nên có các trường hợp của số m, n như sau

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

*Trường hợp 3:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 15:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

*Lời giải*

Gọi các số phải tìm là  và . Điều kiện: . Giả sử .

Biết ƯCLNƯCLN

Mà 

Vì ƯCLN nên có các trường hợp của số m, n như sau

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 16:** Cho , tìm số nguyên tố  có 2 chữ số sao cho ƯC

*Lời giải*

Vì số ƯC

 cũng là ước của hiệu 

Mà  là số nguyên tố có hai chữ số nên .

Vậy số nguyên tố cần tìm là .

**Bài 17:** Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 300 và ƯCLN bằng 5.

*Lời giải*

Gọi các số phải tìm là  và . Điều kiện: . Giả sử .

Biết ƯCLNƯCLN

Mà  nên 

Mà ƯCLN nên có các trường hợp của số m, n như sau

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 18:** Tìm hai số tự nhiên  và  , biết: ƯCLN.

*Lời giải*

Điều kiện: .

Vì ƯCLN và 

ƯCLN

Mà  nên  Khi đó có các trường hợp của số m, n như sau

*Trường hợp 1:*  (thỏa mãn)

*Trường hợp 2:*  (thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 19:** Tìm hai số tự nhiên  và , biết: ƯCLN.

*Lời giải*

Điều kiện: .

Vì ƯCLN nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

 và 

Vì  nên theo trên ta suy ra 

Vì 

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp  là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy  ta được các số phải tìm là .

**Bài 20:** Tìm hai số tự nhiên  và , biết: ƯCLN

*Lời giải*

Điều kiện: .

Vì ƯCLN nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

 và 

Vì 

Vì 

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp  hoặc  là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy  hoặc  ta được các số phải tìm là: .

**Bài 21:** Tìm hai số tự nhiên  và , biết: ƯCLN.

*Lời giải*

Điều kiện: . Giả sử 

Biết ƯCLNƯCLN



Mà 

Vì ƯCLN nên ta có các trường hợp của số m, n như sau

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

*Trường hợp 3:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 22:** Tìm hai số tự nhiên  và , biết: 

*Lời giải*

Điều kiện: . Giả sử 

Biết *ƯCLN* *ƯCLN* 



Mà 

Vì ƯCLN nên ta có các trường hợp của số  như sau

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

*Trường hợp 3:* 

Vậy hai số cần tìm là .

**Bài 23:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng ƯCLN và BCNN của chúng bằng 23

*Lời giải*

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là  và giả sử 

Đặt ƯCLN với ƯCLN

Mà ƯCLN nên  là ước của 23 hay 

Xét  ta có  với  nên ta có các trường hợp của  như sau:

*Trường hợp 1:* 

*Trường hợp 2:* 

Xét  ta có  (không thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 

**Bài 24:** Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 400.

*Lời giải*

Gọi các số phải tìm là  và . Điều kiện: .

Ta có ƯCLNvới  và  nguyên tố cùng nhau

Ta có 

Theo bài ra ta có  Chọn hai số có hiệu bằng 3 trong khoảng từ 11 đến 15 là 11 và 14; 12 và 15

Chi có 11 và 14 là hai số nguyên tố cùng nhau 

Vậy hai số cần tìm là 308 và 392.

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG**

**Bài 1:** Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0:  và , sao cho:  và .

*(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh năm 1992 – 1993)*

***Lời giải***

Gọi  và 

 vì 



 là ước số của  là ước số của 

 là ước số của 2  hoặc .

Nếu  hoặc 

Nếu  vô nghiệm.

Tóm lại 

**Bài 2:** Tìm tất cả các cặp số  nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

1.  đều khác  và ước số chung lớn nhất của  là .
2. Số  có đúng  ước số nguyên dương.

*(Trích đề học sinh giỏi toán Đăk Lăk năm học 2017-2018)*

***Lời giải***

Ta có:  chia hết cho các số: 

Hay  có  ước dương Nên để  chỉ có đúng  ước dương thì  là số nguyên tố. Do 

Nếu  cùng lẻ thì  chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử  chẵn  lẻ .

Ta cũng có nếu  không chia hết cho 3 thì  và  chia hết cho 3 là hợp số (vô lý).

Vậy .

**Bài 3:** Cho hai số tự nhiên  và  thoả mãn  là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của  và  không lớn hơn .

*(Trích đề học sinh giỏi Hải Dương năm học 2004-2005)*

***Lời giải***

Gọi  là ƯCLN suy ra  cùng chia hết cho .

Do  là số nguyên nên cũng chia hết cho .

Suy ra  chia hết cho .

**Bài 4:** Cho ba số nguyên dương  đôi một khác nhau và đồng thời thỏa mãn các điều kiện:

1.  là ước của ,
2. b là ước của ,
3. c là ước của ,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số  thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng  không thể đồng thời là các số nguyên tố.

*(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)*

***Lời giải***

a) Dễ thấy bộ số thỏa mãn đề bài

b) Đặt .

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho .

Vì  đôi một khác nhau, do đó  đồng thời là các số nguyên tố thì  hay

Không mất tính tổng quát, giả sử .

Nếu  thì  đều lẻ  lẻ nên không chia hết cho .

Do đó  nên . Từ  suy ra



Vậy  không thể đồng thời là các số nguyên tố.

**Bài 5:** Tìm  biết:

a) 

b) 

c) 

***Lời giải***

a) Gọi  và . Ta có: 

Theo đề bài, ta có:  hay . Như vậy  là ước của 55, mặt khác .

Ta có lần lượt

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 11 | 5 |  | 1 | 4 | 11 | 44 |
| 5 | 11 |  | 1  2 | 10  5 | 5  10 | 50  25 |
| 1 | 55 |  | 1  2 | 54  27 | 1  2 | 54  27 |

b) Giải tương tự câu a) ta được: . Từ đó:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 5 | 6 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 10 | 5 |

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

**Bài 6:**  Tìm

***Lời giải***

Đặt và  . Áp dụng tính chất  , ta có 

Dễ thấy  , suy ra  do 

Lại áp dụng tính chất  thế thì 

Gọi  . Do  nên 

Xét hai trường hợp:

- Nếu  chẵn thì , suy ra 

- Nếu  lẻ thì , suy ra

**Bài 7:** Tìm *biết * để các số  và  có ước chung lớn hơn 1.

***Lời giải***

Gọi  là một ước chung của  và  **

Ta có  và  nên 

Để  và  có ước chung lớn hơn 1, ta phải có 

Hay  mà ƯCLN nên 

Do đó .

Vì  nên .

Với , khi đó  và  (thỏa mãn)

Với , khi đó  và  (thỏa mãn)

Vậy .

**Bài 8:** Tìm hai số nguyên dương biết và ƯCLN

***Lời giải***

Gọi ƯCLN

Mà :  (1)

Ta lại có: ƯCLN 

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Mà:  hoặc 

TH1:  (loại)

TH2: 

Vậy  và 

**Bài 9:** Cho  Chứng minh rằng: 

***Lời giải***

Ta có:



Do đó  (vì  lẻ)

Vậy 

**Bài 10:** Cho  Tìm 

***Lời giải***

Đặt  Khi đó tồn tại các số tự nhiên  sao cho 

Đặt  lẻ.

Ta có:

 (vì )

 (vì )

Do đó 

Mặt khác: 

Mà 

Từ đó suy ra 

Vậy 

**Bài 11:** Cho  là các số nguyên lớn hơn . Chứng minh rằng: 

***Lời giải***

Giả sử  và  suy ra:



Vậy  và 

Ngược lại, nếu  và  thì 

Vậy 

**Bài 12:** Chứng minh rằng nếu  là các số lẻ thì 

***Lời giải***

Giả sử  thì  lẻ.

Ta có  và 

Tương tự: và 

Vậy  là ước của 

Ngược lại, giả sử  là ước của  thì  là ước của 

Tương tự  và 

Vậy: 

**Bài 13:** Tìm tất cả các cặp số  nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i)  đều khác  và ước số chung lớn nhất của  là .

ii) Số  có đúng  ước số nguyên dương.

***Lời giải***

Ta có:  chia hết cho các số :  có  ước dương. Nên để chỉ có đúng  ước dương thì  là số nguyên tố. Do 

Nếu  cùng lẻ thì  chia hết cho  nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử  chẵn  lẻ thì suy ra 

Ta cũng có nếu  không chia hết cho  thì  và  chia hết cho  là hợp số (vô lý), suy ra 

Vậy 

**Bài 14:** Tổng các số tự nhiên bằng  Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

***Lời giải***

Giả sử ,khi đó , suy ra  là ước của 

Vì  nên  Vậy  chỉ có thể nhận các giá trị 

Giá trị  lớn nhất bằng  khi  (vì )

**Bài 15:** Cho  Tìm 

***Lời giải***

Giả sử  khi đó  và  suy ra

 hoặc 

* Nếu  thì từ 
* Nếu  thì  hoặc 

Vậy  bằng  hoặc bằng 

🙢 **HẾT** 🙠