**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2 - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN**

**CHỦ ĐỀ 6: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Tìm 1 chữ số tận cùng**

**Tính chất 1:**

a) Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc  thì chữ số tận cùng là .

d) Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc  thì chữ số tận cùng là .

**Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên** **, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của** **:**

- Nếu chữ số tận cùng của  là  thì  cũng có chữ số tận cùng là .

- Nếu chữ số tận cùng của  là :

Phân tích:  với 

Từ tính chất 1c  chữ số tận cùng của  chính là chữ số tận cùng của .

- Nếu chữ số tận cùng của  là : cũng như trường hợp trên

Từ tính chất 1d  chữ số tận cùng của  chính là chữ số tận cùng của .

**Tính chất 2:**

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc  thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

**Tính chất 3:**

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc  sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc  sẽ có chữ số tận cùng là .

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc  sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc  sẽ có chữ số tận cùng là .

c) Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc  sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

**Tính chất 4:**

Nếu  và  thì  chia hết cho .

**Chứng minh:**

Do  chia hết cho 25 nên  khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

 chia hết cho 5.

Vậy  chia hết cho 125.

**\* Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số**  **với** **.**

- Giả sử . Khi đó,  với 

Suy ra, chữ số cuối cùng của  chính là chữ số cuối cùng của số .

- Nếu  thì  là hai chữ số cuối cùng của .

- Nếu  thì  là ba chữ số cuối cùng của .

- Nếu  thì  là  chữ số cuối cùng của .

**2. Tìm hai chữ số tận cùng**

**Việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên**  **chính là việc tìm số dư của phép chia**  **cho 100.**

Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên :

Trước hết, ta có nhận xét sau:









Mà:  với ,

 với .

Suy ra kết quả sau với 

 nếu ,

 nếu ,

 nếu ,

 nếu .

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của  ta lấy số mũ  chia cho .

**Một số trường hợp cụ thể về 2 chữ số tận cùng**

- Các số có tận cùng bằng  nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 

- Các số  (hoặc );  có tận cùng bằng .

- Các số  có tận cùng bằng .

- Số  có tận cùng bằng .

- Các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì khác 0 thì hai chữ số tận cùng vẫn không thay đổi. (1)

- Các số  có chữ số tận cùng là . (2)

- Các số có chữ số tận cùng là . (3)

- Số có chữ số tận cùng là . (4)

Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên , trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

**CHÚ Ý:**

- có 2 chữ số tận cùng là .

- có 2 chữ số tận cùng là .

- có 2 chữ số tận cùng là .

- có 2 chữ số tận cùng là .

**3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên**

**Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên**  **chính là việc tìm số dư của phép chia**  **cho 1000.**

Giả sử  với , khi đó: .

Giả sử: , 

Ta có: 

Vậy 3 chữ số tận cùng của  cũng chính là 3 chữ số tận cùng của 

Dùng quy nạp với mọi , ta có:

,

.

- Nếu  thì 

- Nếu  thì  

- Nếu  ta có tương ứng:

 

- Nếu  thì .

Ta có:  nên  (Định lí Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của  là  ta có:

  và 

Trong các số  (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất một số chia hết cho 8 là 376. Vậy 

Do đó ta có kết quả sau:

 nếu 

 nếu 

 nếu 

 nếu 

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của  ta tìm  chữ số tận cùng của số mũ .

**Một số trường hợp cụ thể về 3 chữ số tận cùng**

* Các số có tận cùng bằng  nâng lên luỹ thừa nào (khác ) cũng tận cùng bằng .
* Các số có tận cùng bằng  nâng lên luỹ thừa nào (khác ) cũng tận cùng bằng .

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Tìm 1 chữ số tận cùng**

**Ví dụ 1.1:** Tìm chữ số tận cùng của 

**Lời giải:**

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên luỹ thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1.

Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

Do đó:



    Vậy chữ số tận cùng của  là 

**Ví dụ 1.2:**  Tìm chữ số tận cùng của các số sau:



**Phân tích:**

- Ta biết rằng các số có chữ số tận cùng là  khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

- Để tìm chữ số tận cùng của mỗi lũy thừa trên ta chỉ cần tìm chữ số tận cùng của hàng đơn vị.

**Lời giải**

a)  có chữ số tận cùng là 

b)  có chữ số tận cùng là 

c) Theo câu a) và b)  Chữ số tận cùng của lũy thừa :  là 

1. Theo kết quả câu a) và b)  Chữ số tận cùng của lũy thừa:  là.

**Ví dụ 1.3:**  Tìm chữ số tận cùng của

**Phân tích:**

Để tìm được chữ số tận cùng của số trên ta phải đưa về số có tận cùng là .

**Lời giải**

Ta thấy , số tận cùng bằng  nâng lên bậc lũy thừa nào cũng có chữ số tận cùng bằng  nên ta phân tích **.**

Vậy số có chữ số tận cùng bằng .

**Ví dụ 1.4:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:



**Lời giải**



Vậy chữ số tận cùng của  là .



Vậy chữ số tận cùng của  là .



Vậy chữ số tận cùng của  là .



Vậy chữ số tận cùng của là .



Vậy chữ số tận cùng của là: .



Vậy chữ số tận cùng của  là .

**Ví dụ 1.5:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:



**Lời giải**

1. Ta có: 

Vậy chữ số tận cùng của  là .

1. Ta có: 



Vậy chữ số tận cùng của  là .

1. Ta có: 





Vậy chữ số tận cùng của là .

**Ví dụ 1.6:** Tìm chữ số tận cùng của các phép toán sau:



**Lời giải**

1. Ta có:

*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .

Tổng các chữ số này bằng: .

Vậy  có chữ số tận cùng là 5.

1. Ta có:

*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .

Tổng các chữ số này bằng: .

Vậy  có chữ số tận cùng là .

1. Ta có:

*  có chữ số tận cùng là .
*  có chữ số tận cùng là .

Tổng các chữ số này bằng: .

Vậy  có chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 1.7:** Tìm chữ số tận cùng của các tổng sau:



**Phân tích:**

Trong dạng bài này ta phải tìm được quy luật của tổng, quy luật ở đây chính là số mũ của các số hạng trong S, các số mũ này đều chia  dư . Mà ta biết các số khi nâng lên lũy thừa dạng  sẽ có tận cùng không đổi.

**Lời giải:**

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho thì dư (các lũy thừa đều có dạng ,  thuộc )

Theo tính chất, suy ra mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là .

**Tổng quát hóa**:

Tìm chữ số tận cùng của tổng sau:

**Ví dụ 1.8:**  Tìm chữ số tận cùng của tổng 

**Lời giải:**

*Nhận xét:* Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho  thì dư  (các lũy thừa đều có dạng ,  thuộc )

Theo quy tắc  thì  có chữ số tận cùng là ;  có chữ số tận cùng là ; có chữ số tận cùng là ;

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng: 

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 

**Tương tự hóa:**

Tìm chữ số tận cùng của 

**Dạng 2: Tìm hai chữ số tận cùn****g**

**Ví dụ 2.1:** Tìm hai chữ số tận cùng của các số:



**Lời giải:**

a) Do  là số chẵn, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho.

Ta có 

Mặt khác:  


Vậy hai chữ số tận cùng của  là .

b) Do  là số lẻ, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho .

Ta có.

Mặt khác : 

Vậy  tận cùng bởi hai chữ số .

**Ví dụ 2.2:**  Tìm hai chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

Ta thấy:  số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 01.

Do đó: 

Vậy  có hai chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 2.3:**  Tìm hai số tận cùng của ****

**Lời giải**

Chú ý rằng:  bình phương của số có tận cùng bằng  thì tận cùng bằng , số có tận cùng bằng  thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng .

Do đó 

Vậy hai chữ số tận cùng của  là .

**Ví dụ 2.4:** Tìm hai chữ số tận cùng của:

a)  b)  c)  d) 

**Hướng dẫn:**

a) .

b) .

c).

d) 

.

**Ví dụ 2.5:** Tìm 2 chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

Ta thấy:

Chữ số tận cùng của  cũng là chữ số tận cùng của  mà 

Chữ số tận cùng của  cũng là chữ số tận cùng của mà  

Suy ra: 

Vậy có 2 chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 2.6:**  Tìm hai chữ số tận cùng của số ****

**Lời giải**

Ta có:  suy ra 

Ta lại có suy ra 

Do đóchữ số tận cùng là nhưng 

Suy ratận cùng là 76   tận cùng là 38 hoặc 88 vì 

Vậy  tận cùng là 

Vậy có hai chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 2.7:** Tìm 2 chữ số tận cùng của 

**Lời giải**

Ta có  nên .

Khi đó theo quy tắc (1) chữ số tận cùng của là .

**Ví dụ 2.8:** Tìm 2 chữ số tận cùng của **a)  b) **

**Lời giải**

a) Ta có:  nên 

Chữ số tận cùng của  là .

b) Ta có 

Chữ số tận cùng của là .

**Dạng 3: Tìm ba chữ số tận cùng**

**Ví dụ 3.1:** Tìm ba chữ số tận cùng của 

**Lời giải:**

52008 =54.502=(54)502

có tận cùng là 

Suy ra có tận cùng là 

Vậy  có 3 chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 3.2:** Tìm ba chữ số tận cùng của **.**

**Lời giải**

Ta có: 





Vậy ba chữ số tận cùng của **** là.

**Ví dụ 3.3:** Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Phân tích:**

Nhận thấy rằng  nên ta sẽ áp dụng tính chất 4, khi đó chia hết cho .

**Lời giải:**

+ Vì nên áp dụng tính chất ta có  chia hết cho . (1)

+ Ta lại có chia hết cho (2)

Vì và kết hợp (1),(2) ta có chia hết cho 

Khi đó

Vậy ba chữ số tận cùng của là .

**Ví dụ 3.4:** Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

- Tìm 2 chữ số tận cùng của 

Ta có 

- Khi đó ta có 

Vậy 3 chữ số tận cùng là .

**Ví dụ 3.5:** Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

Ta có 

Khi đó 1.

Vậy ba chữ số tận cùng của  là .

**Ví dụ 3.6:**  Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**



Vậy bốn chữ số tận cùng của  là 

**Ví dụ 3.7:** Tìm ba chữ số tận cùng của số ****

**Lời giải**

Ta có  có ba chữ số tận cùng là 

Suy ra T = 5946 = (53)315.5=()315.5=.5=

(Với )

Vậy  có ba chữ số tận cùng là.

**Ví dụ 3.8:** Tìm ba chữ số tận cùng của số: ****

**Lời giải**

Ta có:

 tận cùng là  ;  tận cùng là ;  tận cùng là

 tận cùng là ;  tận cùng là ;  tận cùng là ;

 tận cùng là ;  tận cùng là ;  tận cùng là 

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:

 tận cùng là  ;  tận cùng là 

 tận cùng là ;  tận cùng là 

Mà  có dạng , do đó  có 4 chữ số tận cùng là.

**Ví dụ 3.9:** Tìm ba chữ số tận cùng của số: ****

**Lời giải**

Do  chia hết cho    (1).

Mặt khác:  chia hết cho 8   (2).

Vì , từ (1) và (2) suy ra chi hết cho 1000

.

Vậy  có ba chữ số tận cùng là.

**Ví dụ 3.10:**Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

Do  chi hết cho    (1).

Ta có  chia hết cho 8   (2).

Vì , từ (1) và (2) suy ra:  chia hết cho 1000

.

Vậy ba chữ số tận cùng của  cũng chính là ba chữ số tận cùng của.

Lại vì  chia hết cho   ba chữ số tận cùng của  là 001 mà 

 ba chữ số tận cùng của 999 là  (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 999 là 9, sau đó dựa vào phép nhân  để xác định ).

Vậy ba chữ số tận cùng của 3399...98 là .

**Ví dụ 3.11:** Tìm ba chữ số tận cùng của ****

**Lời giải**

Do 

⇒  chia cho  dư 1

⇒  chia cho  dư 1

⇒ chỉ có thể tận cùng là.

Do  chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là .

**Ví dụ 3.12:**  Tìm ba chữ số tận cùng của tổng**.**

**Lời giải**

**Nhận thấy**: lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1

(các lũy thừa đều có dạng , k thuộc ).

Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

⇒ Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:



.

Vậy ba chữ số tận cùng sẽ là 

**Dạng 4: Vận dụng chứng minh chia hết, chia có dư.**

**\* Chú ý:**

***a. Dấu hiệu chia hết cho :***

Một số chia hết cho  khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.

***b. Dấu hiệu chia hết cho  (hoặc ):***

Một số chia hết cho ****** (hoặc ******) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số đó chia hết cho ****** (hoặc ******).

**Chú ý:** Một số chia hết cho ****** (hoặc ******) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho ****** (hoặc ******) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.

***c. Dấu hiệu chia hết cho :***

Một số chia hết cho ****** khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng  hoặc bằng ******.

***d. Dấu hiệu chia hết cho  (hoặc ):***

Một số chia hết cho ****** (hoặc ******) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho ****** (hoặc ******).

***e. Dấu hiệu chia hết cho  (hoặc ):***

Một số chia hết cho ****** (hoặc ******) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho ****** (hoặc ******).

***f. Dấu hiệu chia hết cho :***

Một số chia hết cho ****** khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho ******.

**Ví dụ 4.1:** Cho . Chứng minh rằng A chia hết cho .

**Lời giải:**

Để chứng minh , ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: 

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .



Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Vậy A có chữ số tận cùng bằng .

Do đó: .

**Ví dụ 4.2:** Cho , chứng minh rằng  không chia hết cho  và không chia hết cho .

**Lời giải:**

Ta có: 

 là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho . Suy ra  là một số lẻ nên không chia hết cho .

 là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên không có tận cùng là  hoặc  nên  không có tận cùng là  hoặc . Do đó  không chia hết cho .

**Ví dụ 4.3:** Chứng tỏ rằng  chia hết cho .

**Lời giải:**

Ta có: có chữ số tận cùng là .

Do đó:  có chữ số tận cùng là .

Vậy  chia hết cho 

**Ví dụ 4.4:** Chứng minh chia hết cho cả  và .

**Lời giải:**

Để  vừa chia hết cho cả  và  thì số phải có chữ số tận cùng là .

Suy ra: Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là .

**Chú ý:** Số tự nhiên  có chữ số tận cùng là  thì  cũng có chữ số tận cùng là .

Ta có: . Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

 luôn có chữ số tận cùng là .

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Vậy:  chia hết cho cả  và .

**Ví dụ 4.5:** Cho 1 số có 4 chữ số: . Điền các chữ số thích hợp vào dấu (\*) để được số có bốn chữ số khác nhau chia hết cho tất cả bốn số: .

**Lời giải:**

Số  đảm bảo chia hết cho  nên số đó là số chẳn.

Số  chia hết cho  nên số đó phải có chữ số tận cùng là số  hoặc .

Số  vừa chia hết cho  và  nên số đó phải có tổng các chữ số chia hết cho .

Suy ra: Chữ số tận cùng của số  là .

Do đó ta có số . Chữ số đầu là số 

Vậy: số đã cho là .

**Ví dụ 4.6:** Chứng tỏ rằng hiệu  chia hết cho .

**Lời giải:**

Ta có: 

Số  có chữ số tận cùng bằng 

Suy ra  có tận cùng bằng 

Số  có tận cùng bằng 

Do đó:  có tận cùng bằng 

Phân tích tương tự,  có tận cùng bằng 

Do đó:  có tận cùng bằng 

Vậy:  chia hết cho .

**Ví dụ 4.7:** Chứng tỏ rằng:  chia hết cho .

**Lời giải:**

Ta có:  tận cùng bằng chữ số  nên số  cũng tận cùng bằng chữ số .

 tận cùng bằng chữ số  nên  cũng tận cùng bằng chữ số .

 tận cùng bằng chữ số  nên số  cũng tận cùng bằng chữ số .

Suy ra:  tận cùng bằng chữ số .

Vây: số  chia hết cho .

**Ví dụ 4.8:** Tìm bốn chữ số tận cùng của  khi viết trong hệ thập phân.

**Lời giải:**

**Cách 1:** 

Ta thấy số tận cùng bằng  nâng lên luỹ thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng .

Do đó: 

**Cách 2:** Tìm số dư khi chia  cho 

Nhận xét:  chia hết cho  nên chia hết cho .

Ta có: 

Do  chia hết cho  còn  chia hết cho  (theo nhận xét trên)

Nên:  chia hết cho 

Tính 

Vậy bốn chữ số tận cùng của  là .

**Ví dụ 4.9**: Chứng minh rằng  chia hết cho 

**Lời giải:**

Ta chứng minh có tận cùng là  sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết cho 

Thật vậy,  có cùng chữ số tận cùng với , mà suy ra  có tận cùng là ,  có cùng chữ số tận cùng với , vì  nên  có tận cùng là . Do đó ,  có chữ số tận cùng lần lượt là ,  suy ra  tận cùng là  (đpcm)

**Dạng 5: Vận dụng chữ số tận cùng vào bài toán chính phương.**

**\* Chú ý:**

- Số chính phương chỉ có chữ số tận cùng là: 

- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với lũy thừa chẵn

- Số chính phương thì chia hết cho  hoặc chia cho  dư 

- Số chính phương thì chia hết cho  hoặc chia cho  dư 

- Số chính phương chia hết cho  thì sẽ chia hết cho 

- Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho 

- Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho 

- Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho 

- Số chính phương tận cùng là  hoặc  hoặc  thì chữ số hàng chục là số chẵn

- Số chính phương tận cùng là  thì chữ số hàng chục là 

- Số chính phương tận cùng là  thì chữ số hàng chục là số lẻ.

- Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu:

+ A có chữ số tận cùng là .

+ A có chữ số tận cùng là  mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

+ A có chữ số hàng đơn vị khác  mà chữ số hàng chục là lẻ.

+ A có chữ số hàng đơn vị là  mà chữ số hàng chục khác .

+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

**Ví dụ 5.1:** Các số sau có phải là số chính phương không? Vì sao?

a)  ; b) 

**Lời giải:**

a) Ta có:  có chữ số tận cùng là 

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Do đó:  không là số chính phương.

b) Ta có:  có chữ số tận cùng là .

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Do đó:  không là số chính phương.

**Ví dụ 5.2:** Cho . Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có: 



Suy ra: 

Suy ra: 





Ta có:  có chữ số tận cùng là .

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Do đó:  có chữ số tận cùng là .

Vậy  không phải là số chính phương.

**Ví dụ 5.3:** Cho  và  không chia hết cho . Chứng minh rằng  không thể là số chính phương.

**Lời giải:**

Do  không chia hết cho 4 nên .

Ta có . Ta viết .

Vậy hai chữ số tận cùng của  cũng chính là hai chữ số tận cùng của  nên chỉ có thể là . Theo tính chất trên thì rõ ràng  không thể là số chính phương khi không chia hết cho.

**Ví dụ 5.4:** Cho . Tìm chữ số tận cùng của S, từ đó suy ra S không phải là số chính phương.

**Lời giải:**

Tổng có  số hạng , nhóm các số hạng từ trái sang phải, mỗi nhóm  hạng, còn thừa ba số hạng cuối là . Trong mỗi nhóm, chữ số tận cùng của tổng là .

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng .

Ta có: 



Tổng S có chữ số tận cùng 

Số chính phương không có tận cùng bằng . Suy ra S không phải là số chính phương.

**Ví dụ 5.5:** Cho tổng 

a) Tính S

b) Chứng tỏ S là một số chính phương.

**Lời giải:**

a) Ta có: 

b)  có chữ số tận cùng là  nên S là số chính phương.

**Ví dụ 5.6:** Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết vởi các chữ số .

**Lời giải:**

Gọi  là số chính phương cần tìm.

Số chính phương không tận cùng bằng  và  nên  phải tận cùng bằng .

Số tận cùng bằng  thì chia hết cho , không chia hết cho  nên không là số chính phương.

Vậy  phải tận cùng bằng 

Suy ra số chính phương cần tìm là: 

**BÀI TẬP**

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng  chia hết cho .

**Lời giải:**

**Cách 1: ** chia hết cho  và  chia hết cho .

Do đó:  chia hết cho .

**Cách 2:**  có chữ số tận cùng là 0. Do đó:  có chữ số tận cùng là .

Vậy:  chia hết cho .

**Bài 2:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a)  ; b) 

**Lời giải:**

a) Số  có tận cùng là , nâng lên luỹ thừa lẻ nên có chữ số tận cùng là .

b) Số  có tận cùng là , nâng lên luỹ thừa chẵn nên có tận cùng là .

**Bài 3:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau: ; ; ; 

**Lời giải:**

Ta có: có số tận cùng là 

 có số tận cùng là 

 có số tận cùng là  ()

 có số tận cùng là 

**Bài 4:** Tìm chữ số cuối cùng của số .

**Lời giải:**

Ta có:  có chữ số cuối cùng là .

Mà: 

Do đó: chữ số cuối cùng của số  là .

**Bài 5:** Tích các số lẻ liên tiếp có tận cùng là . Hỏi tích đó có bao nhiêu thừa số?

**Lời giải:**

Nếu tích có  thừa số lẻ liên tiếp trở lên thì ít nhất cũng có một thừa số có chữ số tận cùng là . Dó đó tích phải tận cùng là  nên trái đề bài. Vậy số thừa số của tích nhỏ nhất phải lớn hơn .

Nếu tích có  thừa số lẻ liên tiếp thì hoặc tích có tận cùng bằng , hoặc tận cùng bằng  nên trái đề bài.

Nếu tích có  thừa số lẻ liên tiếp thì tích có tận cùng là  hoặc  hoặc  nên trái đề bài.

Vậy tích đó chỉ có  thừa số.

**Bài 6:** Tích tận cùng bằng bao nhiêu chữ số .

**Lời giải:**

Ta có: 



Do đó: 

Vậy A có tận cùng bằng  chữ số .

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên có  chữ số biết rằng số gồm năm chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại bằng bốn lần số phải tìm.

**Lời giải:**

Gọi số phải tìm là 

Theo đầu bài ta có:  (\*)

Vì  bằng một số có năm chữ số nên , a lại chẵ nên .

Tích  là một số tận cùng bằng , do đó  hoặc .

Vì e là chữ số đầu của số tận cùng bằng b nên b phải là số lẻ, do đó .

Xét tích . Đó là một số cộng với  được một số tận cùng bằng  nên  tận cùng bằng .

Vậy  hoặc .

Bằng cách thử trực tiếp, ta được , do đó .

Vậy số phải tìm là .

**Bài 8:** Hãy thay vào a, b, c, d các chữ số thích hợp, biết rằng:

a)  ; b) ; c) 

**Lời giải:**

a) Tích là một số có ba chữ số, nên  là một số tận cùng bằng  hoặc  (tức là  hoặc ) nhưng nên , suy ra .

Vậy: . Ta có phép tính .

b) Ta viết lại phép tính như sau:

ba

+ abc

dcca

Ta có:  (vì ) nên . Tổng là một số có bốn chữ số chỉ trong trường hợp . Khi đó ;  là một số tận cùng bằng , hơn nữa phải khác  vì nếu không ta phải có , trái với đầu bài. Do đó:  và .

Ta có phép tính: 

c) Ta viết lại phép tinh bằng:

aa

+ cca

acc

Nếu  thì suy ra , điều này vô lý vì rõ ràng a phải khác .

Do đó:  và .

Từ đó  nhưng , nghĩa là  nên .

Ta có phép tính: .

**Bài 9:** Nếu  và  thì  chia hết cho .

**Lời giải:**

Do  chia hết cho  nên ; ; ;  khi chia cho  có cùng số dư là .

Suy ra:  chia hết cho .

Vậy  chia hết cho .

**Bài 10:** Chứng minh rằng: Trong  số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có cùng chữ số tận cùng.

**Lời giải:**

Một số nguyên chỉ có thể tận cùng bằng  trong  chữ số 

Lấp  số nguyên, theo nguyên tắc Dirichlet phải có hai số có cùng chữ số tận cùng.

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Tìm một số tự nhiên có  chữ số tận cùng là chữ số . Biết rằng khi chuyển chữ số  đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp  lần số cũ. ***(Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019)***

**Lời giải:**

Gọi số cần tìm là , ta có: 

Đặt 

Ta có: 









Vậy số cần tìm là .

**Bài 2:** Cho . Chứng tỏ rằng . Tìm chữ số tận cùng của A. ***(Đề HSG Trực Ninh năm 2017 - 2018)***

**Lời giải:**

Ta có  (tổng A có  số hạng, )













Vậy chữ số tận cùng của A là .

**Bài 3:** Tìm chữ số tận cùng của số ** *(Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019).***

**Lời giải:**

Chữ số tận cùng của là .

Chữ số tận cùng của  là .

Chữ số tận cùng của là .

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng  là .

**Bài 4:** Cho  ***(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)***

a) Chứng tỏ rằng .

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

**Lời giải:**

a) Ta có: 









b) Dễ thấy 

Do đó: M có chữ số tận cùng bằng .

**Bài 5:** Cho . Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A. ***(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)***

**Lời giải:**

Ta có: 











Vì  có chữ số tận cùng là 2 nên  có chữ số tận cùng là .

**Bài 6:** Cho . Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5. ***(Đề HSG Hoằng Hoá năm 2018 - 2019 )***

**Lời giải:**

Vì  đều là bội của  nên  và cũng là bội của .

Suy ra: 



Khi đó: 

Vậy A có tận cùng là  nên chia hết cho  nên .

**Bài 7:** Cho . Chứng minh rằng A không phải là số chính phương. ***(Đề HSG Buôn Mê Thuột năm 2018 - 2019)***

**Lời giải:**

Ta có các số  đều có chữ số tận cùng là .

Do đó: có chữ số tận cùng là .

Vậy A không phải là số chính phương.

**Bài 8:**  Tìm chữ số tận cùng của các số sau: ***(Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019)***

a)  b) 

**Lời giải:**

a) Xét , ta có: 

Suy ra chữ số tận cùng bằng 

Vậy số  có chữ số tận cùng là 

b) Xét  ta có: 

Suy ra chữ số tận cùng bằng 

Vậy số  có chữ số tận cùng là 

**Bài 9: *(Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019)***

a)Tìm chữ số tận cùng của các số sau: 

b)Chứng tỏ rằng: chia hết cho 

**Lời giải:**

a) Do  có chữ số tận cùng là , khi đó nâng lên lũy bậc lẻ có chữ số tận cùng là 

Vậy  có chữ số tận cùng là 

Ta có  có chữ số tận cùng là  nên khi nâng lên lũy thừa  có tận cùng là chữ số .

Vậy  có chữ số tận cùng là 

b) Vì có tổng các chữ số chia hết cho  nên tổng chia hết cho 

Lại có có  chữ số tận cùng là  nên chia hết cho 

Vậy chia hết cho .

**Bài 10:** Cho ****. Tìm chữ số tận cùng của A. ***(Đề HSG 2017 - 2018)***

**Lời giải:**

Ta có: ****

****

Do đó: 

Suy ra: 

Ta có: có chữ số tận cùng là 

Suy ra có chữ số tận cùng là 

Vậy chữ số tận cùng của A là .

**Bài 11:** Chứng minh rằng:  chia hết cho cả  và . ***(Đề HSG Cao Lộc 2020 - 2021)***

**Lời giải:**

a) Ta có: (2002 số 0)  (2001 số 0) có  tận cùng nên chia hết cho  và tổng các chữ số của nó là:  nên chia hết cho 

Vậy  chia hết cho  và .

**Bài 12:** Cho . Tìm chữ số tận cùng của . ***(Đề HSG Lục Ngạn 2020 - 2021)***

**Lời giải:**

Ta có: 



Do đó: 

Suy ra: 

Ta có:  có chữ số tận cùng là .

Suy ra:  có chữ số tận cùng là .

Vậy chữ số tận cùng của B là .

**Bài 13:** Tìm chữ số tận cùng của dãy phép tính sau: . ***(Đề HSG Cao Lộc năm 2020 2021)***

**Lời giải:**

Ta gọi  là vế A. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế A lại với nhau ta được:  nên vế A có chữ số tận cùng là .

Gọi  là vế B. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế B lại với nhau ta được:  nên vế B có chữ số tận cùng là .

Vậy chữ số tận cùng của  là .

**Bài 14:** Tìm một chữ số tận cùng **của: . *(Đề HSG Kon Tum năm 2020 - 2021)***

**Lời giải:**

Ta có: ****



Ta có:  có chữ số tận cùng là .

 có chữ số tận cùng là .

Vậy A có chữ số tận cùng là 

**Bài 15:** Tìm hai chữ số tận cùng của . ***(Đề HSG năm 2016 - 2017)***

**Lời giải:**

Ta có: 



Mà  có hai chữ số tận cùng là 

Suy ra: có hai chữ số tận cùng là 

Vậy  có hai chữ số tận cùng là .