**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 1- SỐ TỰ NHIÊN**

**CHỦ ĐỀ3: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ TỰ NHIÊN**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. DÃY SỐ TỰ NHIÊN**

+ Cho dãy số tự nhiên : 

-  : số hạng thứ 1 .

-  : số hạng thứ 2 .

-  : số hạng thứ 3 .

-  : số hạng thứ .

-  tổng dãy số tự nhiên có  số hạng.

**2. DÃY SỐ TỰ NHIÊN CÁCH ĐỀU**

+ Dãy số tự nhiên cách đều: Hiệu hai số hạng liên tiếp luôn luôn không đổi.

-  (hằng số).





**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Tổng các số hạng cách đều** 

***I. Phương pháp giải***

Cần tính tổng: . (1)

Với  (các số hạng cách đều nhau một giá trị )

*Số số hạng của tổng là*  *với*  *là số hạng thứ nhất*;  *là số hạng thứ* *.*

*Tổng* *.*

*Số hạng thứ*  *của dãy là* *.*

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài toán tổng quát:** Tính tổng .

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 2:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 3:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 4:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 5:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 6:** Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số? .

***Lời giải:***

*Cách 1:*

Các số tự nhiên có hai chữ số là 

Số các số này là: số

Ta có:



Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:



Nên 

*Cách 2:*

Số số hạng của dãy: 

(*khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99*)

Tổng của dãy: 

**Bài 7:** Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên? .

*Phân tích:*

Để giải bài toán ta cần xác định được quy luật cách đều của các số lẻ liên tiếp. Tuy nhiên các số hạng trong tổng đã biết nên ta chỉ cần áp dụng công thức tính tổng như đã nêu trong phương pháp

*Lời giải*

Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: 

*Cách 1:* Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị  và trong tổng có 21 số hạng nên: 

*Cách 2:* Nhóm số hạng tạo thành những cặp số có tổng bằng nhau, ta thấy:

   

 Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu dãy số vào, ta được các cặp số đều có tổng là 42

Số cặp số là:  (cặp số) dư một số hạng ở chính giữa dãy số là số 21

Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: 

**Bài 9:** Tính tổng .

*Lời giải*

Ta có 

Xét tổng  là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị.

Tổng này có:  số hạng.



Ta có tổng 

**Dạng 2: Tổng có dạng** (1)

***I. Phương pháp giải***

**TH 1:** Nếu  thì .

**TH 2:** Nếu  để tính tổng  ta làm như sau

**Bước 1:** Nhân hai vế của  với số  ta được 

**Bước 2:** Lấy  trừ  vế theo vế ta được 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có 

Vậy .

**Bài 2:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có 

Vậy .

**Bài 3:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có .

Vậy .

Suy ra .

**Bài 4:** Tính tổng .

*\*) Phân tích:* Đặt  bài toán trở về dạng đã cho.

Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với . Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng  với các số hạng từ  đến , giống như trong tổng S, khi đó nếu lấy tổng  trừ đi tổng  thì các số hạng từ  đến  bị triệt tiêu và tính được tổng S.

***Lời giải:***

Ta có 



**Bài 5:** Tính tổng .

*\*) Phân tích:* Nhận thấy các số hạng từ  đến  đều có cùng tử số là 5, và kể từ số hạng  thì các số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với . Nếu nhân 7 vào tổng S thì ta được tổng 7S có các số hạng từ  đến  giống như trong tổng S. Do đó nếu lấy tổng 7S trừ đi tổng S thì các số hạng từ  đến  bị triệt tiêu, từ đó tính được tổng S.

***Lời giải:***

Ta có 



**Bài 6:** Tính tổng .

*\*) Phân tích:* Nếu quy đồng phân số bài toán thì khá phức tạp. Nhận thấy các số 18, 162, 1458 đều chia hết cho 9, do đó ta sẽ phân tích các số này thành tích của 9 với một thừa số nào đó để xem có xuất hiện tổng theo quy luật  hay không, từ đó có hướng tính S

***Lời giải:***

Ta có 

Nhân 2 vào tổng S ta được: 

Nhân 9 vào tổng 2S ta được: 

Trừ tổng 18S cho tổng 2S ta được: 

**Dạng 3: Tính tổng có dạng** (1)

***I. Phương pháp giải***

**Bước 1:** Nhân hai vế của đẳng thức với  ta được:

 (2)

**Bước 2:** Lấy  theo vế ta được:



***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng sau:(1)

***Lời giải:***

Nhân vào hai vế với  ta được: (2)

Lấy  theo vế :



**Bài 2:** Tính tổng sau:(1)

***Lời giải:***

Đặt 

Ta có: 





**Bài 3:** Tìm giá trị của  biết: 

***Lời giải:***

Đặt  (1)

Nhân vào hai vế với  ta được: (2)

Lấy  theo vế :



Vì .

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 4:** Tìm giá trị của  biết: , với 

***Lời giải:***

Đặt  (1).

Nhân cả hai vế của (1) với  ta được:  (2).

Lấy  theo vế ta được:





Theo bài cho: 

 (thỏa mãn).

Vậy .

**Bài 5:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 26.

***Lời giải:***

**Phân tích:** Ta nhóm 2 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số .

Ta có:



Vậy  chia hết cho .

**Bài 6:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 21.

***Lời giải:***

**Phân tích:** Ta nhóm 3 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số 21.

Ta có:



Do đó:  chia hết cho 21

**Bài 7:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 82.

***Lời giải:***

**Phân tích:** Ta nhóm hai thừa số cách đều để làm xuất hiện thừa số 82.

Ta có:



Vậy  chia hết cho 82.

**Bài 8:** So sánh:  với  .

***Lời giải:***

Đặt 



Vậy .

**Ví dụ 9:** So sánh:  với .

***Lời giải:***

Đặt 



**Dạng 4: Tính tổng** **, với** **.**

***I. Phương pháp giải***



**Bước 1**: Nhân cả 2 vế của với  ta được: 

**Bước 2**: Lấy  ta được:

Vậy 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức  với  ta được:

.

**Bài 2:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức  với  ta được :

.

**Bài 3:** Tính tổng .

*\*) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với . Nếu ta nhân  vào tổng S, ta được tổng  có các số hạng từ Đến  giống như trong tổng S. Khi đó ta lấy tổng  trừ cho tổng S thì các số hạng từ  đến  bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S.

***Lời giải***

Ta có 



**Bài 4:** Tính tổng 

***Lời giải***

Ta có 



**Bài 5:** Tính tổng .

**Phân tích:**

+) Ta có: ;;;….;.

+) Tổng trên có 8 số hạng.

***Lời giải:***

Ta có: 

Áp dụng công thức  với  ta được:



Vậy .

**Dạng 5: Tổng có dạng:** **.**

***I. Phương pháp giải***

**Bài toán tổng quát:**

**Bài toán tổng quát:**, .

(khoảng cách giữa các thừa số của mỗi số hạng là )

\* Nhân  với ba lần khoảng cách ta được: .

\* Phân tích từng số hạng của tổng mới để xuất hiện các số hạng đối nhau:



Từ đó tính được tổng .

***II. Bài toán***

**Bài 1:**Tính tổng: .

**Phân tích:** Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 1.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của  với 3 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 3 này được viết dưới dạng  ở số hạng thứ nhất,  ở số hạng thứ hai,  ở số hạng thứ ba, …,  ở số hạng cuối cùng.

***Lời giải:***

Ta có:









.

Suy ra: .

**Bình luận:** Ta thấy: là tích của ba thừa số, trong đó  là hai thừa số của số hạng lớn nhất trong tổng, còn thừa số 100 bằng (bằng thừa số lớn nhất của  cộng với khoảng cách giữa hai thừa số của mỗi số hạng trong ).

**Bài 2:** Tính tổng: .

**Phân tích:** Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2. Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của  với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 6 này được viết dưới dạng  ở số hạng thứ nhất,  ở số hạng thứ hai,  ở số hạng thứ ba, …  ở số hạng cuối cùng.

***Lời giải:***

Ta có:









.

Suy ra: .

**Bài 3:** Tính tổng: 

***Lời giải:***

Ta có 





**Bài 4:** Chứng minh rằng  với 

***Lời giải:***

Ta có 





 



Vậy 

**Dạng 6: Tổng có dạng:** 

***I. Phương pháp giải***

**Bài toán tổng quát:** Chứng minh rằng : 

***Lời giải:***









Mà  (Theo dạng bài trước)



Vậy 

Do đó, ta có công thức tính dãy số: 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng sau: 

***Lời giải:***

Ta có 



Lại có 





**Bài 2:** Tính tổng sau: 

***Lời giải:***

Ta có tổng 



Trong đó 



Vậy 

**Bài 3:** Tính tổng sau: 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 



 mà theo dạng 5 thì ta có 



**Bài 4:** Tính tổng sau: 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 







.

**Bài 5:** Tính các tổng sau: 



***Lời giải:***

Tính 

Áp dụng bài toán tổng quát 

Ta thấy  nên 

Tính 

Ta biến đổi  về dạng tương tự như biểu thức  ta có:

= 

=  (với )

**Bài 6:** Tính tổng sau: 

***Lời giải:***

Ta biến đổi về dạng quen thuộc như biểu thức bằng cách thêm bớt tổng .











**Dạng 7: Tính tổng có dạng** với .

***I. Phương pháp giải***

**Cách 1:** Ta sẽ tính tổng  dựa vào tổng dạng **.**

Trước hết ta xét tổng 



.





.

Mặt khác .









.

Vậy .

**Cách 2:** Ta sẽ tính tổng  dựa vào tổng dạng  và công thức  .

Ta chứng minh công thức như sau: (đpcm).

Nhận thấy tổng  có  số hạng, từ đó ta có:

.

.

















.

**Cách 3:** Ta sẽ tính tổng  dựa vào tổng dạng  và tổng dạng .

Ta có 





.

Đặt và .

Ta có: 









.

Ta có: .

Số số hạng của tổng  là: .

.

.





.

Vậy .

**Cách 4:** Ta sẽ tính tổng  dựa vào tổng dạng  và tổng dạng .

Đặt .

.

.

Đặt 



.





.

Đặt .

Ta có  là tổng của n số nguyên dương đầu tiên nên .

Suy ra 

Vậy .

Xét 











Vậy .

***II. Bài toán***

**Bài 1.** Tính tổng .

**Phân tích:** Đây là bài toán cụ thể của dạng này với .

***Lời giải:***

.

Ta chứng minh công thức sau: .

Ta có:

.

.













**Bài 2:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng công thức ở trên với ta được: 

**Bài 3:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Ta tính 2 tổng  và 

Theo công thức thu được



và 

Ta có 

**Bài 4:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 

Tổng này có 99 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng, và ghép được đủ 50 cặp. 

Ta có 









, theo dạng 5 ta có 

**Bài 5:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 

Tổng này có 101 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 102 số hạng, và ghép được đủ 51 cặp 

Ta có 









, theo dạng 5 ta có:





Vậy 

**Bài 6:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 

Tổng này có 2009 số hạng, nên khi thêm số hạng  ta được tổng có 2010 số hạng, và ghép được đủ 1005 cặp số



Ta có



**Bài 6:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng 



 theo dạng 5 ta có: 



**Bài 7:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Áp dụng tổng



 ta có: 



**Dạng 8: Tổng có dạng:**  **(k lẻ và** **)**

***I. Phương pháp giải***

**Bài toán tổng quát:** Chứng minh rằng : 

Ta có: 







Suy ra: 

Áp dụng tổng 









=2.S

Suy ra:  mà 

Vậy 

**Áp dụng tính:** 

Xét: 

Suy ra: .

Nên: .

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng 

**Phân tích:** Tổng B có dạng  với 

***Lời giải:***

Áp dụng công thức:  với .

Ta được:.

**Bài 2:** Tính tổng .

**Phân tích:** Tổng C có dạng  với .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức:  với .

Ta được:.

**Bài 3:** Biết Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có 



**Bài 4:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có



Áp dụng tổng





 theo dạng 5 ta có 



Áp dụng tổng





 ta có 

Khi đó 

**Dạng 9: Tổng có dạng** 

***I. Phương pháp giải***

**Phương pháp giải:** Đặt 

Nhân cả hai vế với , rồi tách  ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng 

**Phân tích:** Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Cách 1: Ta có 



Đặt 

Tổng B có dạng 

Với 



Cách 2:











Vậy

**Bài 2:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 3. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 9) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:











Vậy

**Bài 3:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Cách 1:











Cách 2:

Ta có 



Ta có: 





**Bài 4:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***







**Dạng 10: Tổng có dạng** 

Trong đó .

***I. Phương pháp giải***

Nhân hai vế với , rồi tách ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau.









.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng

**Phân tích:** Vì khoảng cách giữa các số trong một số hạng là nên ta nhân vào hai vế để tính S.

***Lời giải:***













**Bài 2:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có: 



.

Do vậy .

**Bài 3:**Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có:





 .

Do vậy .

**Bài 4:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có:



Do vậy .

**Bài 5:**Tính tổng **.**

***Lời giải:***

Ta có: 



.

**Dạng 11: Tổng có dạng** 

***I. Phương pháp giải***

Phân tích công thức của từng số hạng trong tổng thành  để thành tổng quen thuộc: 

Cụ thể:



Do đó 



Đặt 



Khi đó 







.

***Tổng quát:*** với .

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tính tổng

**Phân tích:** Ta áp dụng dạng toán trên với 

***Lời giải:***

Do đó 



Đặt 



Khi đó, 







.

**Bài 2:**Tính tổng 

**Phân tích:** Ta áp dụng dạng toán trên với 

***Lời giải:***

Do đó 



Đặt











.

**Bài 3:** Tính tổng 

**Phân tích:** Phân tích ; ; ;...;.

Khi đó 

***Lời giải:***

Ta có 

Theo kết quả ví dụ 2 thì .

**Bài 4:** Tìm số nguyên x, biết: 

**Phân tích:** Tính giá trị vế phải rồi thay vào tìm .

***Lời giải:***

Đặt 

Do đó 

















Phân tích ra thừa số nguyên tố ta có:  nên 

Theo bài toán ta có:  hoặc 

 hoặc 

Vậy 

**Bài 5:** Không tính ra kết quả hãy so sánh và

**Phân tích:** Biến đổi biểu thức theo biểu thứcdựa vào cách làm trong hướng dẫn các ví dụ 1,2,3.

***Lời giải:***

Do đó 





**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG**

**Bài 1:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 2:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 3:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Số số hạng của dãy là .

Tổng .

**Bài 4:** Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có .

Vậy .

Suy ra .

**Bài 5:** Chứng minh  chia hết cho 40.

***Lời giải:***

Ta có .



Suy ra  chia hết cho 40 vì .

**Bài 6:** Chứng minh rằng: 

***Lời giải:***

Đặt  (1). Nhân cả hai vế của (1) với  ta được:

 (2).

Lấy  theo vế ta được:



**Bài 7:** So sánh:  với  .

***Lời giải:***

Đặt 



Vậy .

**Bài 8:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 37.

***Lời giải:***

Ta có:



Vậy  chia hết cho 37

**Bài 9:** Cho 

a) Tính giá trị của 

b) Chứng minh  chia hết cho .

***Lời giải:***

a) Áp dụng công thức  với  ta được :



b) Ta có:

Vậy chia hết cho .

**Bài 10:** Tính giá trị củabiểu thức

***Lời giải:***

Ta có 



**Bài 11:** Cho , . Tìm  để .

***Lời giải:***

Ta có: .

Do đó .

**Bài 12:** Cho . Chứng minh  chia hết cho  và  chia hết cho .

***Lời giải:***

+ Ta có 

Vậy  chia hết cho 

+ Ta có 



Vậy chia hết cho .

**Bài 13:** Tính tổng: 

**Phân tích:** Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 3.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của  với 9 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 9 này được viết dưới dạng  ở số hạng thứ nhất,  ở số hạng thứ hai,  ở số hạng thứ ba, …,  ở số hạng cuối cùng.

***Lời giải:***

Ta có:





.

Suy ra: .

**Bài tập tương tự:** Tính tổng: .

Hướng dẫn: Nhân  với 12.

Đáp số: .

**Bài 14:** Tính tổng: 

**Phân tích:** Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của  với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số).

***Lời giải:***

Ta có:





.

Suy ra: .

**Bài 15:** Tính tổng: 

***Lời giải:***

Ta có:











.

**Bình luận:** Trong bài tập 3, thừa số trong số hạng đứng trước không được lặp lại trong số hàng đứng sau, nên ta không nhân  với ba lần khoảng cách giữa hai thừa số nữa mà tách một thừa số trong tích làm xuất hiện các tổng mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

**Bài toán tổng quát:** 

**Bài 16:** Tính tổng: .

***Lời giải:***

***Cách 1***: Ta có:



.

***Cách 2***: Ta có:





.

**Bài tập tương tự:** Tính tổng: ;

Hướng dẫn:

.

**Bài 17:** Tính 

***Lời giải:***

Đặt: ; 

Khi đó ta áp dụng công thức tổng quát để tính 

Từ đó: 

Ta có: 





**Bài 18:** Tìm số tự nhiên  biết tổng các bình phương các số tự nhiên từ  đến  là 506.

***Lời giải:***

Vì tổng tổng các bình phương các số tự nhiên từ  đến  là 506 nên 













**Bài 19:** Tính tổng 

***Lời giải:***







**Bài 20:** Tìm n nhỏ nhất sao cho tổng của n số chính phương lẻ đầu tiên chia hết cho 3

***Lời giải:***

Ta có 

Mà  nên trong 3 số  chỉ có 1 số chia hết cho 3, mà muốn A chia hết cho 3 thì 1 trong 3 số trên phải chia hết cho 9. Để  nhỏ nhất thì . Suy ra .

Vậy  là số cần tìm.

**Bài 21:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Ta có 





**Bài 22:** Tính tổng 

***Lời giải:***

Ta có 









**Bài 23:** Tính tổng 

**Phân tích:** Sử dụng công thức  với 

***Lời giải:***

Áp dụng công thức:  với . Ta được:

.

Mặt khác: 

Suy ra: .

**Bài 24:** Tính tổng .

**Phân tích:** Sử dụng công thức .

Tính  với .

Tính  với .

Khi đó: .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức: .

Đặt .

Đặt .

Khi đó: .

**Bài 25:** Tính tổng: .

**Phân tích:** Tổng F có dạng  với .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức:  với .

Ta được: .

**Bài 26:** Tính tổng: .

**Phân tích:** Tổng  .

Áp dụng dạng  với .

***Lời giải:***

Áp dụng công thức:  với , ta được:

.

Suy ra: .

Vậy .

**Bài 27:** Tính tổng .

**Phân tích:** Tính .

Tính .

Tính .

***Lời giải:***

Đặt .

Đặt .

Khi đó: .

**Bài 28:** Biết rằng . Tính tổng .

***Lời giải:***

Ta có: .

Suy ra: .

Mà .

Nên .

Vậy .

**Bài 29:** Tính tổng 

**Phân tích:** Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:









Vậy

**Bài toán tổng quát:** Tính tổng 

Ta có:







Vậy: **.**

**Bài 30:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:











Vậy

**Bài 31:** Tính tổng 

**Phân tích:** Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 5. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 15) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:











Vậy

**Bài 32:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:











Vậy

**Bài 33:** Tính tổng 

**Phân tích:**Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

***Lời giải:***

Ta có:













Vậy

**Bài 34:** Tính tổng

**Phân tích:** Ta áp dụng dạng toán trên với 

***Lời giải:***













**Bài 35:** Tính tổng

**Phân tích**

Ta áp dụng dạng toán trên với 

Khi đó: 









***Lời giải:***











**Bài 36:** Tính tổng

**Phân tích**

Ta có



Ta tính hai tổng sau





***Lời giải:***

+) Tính tổng

.

Áp dụng ví dụ, ta tính được



Tương tự áp dụng công thức (\*) với  ta có



+) Tính







**Bài 37:** Tính tổng

**Phân tích:** Trong bài toán này, ta không nhân  với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

***Lời giải:***









Từ đó ta có,





Áp dụng bài 1, ta tính được 

Ta chỉ cần đi tính













Do đó







**Bình luận:** Ta nhận thấy rằng cách tính  là nhân với  ở đó là khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của có 3 thừa số, còn cách tính  cũng tương tự. Tuy nhiên để tính  ta nhân với 3 lần khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của N có 2 thừa số.

**Bài toán tổng quát:** .

**Bài tập tương tự**

Tính



.

**Bài 38:** Tính tổng

**Phân tích:** Trong bài toán này, tương tự **bài 4** ta không nhân  với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được. Ở bài này ta tách  với mỗi bình phương.

***Lời giải:***









Từ đó ta tính



+) Tính tổng



Áp dụng **ví dụ** , ta tính được .

+) Tính tổng .

Áp dụng Lý thuyết với

Áp dụng **Lý thuyết,** với  (với mọi ), ta tính được 

Vậy 

**Bài toán tổng quát:** 

**Bài tập tương tự:** Tính 

**Bài 39:** Tính tổng 

***Lời giải:***











.