**BÀI TOÁN MAX – MIN SỐ PHỨC.**

|  |
| --- |
| **Kỹ năng:**   * **Phương pháp đại số.** * **Phương pháp hình học.** * **Phương pháp bđt modun.** * **Phương pháp casio.** |

**Một số tính chất cần nhớ.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. **Môđun của số phức:**   Số phức được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của véctơ  được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu  Tính chất  •  •  •  •  •      Chú ý: .  Lưu ý:   * dấu bằng xảy ra * dấu bằng xảy ra  . * dấu bằng xảy ra * dấu bằng xảy ra    **2.Một số quỹ tích nên nhớ**   |  |  | | --- | --- | | **Biểu thức liên hệ** | **Quỹ tích điểm M** | | (1)  (2) | (1)Đường thẳng  (2) Đường trung trực đoạn AB với | | hoặc | Đường tròn tâm  , bán kính | | hoặc | Hình tròn tâm  , bán kính | | hoặc | Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm , bán kính lần lượt là | |  | Parabol | | hoặc | Elip  Elip nếu  Đoạn AB nếu | |  | Hypebol | |

**Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:**

**Dạng 1:** Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

**TQ1:** Cho số phức  thỏa mãn  , tìm  . Khi đó ta có

* Quỹ tích điểm  biểu diễn số phức  là đường trung trực đoạn  với 
* 

**TQ2:** Cho số phức thỏa mãn điều kiện  Tìm . Ta có

* Quỹ tích điểm  biểu diễn số phức  là đường trung trực đoạn  với 
* 

**Lưu ý:** Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

* Cho số phức thỏa mãn điều kiện  Khi đó ta biến đổi



* Cho số phức thỏa mãn điều kiện  Khi đó ta biến đổi



**Dạng 2:** Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

**TQ:** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện  . Tìm  . Ta có

* Quỹ tích điểm  biểu diễn số phức  là đường tròn tâm  bán kính 
* ****

**Lưu ý:** Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

**Ví dụ 1:** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện (Chia hai vế cho )



**Ví dụ 2:** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện (Lấy liên hợp 2 vế)

**Ví dụ 3:** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện 

Hay viết gọn  (Chia cả hai vế cho )

**Dạng 3:** Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

**TQ1**: (Elip chính tắc). Cho số phức  thỏa mãn điều kiện  Khi đó ta có

* Quỹ tích điểm  biểu diễn số phức  là Elip: 
* 

**TQ2:** (Elip không chính tắc). Cho số phức  thỏa mãn điều kiện 

Thỏa mãn  .

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc (Kỹ thuật đổi hệ trục tọa độ).

**Ta có**

|  |  |
| --- | --- |
| Khi đề cho Elip dạng không chính tắc và  ). Tìm Max, Min của  .  Đặt | |
| Nếu | (dạng chính tắc) |
| Nếu |  |
| Nếu |  |
| Nếu |  |

**PHẦN I : BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT.**

**Dạng 1: Sử dụng tính chất của modun – bđt đại số.**

**Phương pháp : Xem hướng dẫn trên lớp**

**Dạng 2: Sử dụng tính chất hình học.**

**Xem hướng dẫn trên lớp.**

**Dạng 3: Tả phí lù.**

**Phương pháp: Tin tưởng bạn ngồi bên cạnh**

|  |
| --- |
| 1. **(TRẦN HƯNG ĐẠO – NB)** Trong các số phức thỏa mãn điều kiện  Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

**Cách 1: Phương pháp tự luận**

Giả sử 







Suy ra  khi 

Vậy 

**Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm**

Giả sử 





Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức  thỏa điều kiện  là đường thẳng .

Phương án A:  có điểm biểu diễn  nên loại A.

Phương án B:  có điểm biểu diễn  nên loại B.

Phương án D:  có điểm biểu diễn  nên loại B.

Phương án C:  có điểm biểu diễn 

(Trong trường hợp có nhiều số phức thuộc đường thẳng thì ta tiếp tục so sánh modun, và nên thay luôn  vào dữ kiện ban đầu chứ không nên biến đổi)

**Cách 3:** Tính nhanh.

Quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức  là đường thẳng có phương trình  .

Vậy 

**Cách 4:** Công thức tính nhanh.

BT1: Cho số phức thỏa mãn điều kiện  Tìm ?



BT2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện  Tìm ?



|  |
| --- |
| 1. **(LẠNG GIANG SỐ 1)** Cho số phức  thỏa mãn . Gọi ,  lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất  Khi đó  bằng   **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

**Cách 1 :** Đại số

Gọi  với .

Ta có .

Do đó .

Mà .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có





.

Do đó .

Vậy .

**Cách 2:** Hình học (Đọc lại lý thuyết phần Elip)

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức là elip 

**Do vậy **

**Cách 3: Tổng quát**

**Cho số phức **thỏa mãn  ta luôn có .

* + Tập hợp điểm biểu diễn  là Elip 
  + 

|  |
| --- |
| 1. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho số phức  thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của  là   **A.**. **B.**. **C.**. **D.**. |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Gọi  ta có .

Theo giả thiết  nên điểm  biểu diễn cho số phức  nằm trên đường tròn tâm  bán kính .

Ta có .

Gọi  và  thì .

Do  chạy trên đường tròn,  cố định nên  lớn nhất khi  là giao của  với đường tròn.

Phương trình , giao của  và đường tròn ứng với  thỏa mãn: nên .

Tính độ dài  ta lấy kết quả .

**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của 

**Ta có ** (Đường tròn tâm  )

**Vậy **

**Lưu ý:** Cho số phức  thỏa mãn , khi đó ta có quỹ tích các điểm biểu diễn số phức là đường tròn  ) và

****

**Ngoài ra ta luôn có công thức biến đổi **

|  |
| --- |
| 1. **(BIÊN HÒA – HÀ NAM)** Cho số phức  thỏa mãn . Đặt . Mệnh đề nào sau đây đúng?   **A.**. **B.**. **C.**. **D.**. |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

**Cách 1:** Đặt Có  (do )



Ta chứng minh .

Thật vậy ta có 

Dấu “=” xảy ra khi .

Vậy .

**Cách 2 :** Trắc nghiệm

**Chọn **

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   **A.  B.  C.  D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Ta có:  Khi 

***Chọn đáp án C***.

**Cách 2:** 

**Theo bài **

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất  và giá trị nhỏ nhất  của biểu thức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

Ta có: , khi 

Mặt khác:  khi 

***Chọn đáp án A***.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa . Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức .   A. B. C.. D. |

**Hướng dẫn giải**

Ta có  Mặt khác: 

Vậy, giá trị nhỏ nhất của là, xảy ra khi  giá trị lớn nhất của  bằng  xảy ra khi 

***Chọn đáp án A***.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi . Ta có: .

Đặt 



***Chọn đáp án A***.

**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức 

Ta có (đáp án A)

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi . Ta có: 

Ta có: .

Xét hàm số  Hàm số liên tục trên  và với  ta có: 

Ta có: 

***Chọn đáp án D***.

**Cách 2:** (Casio)

Từ , đặt  Thay vào P rồi dùng mode 7 ra đáp án D

**Cách 3:** Hình học (Xem video live của thầy)

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn  Gọi  và lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  Tính giá trị của .   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi . Ta có: 

Đặt , ta có 

Ta có 

Suy ra .

Xét hàm số  Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra



***Chọn đáp án A***.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện  Khẳng định nào sau đây là đúng?   A. B.  C. D. |

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức ta được





Vậy,  nhỏ nhất là khi  và  lớn nhất là khi 

***Chọn đáp án B***.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi . Ta có: 

Đặt .

Lúc đó: 



 đạt được khi 

***Chọn đáp án A***.

**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức 

Ta có 

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi .

Ta có: Đặt .

Lúc đó:



 đạt được khi 

***Chọn đáp án B***.

**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun lớn nhất của số phức 

Ta có 



|  |
| --- |
| 1. Gọi  là số phức thỏa mãn hai điều kiện  và  đạt giá trị lớn nhất. Tính tích   A. B. C. D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Đặt  Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được 

Đặt  Thay vào điều kiện thứ hai, ta có



Dấu bằng xảy ra khi 

***Chọn đáp án D***.

|  |
| --- |
| 1. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện . Tìm môđun nhỏ nhất của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi .

Ta có: 

Ta có: 

 khi 

***Chọn đáp án C***.

**Cách 2: **

Trong đó  (quay về dạng bài toán 1)

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm môđun nhỏ nhất của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1:** Gọi . Ta có: .

Đặt 

, khi 

***Chọn đáp án C***.

**Cách 2: (Hình học + CT tính nhanh)**

Ta có 

|  |
| --- |
| 1. Biết số phức  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  và biểu thức  đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức   A.  B.  C.  D. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi . Ta có: : tâm  và 

Mặt khác: 

Do số phức  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên  và  có điểm chung





***Chọn đáp án D***.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức . Tìm môđun lớn nhất của   A. 1. B. 0. C.. D.2. |

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

***Chọn đáp án A***.

|  |
| --- |
| 1. (NGUYỄN TRÃI – HD) Cho số phức  thỏa mãn: . Số phức  có môđun nhỏ nhất là:   **A.**  **B.**  **C.**  **D. .** |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

****

**Cách 1:** Gọi , .

Ta có: 

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn của số phức  là đường tròn  tâm và bán kính .

, với  là tâm đường tròn,  là điểm chạy trên đường tròn. Khoảng cách này ngắn nhất khi  là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm  với đường tròn (C).



**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn: . Số phức  có môđun nhỏ nhất

**Ta có **

|  |
| --- |
| 1. Trong mặt phẳng phức , các số phức  thỏa . Tìm số phức  được biểu diễn bởi điểm sao cho  ngắn nhất với .   **A.**. **B.**. **C.**. **D.**. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là điểm biểu diễn số phức 

Gọi  là điểm biểu diễn số phức 

Gọi  là điểm biểu diễn số phức 

Ta có :  Tập hợp điểm biểu diễn số phức  là đường trung trục  .

Để  ngắn nhất khi  tại  => **Đáp án A.**

|  |
| --- |
| 1. **( CHUYÊN SƠN LA – L2)** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện :  và  có môđun lớn nhất. Số phức  có môđun bằng:   A. . B. . C. . D. . |

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn B.**

Gọi 

Ta có: 

Suy ra tập hợp điểm  biểu diễn số phức  thuộc đường tròn  tâm  bán kính 

Dễ thấy , 

Theo đề ta có:

là điểm biểu diễn cho số

phức thỏa mãn:





Suy ra đạt giá trị lớn nhất lớn nhất

Mà  nên lớn nhất khi  là đường kính đường tròn 

 là trung điểm 

|  |
| --- |
| 1. **(CHU VĂN AN – HN)** Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị lớn nhất của .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

.

Đặt  . Ta có  và .

Đặt . Khi đó .



Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của  là   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** .  **(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)** |

**Lời giải**

**Cách 1:** Đặt , ta có 



Đặt  (vì ). Khi đó 

 xét biểu thức 

Ta có 



Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được 



Vậy  **Chọn A.**

**Cách 2:** Cho số phức  thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của 

Ta có 



|  |
| --- |
| 1. **(THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 2)**Cho các số phức  thỏa mãn . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  là   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

Cách 1: Đặt , khi đó  và .

Nên ta có 

Khi đó .

Dễ thấy  **Chọn A.**

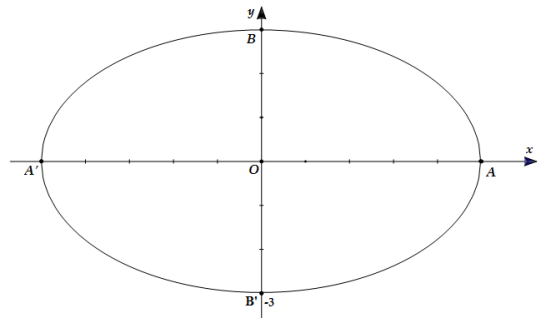
**Cách 2:** Chuyển về phương trình đường thẳng (dạng 1)

|  |
| --- |
| 1. **(ĐỀ THTT LẦN 5 – 2017)** Cho số phức  thỏa mãn  Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  lần lượt là   **A.**  và  **B.**  và  **C.**  và . **D.**  và . |

**Hướng dẫn giải.**

Gọi , . Theo giả thiết, ta có 



Gọi ,  và .

Khi đó  nên tập hợp các

điểm  là đường elip .

Ta có ;  và .

Do đó, phương trình chính tắc của  là .

Vậy  và . **Chọn D.**

|  |
| --- |
| 1. Trong các số phức  thỏa mãn điều kiện . Biết rằng số phức ,  có môđun nhỏ nhất. Tính .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải.**

**Cách 1:** Gọi , . Ta có 



.

Do đó .

Dấu  xảy ra . Vậy . **Chọn B.**

**Cách 2:** Chuyển về phương trình đường thẳng (bài tập 1)

|  |
| --- |
| 1. Tìm giá trị lớn nhất của  biết rằng  thỏa mãn điều kiện .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải.**

Ta có .

Vì  nên . **Chọn B.**

|  |
| --- |
| 1. **(THPT CHUYÊN KHTN – LẦN 1)** Trong các số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải.**

Ta có .

Vì  nên . **Chọn D.**

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Đặt  Mệnh đề nào sau đây đúng?   **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **(THPT CHUYÊN HÀ NAM)** |

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có 

. Mà 

Đặt , khi đó 



Vậy môđun của  **Chọn A.**

|  |
| --- |
| 1. Với hai số phức  và  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của .   **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)** |

**Lời giải**

✪ **Bổ đề.** Cho hai số phức  và , ta luôn có .

**Chứng minh.** Sử dụng công thức  và . Khi đó



✪ **Áp dụng **, ta được 

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được  **Chọn B.**

|  |
| --- |
| 1. Với hai số phức  và  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của .   **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)** |

**Lời giải**

✪ **Bổ đề.** Cho hai số phức  và , ta luôn có .

**Chứng minh.** Sử dụng công thức  và . Khi đó



✪ **Áp dụng **, ta được 

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được  **Chọn B.**

|  |
| --- |
| 1. **(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI)**Cho số phức  thỏa mãn .   Tính , với số phức .  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

Ta có .

Khi đó, giả thiết 

**TH1.** Với , ta có 

**TH2.** Với , đặt , ta có



Do đó . **Chọn A.**

|  |
| --- |
| 1. **(TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ LẦN 8)**Cho số phức  thỏa mãn . Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  là   **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

Ta có 



Khi đó .

Vậy  **Chọn C.**

|  |
| --- |
| 1. **(THPT NHÂN CHÍNH - HÀ NỘI)**Xét số phức  thỏa mãn . Mệnh đề nào sau đây đúng?   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Cách 1.** Từ giả thiết, ta có 



Lấy môđun hai vế của , ta được 

Đặt , ta có 

Vậy môđun của số phức  bằng 

**Cách 2.** Sử dụng máy tính casio ( hướng dẫn chi tiết ở **câu 26**) để tìm 

**Cách 3.** Đặt  và , thay vào đẳng thức đã cho thì



Suy ra  nên 

Giải ra ta có  mà  nên  hay . Do đó  **Chọn B.**

|  |
| --- |
| 1. **(THPT CHUYÊN LÀO CAI)**Xét số phức  và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là . Số phức  và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là . Biết rằng  là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của   **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

Gọi  và 

Dễ thấy  vì cùng vuông góc với  nên để  là hình chữ nhật.

Khi và chỉ khi 

Ta có  **Chọn C.**

|  |
| --- |
| 1. **(THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI)**Cho số phức  thỏa mãn điều kiện  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức     **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

Đặt , ta có 



Lại có 



Kết hợp với , ta được 

Đặt , khi đó  với 

Ta có . **Chọn B.**

|  |
| --- |
| 1. **(ĐHNT HN)** Cho số phức  thỏa mãn điêu kiện . Tính giá trị lớn nhất của biểu thức     **A. .** **B. .** **C. .** **D.** . |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Đặt , ta có:





Lại có: 





Kết hợp với , ta được:



Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được



Vậy **.**

|  |
| --- |
| 1. Cho  với  thỏa mãn  .   Giá trị của  là  **A. B. C. D.** |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

Ta có: 

 .

Từ giả thiết:  vì .

 .

Vậy 

|  |
| --- |
| 1. Cho các số phức  và số phức thay đổi thỏa mãn  Gọi và lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Giá trị biểu thức  bằng   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi là điểm biểu diễn của .

Gọi , . Gọi  là trung điểm .





Suy ra tập hợp các điểm là đường tròn tâm  bán kính .



Ta lại có :  .

Do đó : 



.

**Bài tương tự**

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  thỏa mãn  và . Tìm giá trị nhỏ nhất  của biểu thức ?   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

**Chọn D.**

Đặt  

.

Nên 

Ta lại có 

. Suy ra .

Dấu  xảy ra khi .

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Gọi số phức  thỏa điều kiện  và  lớn nhất. Tính .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A.**

Giả sử 

Ta có .

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức  là đường tròn  tâm là gốc tọa độ , bán kính .

Ta có 

Vì  nên điểm  thuộc đường tròn .

Gọi  là điểm thuộc , khi đó .

Suy ra  lớn nhất  lớn nhất  là đường kính của  

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho là hai số phức thỏa mãn phương trình , biết  Tính giá trị của biểu thức:  .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn D.**

**HD: Cách 1**. Ta có: 

*y*

*O*

*x*

**

**

**

****

**** và 

**Chú ý: **

Tập hợp điểm biểu diễn số phức  là đường tròn tâm *O*

bán kính .

Gọi 

Ta có:  đều

Mà với *M* là điểm thỏa

mãn  là hình thoi cạnh 1.

**Cách 2**. Đặt , ta có  và .

Khi đó: 

Sử dụng công thức . **Chọn D.**

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Gọi  và  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Tính giá trị của tổng .   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

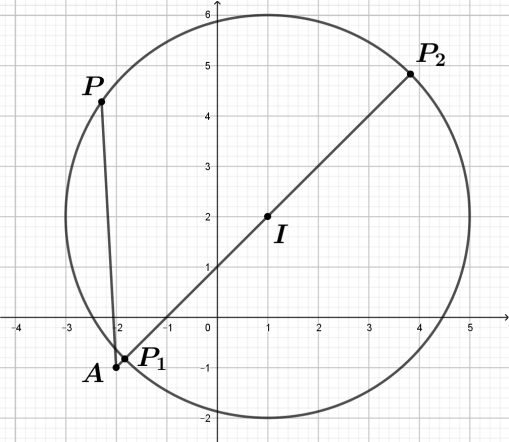
**Chọn C.**

**Cách 1:** (*Phương pháp hình học*)

Đặt số phức ,  có điểm biểu diễn hình học là .

Ta có .

Vậy tập hợp điểm  là đường tròn tâm , bán kính .

Ta có , với .

Vậy từ hình vẽ ta nhận thấy: .

Vậy ta suy ra .

**Cách 2:** (*Phương pháp đại số*)

***Công cụ cơ bản: ***, với mọi số phức , . Áp dụng, ta có:

 

 

Vậy ta có .

|  |
| --- |
| 1. **[Phạm Minh Tuấn – Vted 15]** Cho ba số phức  thỏa  và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức   .  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi là điểm biểu diễn số phức , khi đó từ giả thiết ta suy ra tam giác  vuông cân tại  và bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của .

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát

Cho tam giác , đặt , , , khi đó ta có



Chứng minh: dùng bài toán kinh điển 

Đặt  khi đó 

và  từ đó sử dụng  suy ra hệ thức .

Áp dụng bài toán trên ta có , chọn **B.**

**Ta có thể chứng minh bài toán  trên bằng ngôn ngữ số phức.**

Gọi tọa độ các điểm  trên mặt phẳng phức là  khi đó , ,  , , , . Khi đó bất đẳng thức  tương đương

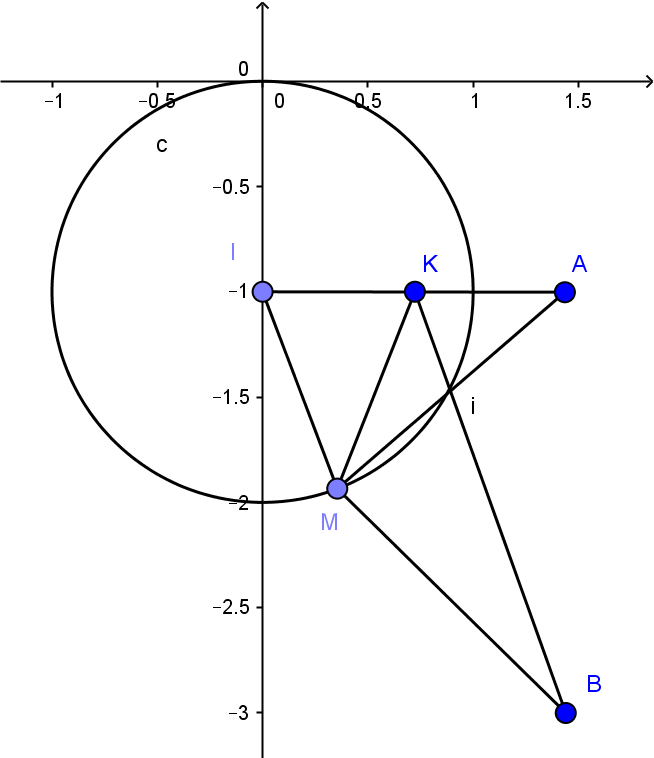
Mặt khác :

Mà  nên suy ra .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:     **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**



Gọi điểm biểu diễn của  là . Khi đó  nằm trên đường tròn tâm  Gọi tọa độ các điểm  do đó:

**** Gọi  khi đó ta có:  Vậy  và  là hai tam giác đồng dạng. Khi đó: .

Vậy .

Theo bất đẳng thức tam giác: 

Vậy 

|  |
| --- |
| 1. Với hai số phức  và  thoả mãn  và  tìm giá trị lớn nhất của   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Vì hai số phức  và  thoả mãn  và  nên  .

Gọi ,  lần lượt là hai điểm biểu diễn của hai số phức  và  khi đó từ  suy ra  nằm trên đường tròn  có tâm , bán kính  và  là đường kính của đường tròn .

Như vậy .

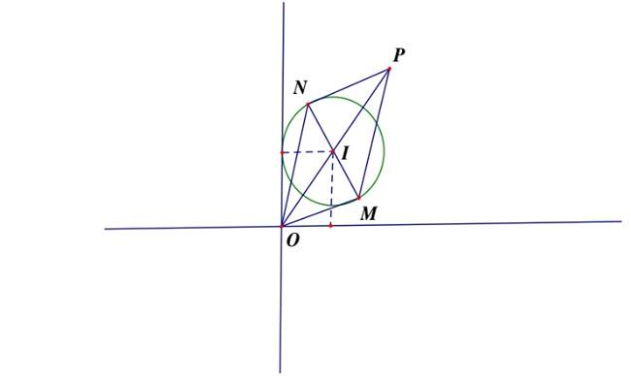
Ta có .

Suy ra   . Dấu bằng xảy ra khi .

|  |
| --- |
| 1. Giả sử  là hai trong số các số phức  thỏa mãn  và  Giá trị lớn nhất của  bằng   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

**Chọn A.**

****

Ta có .

Điểm biểu diễn  thuộc đường tròn tâm , .

Gọi ,  là điểm biểu diễn , nên  là đường kính. Dựng hình bình hành  ta có .

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi .

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức ,  thỏa mãn ; với  là tham số. Giá trị của  để ta luôn có  là:   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt  có biểu diễn hình học là điểm 



Suy ra biểu diễn của số phức  là đường thẳng .

Ta có: 

 với .

Mà ta có 

Nên 

.

|  |
| --- |
| 1. **[PTNK TP HCM]** Cho là số phức thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   A. . B. . C. . D. . |

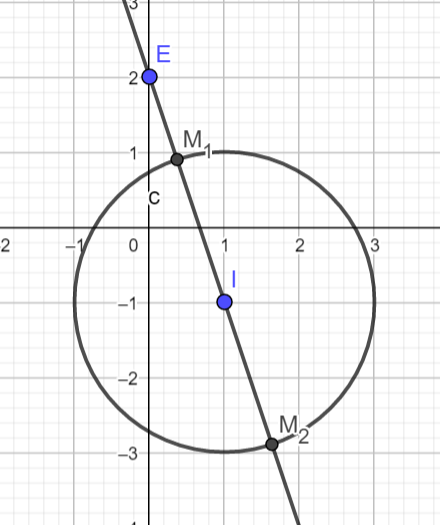
**Lời giải**

**Chọn C.**

Gọi  là điểm biểu diễn số phức .

Do  suy ra  thuộc đường tròn tâm , bán kính .

Đặt  là trung điểm của . Khi đó .



Do  nằm ngoài đường tròn, nên .

***Cách 2 :***

=.

Suy ra tọa độ điểm  thỏa mãn 

Hệ có nghiệm khi  .

|  |
| --- |
| 1. **(CHuyên Hạ Long-lần 2-2018-Mã đề 108)**Cho các số phức  và số phức thay đổi thỏa mãn  Gọi và lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Giá trị biểu thức  bằng   **A.**. **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải:**

**Chọn D.**

**Cách 1:**

Gọi số phức  với .

Ta có  . Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức là đường tròn  có tâm  và bán kính  .

Ta có , .

Đường thẳng  có phương trình  .

cắt tại 2 điểm phân biệt  có tọa độ là nghiệm của hệ .

Ta có  nên ,.

Khi đó  .

**Cách 2:**

Gọi số phức  với .

Ta có  . Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức là đường tròn  có tâm  và bán kính  .

Ta có:  , .

**Cách 3:**

Gọi số phức  với .

Ta có  . Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức là đường tròn  có tâm  và bán kính  .

Ta có , , 

**CÂU PHÁT TRIỂN**

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện  . Gọi và lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Giá trị biểu thức  bằng   **A.**. **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải:**

**Chọn C.**

Gọi số phức  với , khi đó  .

Ta có: .

Áp dụng bđt Bu-nhi-a-cốp-xki ta có: .

Khi đó ta có bất phương trình  .

Do đó 

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Gọi và lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Giá trị biểu thức  bằng   **A.**. **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải:**

**Chọn B.**

Gọi  (với ****) có điểm  biểu diễn  trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có 



 (1).

Số phức  có điểm  biểu diễn  trên mặt phẳng tọa độ.

Đặt  , từ (1) ta có .

Mặt khác  nên  thuộc đoạn . Khi đó  , .

Vậy  .

**Nhận xét:**

* GTLN, GTNN ở câu dạng này chỉ có thể đạt được tại 2 đầu  .
* Một sai lầm thường gặp là đánh giá  nhưng do góc  là góc tù nên không tồn tại điểm  trên đoạn  sao cho .

|  |
| --- |
| 1. **(Chuyên Hạ Long-lần 2-2018-Mã đề 123)** Cho số phức  thỏa mãn . Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức . Khi đó modun của số phức   **A**.. **B**.. **C.**. **D.**. |

**Lờigiải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** Giả sử  ta có 

Ta có 

Ta có 

Suy ra  suy ra  do đó ta được  vậy .

**Cách 2:** Gọi **với .**

Ta có: . Suy ra, tập hợp điểm  biểu diễn cho số phức  trên hệ tọa độ  là đường tròn tâm  và bán kính .

Lại có: , đây là phương trình của đường thẳng .

Ta thấy .

Điều kiện để  cắt  là: .

Suy ra: và .

**Cách 3:**

Gọi  với .

Ta có  suy ra .

Từ .

Ta có .

. Suy ra .

Thay  vừa tìm được vào  ta được .

Ta giải được  hoặc . Đây tương ứng là GTLN và GTNN của .

Vậy . Khi đó, .

|  |
| --- |
| 1. Biết số phức ,  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  và biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính .   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

**Chọn A .**

Theo giả thiết 





.

Ta có 

Xét điểm ;  và  . Khi đó, .

Bài toán trở thành tìm điểm  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì  nên hai điểm  nằm cùng phía đối với đường thẳng .

Gọi  là điểm đối xứng với  qua 

Đường thẳng đi qua điểm  và có VTPT  nên có phương trình 

Gọi  là giao điểm của và . Tọa độ điểm  là nghiệm của hệ phương trình   suy ra 

 đối xứng với  qua  nên .

Ta có .

Dấu bằng xảy ra là giao điểm của  và đường thẳng 

Đường thẳng  đi qua điểm  và có VTPT  có phương trình  

Tọa độ điểm  là nghiệm của hệ phương trình  

Vậy .

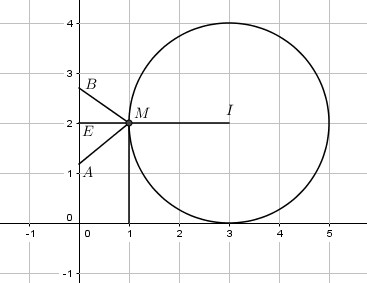
|  |
| --- |
| 1. Gọi  là 2 nghiệm của phương trình  thỏa mãn . Biết rằng  là số phức thỏa mãn . Tìm GTNN của biểu thức .   **A.  B.  C.  D..** |

**Lời giải.**

**Chọn D .**

Giả sử  ta có suy ra tập hợp điểm biểu diễn là trục tung.

Giả sử  lần lượt là 2 điểm biểu diễn cho , ta có .

Giả sử  và  là điểm biểu diễn cho số phức, ta cósuy ra tập hợp điểm biểu diễn  cho số phức  là đường tròn tâm  bán kính  .

Ta có  , gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên trục tung, ta thấy  nhỏ nhất khi  là trung điểm  suy ra , vậy 

|  |
| --- |
| 1. Cho  là số phức thỏa . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức     **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Gọi 

Ta có: 

 (\*)

Theo bài ra:





Thay (\*) vào  ta được:



Áp dụng bđt Bunhiacopxki ta được

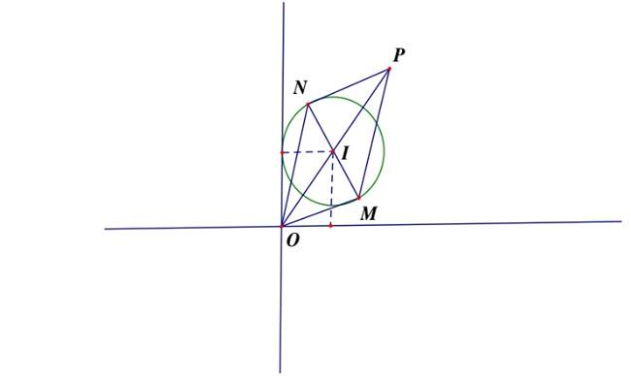


Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Giả sử  là hai trong số các số phức  thỏa mãn  và  Giá trị lớn nhất của  bằng   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

**Chọn A.**

****

Ta có .

Điểm biểu diễn  thuộc đường tròn tâm , .

Gọi ,  là điểm biểu diễn , nên  là đường kính. Dựng hình bình hành  ta có .

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi .

|  |
| --- |
| 1. Xét các số phức  thỏa mãn . Tính  khi  đạt giá trị lớn nhất.   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi với .

Ta có: . Suy ra, tập hợp điểm  biểu diễn cho số phức  trên hệ tọa độ  là đường tròn  tâm  và bán kính .

Gọi ,  và là trung điểm của .

Đặt suy ra . (BĐT Bunhiacopxki).

Phương trình đường trung trực của  là: .

Ta có:  với  là trung điểm của .

Vì  chạy trên đường tròn ,  cố định nên 

Do vậy  nên 

Dấu « = » xảy ra khi  và ba điểm  thẳng hàng. Điều này thỏa mãn nhờ .

Do đó: , tọa độ của  là nghiệm hệ:

****

Mặt khác :

 **và .**

Vậy để thì Suy ra .

|  |
| --- |
| 1. **(SGD – HÀ TĨNH )**Trong các số phức *z* thoả mãn , gọi  và là số phức có mô-đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức và  bằng.   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

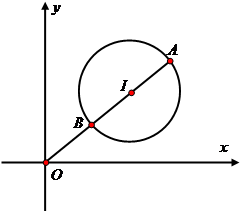
**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi  và  là điểm biểu diễn số phức .

Theo giả thiết .

Suy ra 



Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức  thỏa mãn  là đường tròn  có tâm  bán kính .

Đường  có phương trình  cắt đường tròn  tại hai điểm , . Do  nên điểm  biểu diễn số phức có môđun lớn nhất, và điểm  biểu diễn số phức có môđun nhỏ nhất.

|  |
| --- |
| 1. **[HKII-SỞ BẠC LIÊU-2017-2018]** Xét số phức  ( và ) thỏa mãn . Tính  khi  đạt giá trị lớn nhất.   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn C.**

**Cách 1:**

Từ giả thiết có  với  và .

Ta có 







Xét , với .

;  

Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Suy ra , đạt được khi , .

Vậy .

**Cách 2:**

Ta có . Vì  nên , .

Khi đó













 với .

Đặt , .



Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

.

Khi đó: .

Vậy .

**Nhận xét:** có thể đổi câu hỏi thành tìm Min

|  |
| --- |
| 1. Cho ,  là hai số phức thỏa mãn , biết . Tính giá trị của biểu thức   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1.**

+ Đặt , , ta có 





+ Sử dụng công thức:  ta có 

Suy ra .

**Cách 2.**

+ Biến đổi: 

Ta có .

+ Sử dụng công thức bình phương mô đun



Trong đó  là góc  với M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức  trên mặt phẳng phức

.

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:.   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt , ta có 

 (\*)

Lại có 



Kết hợp với (\*), ta được 

Áp dụng BĐT Cauchy schwarz ta có

.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức:?   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

**Chọn C.**











|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  thỏa mãn ; với  là tham số. Giá trị của  để ta luôn có  là:   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt  có biểu diễn hình học là điểm 



Suy ra biểu diễn của số phức  là đường thẳng .

Ta có: 

 với .

Mà ta có 

Nên 

.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A**.

Gọi , .

Ta có 

.

Lại có 

.

Mặt khác 

Suy ra .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  (, là các số thực) thỏa mãn  và có môđun nhỏ nhất. giá trị của  là?   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có:

Mô đun của số phức  là:

**  **

Số phức **  **

|  |
| --- |
| 1. Trong các số phức  thỏa mãn điều kiện . Tìm số phức  có môđun nhỏ nhất.   A. . B. . C. . D. . |

**Lời giải**

**Chọn C.**

Gọi số phức  có dạng .  thỏa mãn 



Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki.





Dấu  xảy ra 

|  |
| --- |
| 1. Trong các số phức  thỏa mãn điều kiện . Số phức  có mô đun bé nhất bằng   **A.** **B.** . **C.** . **D.** . |

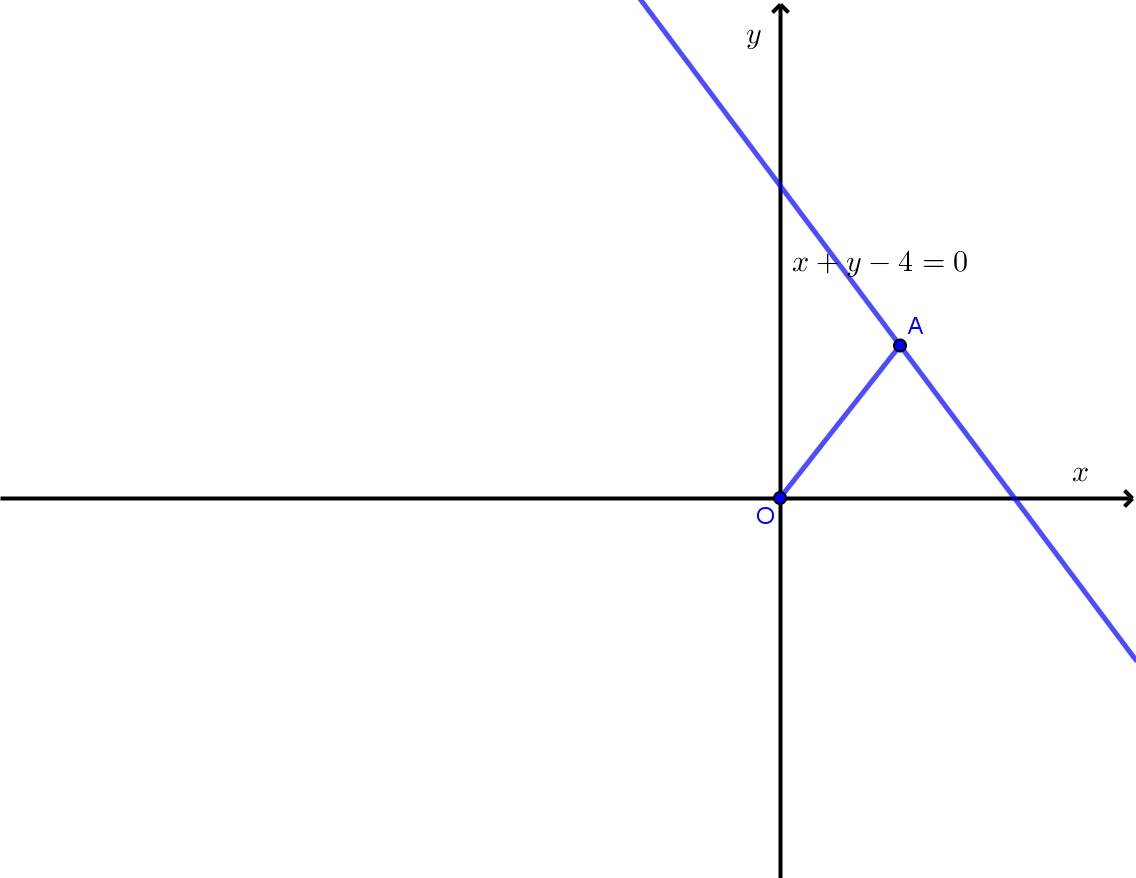
**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt . Khi đó 

.

Số phức có mô đun nhỏ nhất bằng khoảng cách từ  đến đường thẳng .



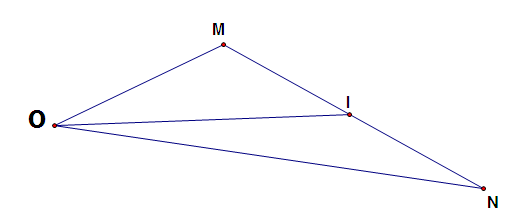
.

|  |
| --- |
| 1. **(Đề Star Education)** Cho hai số phức  thỏa mãn  và . Giá trị lớn nhất của biểu thức  là:   **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta gọi  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức .

Từ giả thiết : 

vớilà trung điểm của đoạn thẳng.

.

Ta có 

. Vậy 

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  thỏa mãn  và  . Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  . Khi đó mô đun của số phức   là :  **A**.. **B**.. **C**.. **D**.. |

**Lời giải**

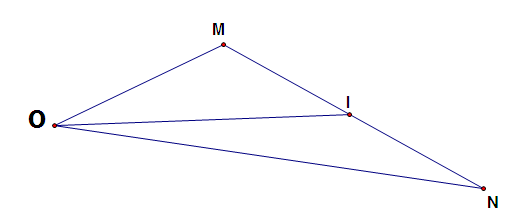
**Chọn A.**

Ta gọi  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức .

Từ giả thiết : với  là trung điểm của đoạn thẳng.

.

Ta có 



Vậy 

.

Vậy .

Suy ra 

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của biểu thức là:   **A.**. **B.**3. **C.**. **D.**. |

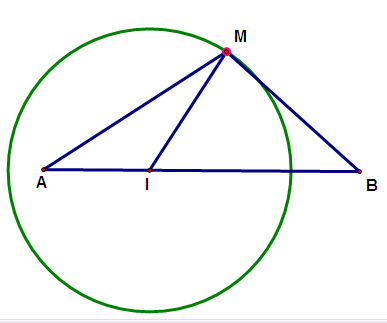
**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta gọi là điểm biểu diễn số phức.

 . Suy ra 

Khi đó:

,

với 

Ta có: suy ra .

Theo định lý Stewart ta có: 

(Hoặc có thể chứng minh theo phương pháp véc tơ



Suy ra:





)

Vậy 

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  . Gọi  là số phức thỏa mãn  . Đặt  lần lượt là giá trị lớn nhât, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  . Tính modun của số phức   **A. B. C. D.** |

**Lời giải**

Giả sử  . Ta có 

Gọi  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức 

Ta tìm Max – Min của 

Ta có  thuộc đường tròn và  đều  .

Gọi  thuộc cung  . Ta có 





|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất  của ?   A. . B. . C. . D. . |

**Lời** **giải**

**Chọn** **D**

Gọi  là trung điểm 

Suy ra .

Mặt khác 

.

Mà .

Dấu “ = “ xẩy ra khi và chỉ khi .

|  |
| --- |
| 1. **[ Phạm Minh Tuấn, lần 3, năm 2018- Câu 46]**   Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng tính chất: 

Ta có: 



|  |
| --- |
| 1. **[2D4-4] [THPT Chuyên LQĐ, LAI CHÂU, lần 1, 2018]** Cho hai số phức  thỏa mãn điều kiện  và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ?   **A.  .** **B.**  **.** **C.**  **.** **D.** |

.

**Lời giải**

**Chọn B.**

+) Gọi .

Nên .

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức  là Parabol .

+) Gọi .

Khi đó 

Nên tập hợp điểm biểu diễn số phức  là đường tròn  tâm  bamns kính .



 nhỏ nhất khi và chỉ khi  nhỏ nhất.

Ta có: .

Nên  nhỏ nhất khi  nhỏ nhất.

Ta có: .

.

Do đó .

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. **[2D4-4]** Cho hai số phức  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất  của biểu thức   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có 

Đặt  với () theo đề bài ta có (\*). Ta cần tìm GTLN của 

Đặt . Ta có: .

Mà (\*\*) nên

Kết hợp với  suy ra 

Suy ra 

Dấu "=" xảy ra khi (\*\*) xảy ra khi . Kết hợp (\*) ta được 

Vậy giá trị lớn nhất của  bằng .

|  |
| --- |
| 1. **[Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2018]** Cho hai số phức ;  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**.

**Chọn A**



Ta có   .

Suy ra điểm  biểu diễn số phức  nằm trên đường tròn  có tâm  và có bán kính là .

Mặt khác,  nên điểm biểu diễn số phức  là điểm  nằm trên đường tròn  có tâm  và có bán kính là .

Ta thấy     .

 lớn nhất khi và chỉ khi  lớn nhất, khi đó bốn điểm , , ,  theo thứ tự thẳng hàng.

Vậy giá trị lớn nhất của   .

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất  của biểu thức .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn C.**

**Cách 1 :**

Giả sử  ,  .

 (1)

.

Suy ra .

.

Từ (1) ta có , bán kính . Gọi  là hình chiếu của  trên .

Đường thẳng  có PTTS .



, 

, 

Vậy .

**Cách 2 :**

 điều này cho thấy  đang nằm trên hình tròn tâm  bán kính bằng 1.

 điều này cho thấy  đang thuộc nửa mặt phẳng tạo bởi đường thẳng  là trung trực của đoạn  với 



(Minh hoạ như hình vẽ)





|  |
| --- |
| 1. **[Nguyễn Khuyến, Bình Dương, 18/3,2018]** Cho  và  là  số phức thỏa mãn:  và . Gọi  là giá trị lớn nhất của biểu thức . Hãy chọn khẳng định đúng về .   **A.**. **B.** .  **C.** . **D.** Không tồn tại . |

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có  .

Khi đó:

  .

Đặt .

Ta có  

Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Dựa vào bảng biến thiên ta có .

Dấu bằng xảy ra khi  .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn  và . Khẳng định nào sau đây đúng?   **A.**. **B.** .  **C.** . **D.**. |

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có ** **

** **.

Mặt khác:  .

Suy ra:  . Đặt  ta được:

  .

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  với  là các số thực không âm thỏa mãn và biểu thức . Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của . Môđun của  là   **A.**. **B.** . **C.** 4. **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có    .

  .

Đặt  ta có .

Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của , với  ta được ;  Vậy .

|  |
| --- |
| 1. **(THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh lần 3-2018)** Cho hai số phức . Gọi là số phức thỏa mãn . Đặt  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức . Tính mô đun của số phức .   A. . B. . C. . D. |

**Lời giải**

**Chọn A.**

Giả sử lần lượt biểu diễn số phức .

Từ giả thiết ta có: .

Nênthuộc đường tròn tâm.

Ta có .

Để  thì  trùng nên .

Để thì  và  nên  và  nằm chính giữa cung nhỏ và . Do vậy

.

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  và  thỏa mãn các điều kiện sau:   .  Tìm giá trị nhỏ nhất của .  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

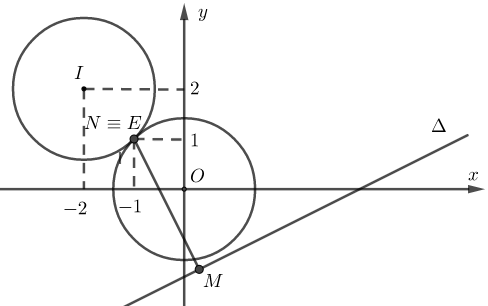
**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi  lần lượt là điểm biểu diễn của  với .

Ta có 

.

Do đó,  thuộc nửa mặt phẳng bờ  không chứa , kể cả bờ.

Ta có  suy ra

.

Do đó,  thuộc phần chung của hai hình tròn  và .

Dễ thấy hai hình tròn này tiếp xúc ngoài tại điểm . Do đó, .

Ta thấy  nên  nhỏ nhất khi  ngắn nhất, khi đó  là hình chiếu của  trên .

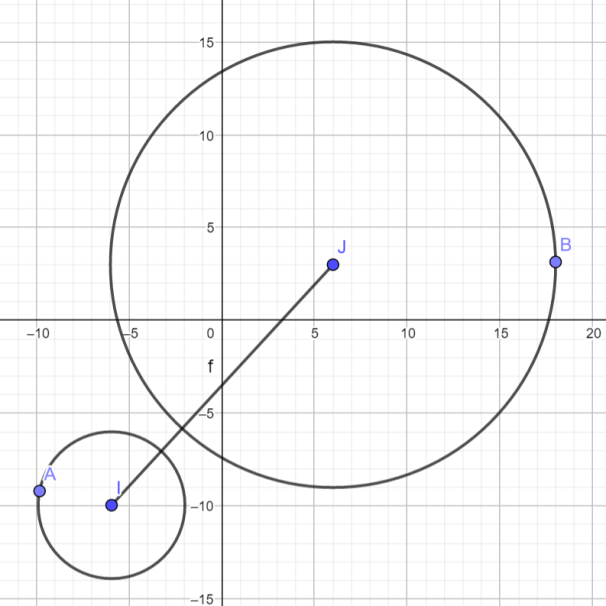
Ta có .

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. **[CHUYÊN NGỮ LẦN 1-2018]** Cho hai số phức  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A.**



Đặt , gọi .

Có  nên  có tâm  bán kính .

Có  nên  có tâm , bán kính .

Có .

Do , ,  nên .

|  |
| --- |
| 1. Xét các số phức  thỏa mãn  Tính  biết biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** 3. |

**Lời giải**:

**Chọn A**



Giả thiết 

Gọi  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức 

Bài toán trở thành: Tìm  sao cho biểu thức  nhỏ nhất

Ta có 



 với 

Ta có  dấu “=”xảy ra khi và chỉ khi  theo thứ tự đó thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng 

 là giao của của BC và .

|  |
| --- |
| 1. Cho các số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .   **A.**  **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn C.**



Chọn  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức ,

Dựa vào điều kiện  , .

Suy ra ta có tam giác  vuông cân tại .

Phép quay tâm  góc quay  ta có:





Do tam giác  đều , 

Suy ra .

Dấu  xảy ra khi  thẳng hàng.

Khi đó tam giác  có ,  và .

Từ đó suy ra .

Vậy .

|  |
| --- |
| 1. Cho hai số phức  thỏa mãn ; với  là tham số. Giá trị của  để ta luôn có  là:   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt  có biểu diễn hình học là điểm 



Suy ra biểu diễn của số phức  là đường thẳng .

Ta có: 

 với .

Mà ta có 

Nên 

.

|  |
| --- |
| 1. Cho số phức  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   **A.** . **B.** . **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

**Chọn A**.

Gọi , .

Ta có 

.

Lại có 

.

Mặt khác 

Suy ra .