**MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ PHỨC ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT QG**

# A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1. Một số phức** là một biểu thức có dạng *a + bi*, trong đó a, b là các số thực và số *i* thoả mãn *i2* = -1. Ký hiệu số phức đó là z và viết z = *a + bi* .

*i* được gọ*i* là đơn vị ảo

a được gọi là phần thực. Ký hiệu Re(z) = a

b được gọi là phần ảo của số phức z = *a + bi* , ký hiệu Im(z) = b

Tập hợp các số phức ký hiệu là C.

*\*) Một số lưu ý:*

- Mỗ*i* số thực a dương đều được xem như là số phức với phần ảo b = 0.

- Số phức z = *a + bi* có a = 0 được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.

- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

**2. Hai số phức bằng nhau.**

Cho z = *a + bi* và z’ = *a’ + b’i.*

z = z’ ⇔ 

**3. Biểu diễn hình học của số phức.**

Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm M(a;b) trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Ngược lại, mỗi điểm M(a;b) biểu diễn một số phức là z = *a + bi* .

**4. Phép cộng và phép trừ các số phức.**

Cho hai số phức z = *a + bi* và z’ = *a’ + b’i*. Ta định nghĩa:



**5. Phép nhân số phức.**

Cho hai số phức z = *a + bi* và z’ = *a’ + b’i*. Ta định nghĩa:



**6. Số phức liên hợp.**

Cho số phức z = *a + bi*. Số phức  = *a – bi* gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

Vậy  = = *a - bi*

*Chú ý:*  10)  = z ⇒ z và  gọi là hai số phức liên hợp với nhau.

20) z. = a2 + b2

\*) Tính chất của số phức liên hợp:

(1): 

(2): 

(3): 

(4): z.= (z = *a + bi* )

**7. Môđun của số phức.**

Cho số phức z = *a + bi* . Ta ký hiệu  là môđun của số phư z, đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu M(a;b) biểu diễn số phc z = *a + bi*, thì  = =

- Nếu z = a + bi, thì  = =

**8. Phép chia số phức khác 0.**

Cho số phức z = *a + bi ≠ 0 (tức là a2+b2 > 0 )*

Ta định nghĩa số nghịch đảo z-1 của số phức z ≠ 0 là số

*z-1= *

Thương của phép chia số phức z’ cho số phức z ≠ 0 được xác định như sau:

**

Với các phép tính cộng, trừ, nhân chia số phức nói trên nó cũng có đầy đủ tính chất giao hoán, phân phối, kết hợp như các phép cộng, trừ, nhân, chia số thực thông thường.

**9. Phương trình bậc hai với hệ số thực.**

\* Cho phương trình bậc hai : , có .

+ Nếu > 0, PT có 2 nghiệm thực phân biệt 

+ Nếu  = 0, PT có nghiệm kép x1 = x2 = 

+ Nếu < 0, PT có 2 nghiệm phức 

\* Cho phương trình bậc hai : .

Khi b chẵn có b’ = b/2 ; =b’2 – ac.

+ Nếu > 0, PT có 2 nghiệm thực phân biệt 

+ Nếu = 0, PT có nghiệm kép x1 = x2 = 

+ Nếu < 0, PT có 2 nghiệm phức 

**10. Một số kết quả cần nhớ**

1) i0 = 1  i4n = 1 2) i1 = i  i4n + 1 = i

3) i2 = - 1  i4n + 2 = - 1 4) i3 = - i  i4n + 3 = - i

5) (1 – i)2 = - 2i 6) (1 + i)2 = 2i

**B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**

**DẠNG I. TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA SỐ PHỨC**

**I. PHƯƠNG PHÁP:** Sử dụng định nghĩa, các phép toán để tính toán các yếu tố có liên quan.

**II. CÁC VÍ DỤ**

**Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017)** Cho hai số phức  và . Tìm số phức .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Đáp án: **A**

**Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Cho số phức . Tìm phần thực  và phần ảo  của .

**A. ** **B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Đáp án: **D**

**Ví dụ 3. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Tìm số phức *z* thỏa mãn 

**A. ** **B. ** **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Đáp án: **B**

**Ví dụ 4. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Cho số phức . Tính .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Đáp án: **D**

**Ví dụ 5. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức  là

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Hướng dẫn giải**

Đáp án: **C**

**III. BÀI TẬP**

**Câu 1. (Mã đề 101 - QG – 2017)** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 2. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Cho hai số phức  và . Tìm số phức 

**A. **. **B. ** **C. ** **D. **

**Câu 3. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Cho hai số phức  và . Tìm phần ảo *b* của số phức .

**A.  B.  C.  D. **

**Câu 4. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Cho số phức . Tìm phần thực a của z.

**A.  B.  C.  D. **

**Câu 5. (QG – 2018)** Số phức  có phần ảo bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 6. (QG – 2018)** Số phức có phần thực bằng  và phần ảo bằng  là

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 7.** **(QG – 2018)** Số phức  có phần thực bằng

**A.** – 5. **B.** 5. **C.** – 6. **D.** 6.

**Câu 8. (QG – 2018)** Số phức có phần thực bằng  và phần ảo bằng  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 9. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 10. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 11. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 12.** Cho số phức . Tìm phần thực và phần ảo của số phức .

**A.** Phần thực bằng  và phần ảo bằng 

**B.** Phần thực bằng  và phần ảo bằng 

**C.** Phần thực bằng  và phần ảo bằng 

**D.** Phần thực bằng  và phần ảo bằng 

**Câu 13.** Cho 2 số phức *z* và *z’.* Các phát biểu nào sau đây **sai** ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 14.** Cho số phức z = 3- 4i. Phần thực và phần ảo số phức z là

**A.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng - 4i;

**B.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4;

**C.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4i;

**D.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4.

**Câu 15.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức z = i2020.

**A.** 0 và 2020 **B.** 0 và 1 **C.** 1 và 0 **D.** 2020 và 0

**Câu 16.** Tìm phần thực, phần ảo của 

**A.** phần thực là 1, phần ảo là 1 **B.** phần thực là 11, phần ảo là 1

**C.** phần thực là 1, phần ảo là 3 **D.** phần thực là 11, phần ảo là 3

**Câu 17.** Cho số phức . Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?

**A.** có phần thực và phần ảo .

**B.** là số thuần ảo.

**C.** Mô đun của  bằng 1

**D.** có phần thực và phần ảo đều bằng 0.

**Câu 18.** Tính  và  biết 

**A.** 4 và 13 **B.** 4 và 5 **C.** 4 và 0 **D.** 13 và 5

**Câu 19.** Cho số phức . Tìm số phức .

**A.** **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 20.** Cho số phức  và  . Môđunsố phức **** là

**A.** ; **B. ** ; **C**. 4; **D.** 8.

**Câu 21.** Số phức nghịch đảo của số phức z = 1 -  là:

**A.**  =  **B.**  =  **C.**  = 1 +  **D.**  = -1 + 

**Câu 22.** Mô đun của số phức  là

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Câu 23.** Cho số phức z = a + bi (với a, b là các số thực). Xét các phát biểu sau

(1) z² – ² là số thực (2) z² + ² là số ảo

(3) z là số thực (4) |z| – z là bằng 0

Số câu phát biểu đúng là

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 24.** Giá trị của A = (1 + i)20 bằng

A. 1024 **B.** 220 **C.** –1024 **D.** 1024 – 1024i

**Câu 25.** Cho số phức z thỏa mãn:.Tìm mô đun số phức.

**A**. 5 **B.**  **C.**  **D.** 4

**Câu 26.** Cho số phức z biết . Phần ảo của số phức z2 là

**A.** . **B. -**. **C. **. **D**. .

**Câu 27.** Cho số phức z thỏa mãn:. Tìm môđun của .

**A.**  **B.**  **C.** 8 **D.** 4

**Câu 28.** Phần thực của số phức  thỏa mãn  là

**A.** **B.** **C.** **D.**

**DẠNG II. PHƯƠNG TRÌNH TRÊN TẬP SỐ PHỨC**

**I. PHƯƠNG PHÁP :** Sử dụng các phương pháp giải phương trình mẫu mực như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai….với ẩn là số phức z.

**II. CÁC VÍ DỤ**

**Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017)** Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức  và  là nghiệm ?

**A.  B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Cách 1: Ta có ; . Suy ra  và  là nghiệm của phương trình **.**

Đáp án: **C**

Cách 2: Thử đáp án bằng MTBT

**Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Kí hiệu  là hai nghiệm phức của phương trình . Tính 

**A. **. **B. ** **C. **. **D. **.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình có hai nghiệm  .

Khi đó 

Đáp án: **B**

**Ví dụ 3.** Tìm số phức sau:

a) (1 + z)(2 + 3i) = 1 + i

b) 

**Giải**

a) Ta có (1 + z)(2 + 3i) = 1 + i



b) Ta có



**Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau trên trường số phức:

a)z4 + 2z2 -3 = 0

b) z4 – 4z3 +7z2 – 16z + 12 = 0 (1)

**Giải**

a) Ta có z4 + 2z2 -3 = 0 

Vậy phương trình có 4 nghiệm

b) Do tổng tất cả các hệ số của phương trình (1) bằng 0 nên (1) có nghiệm z = 1.

(1) ⇔ (z – 1)(z3 – 3z2 + 4z – 12) = 0

⇔ (z – 1) (z – 3) (z2 + 4) = 0

⇔

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

**III. BÀI TẬP**

**Câu 1. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Kí hiệu  là hai nghiệm phức của phương trình . Tính 

**A. **. **B. ** **C. **. **D. **.

**Câu 2. (QG-2019)**Gọi  là hai nghiệm phức phương trình . Giá trị bằng

**A.** 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

**Câu 3. (QG-2019)**Gọi  là hai nghiệm phức của phương trình . Giá trị của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 4. (QG-2019)**Gọi  là hai nghiệm phức của phương trình . Gái trị của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 5. (QG-2019)**Gọi  là hai nghiệm phức của phương trình . Giá trị của  bằng

**A.** 10. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 2.

**Câu 6.** Tìm mô đun của số phức z thoả .

**A.  B.**  **C.  D.** 

**Câu 7.** Cho số phức z thỏa mãn (1 + 2i)z – 5 – 5i = 0. Tìm số phức w = 

**A.** 6 + 2i **B.** 2 + 6i **C.** –2 + 6i **D.** –6 + 2i

**Câu 8. G**iải phương trình 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 9. Gi**ải phương trình .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 10. G**iải phương trình 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 11.** Tìm nghiệm của phương trình 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 12.** Tìm nghiệm của phương trình .

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** | **B.** |
| **C.** | **D.** |

**Câu 13.** Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z):  nhận  làm một nghiệm.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 14.** Gọi z1 và z2 lần lượt là nghiệm của phương trình: . Tính giá trị của biểu thức 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 15.** Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình . Tính độ dài đoạn thẳng .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 16.** Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn . Tính .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**DẠNG III. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN**

**I. PHƯƠNG PHÁP:** Để giải bài toán tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước, ta thực hiện theo các bước sau:

B1: Đặt 

B2: Thay vào đk được hệ phương trình hai ẩn a,b.

B3: Giải tìm a,b

**Chú ý:**

* Tìm số phức  thật ra là tìm phần thực a và phần ảo b của nó.
*  ,
*  . Khi đó: 
* . Khi đó  là số ảo (thuần ảo) khi  ,  là số thực khi .

**Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017)** Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn  và  là số thuần ảo ?

**A.**  **B.** Vô số **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Điều kiện .

Ta có 





Lại có .

Vì  là số thuần ảo nên .

Từ (1) + (2) suy ra . Thay vào (1), ta được:

 .

Với .

Với .

Đáp án: **C**

**Ví dụ 2. (Mã đề 101 - QG – 2017)** Cho số phức   thỏa mãn . Tính 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Theo giả thiết, ta có:





Đáp án: **B**

**Ví dụ 3. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Tìm tất cả các số thực *x*, *y* sao cho 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Đáp án: **C**

**Ví dụ 4. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn  và  là số thuần ảo ?

**A.** Vô số **B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Đặt , ta có:

.

Lại có .

Vì  là số thuần ảo nên .

Từ (1)+(2) suy ra . Thay vào (1), ta được:

 .

Với .

Với .

Đáp án: **D**

**Ví dụ 5. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Cho số phức *z* thỏa mãn  và . Tìm số phức .

**A.  B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Đặt , ta có:



Lại có 



.

Đáp án: **D**

**III. BÀI TẬP**

**Câu 1. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Cho số phức  thoả mãn . Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 2. (QG – 2018)** Có bao nhiêu số phức  thỏa mãn  ?

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 3.** **(QG – 2018)** Có bao nhiêu số phức  thỏa mãn  ?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

**Câu 4. (QG – 2018)** Có bao nhiêu số phức  thỏa mãn  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 5. (Mã đề 103 - QG – 2017)** Cho số phức *z* thỏa mãn  và . Tìm số phức .

**A.  B.  C.  D. **

**Câu 6. (QG – 2018)** Tìm hai số thực  và  thỏa mãn  với  là đơn vị ảo.

**A.** ; . **B.** ; . **C.** ; . **D.** ; .

**Câu 7. (QG – 2018)** Có bao nhiêu số phức  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 8. (QG – 2018)** Tìm hai số thực  và  thỏa mãn  với  là đơn vị ảo.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Câu 9. (QG – 2018)** Tìm hai số thực *x* và *y* thỏa mãn  với *i*  là đơn vị ảo.

**A. **. **B. **. **C.** . **D.** .

**Câu 10. (QG – 2018)** Tìm hai số  và  thỏa mãn  với  là đơn vị ảo.

**A.** ;  . **B.** ;  . **C.** ;  . **D.** ;  .

**Câu 11. (QG-2019)**Cho số phức  thỏa mãn . Mô đun của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 12. (QG-2019)**Cho số phức  thỏa mãn . Môđun của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 13. (QG-2019)**Cho số phức thỏa . Môđun của bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 14. (QG-2019)**Cho số phức  thỏa . Môđun của bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 15.**  Tìm số phức z, biết 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 16.** Số phức z thỏa mãn: là

**A.** 3 + 2i ;  **B.** 3-2i; **C**. -3 + 2i ; **D.** -3 -2i.

**Câu 17.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện 2z + 3(1 – i) = 1 – 9i. Tìm modun của z.

**A.** |z| =  **B.** |z| = 3 **C.** |z| =  **D.** |z| = 13

**Câu 18.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn (1 – i)z – (2 – i) = 2 + 9i

**A.** 4 và –3 **B.** –4 và 3 **C.** 4 và 3 **D.** –4 và –3

**Câu 19.** Số số phức z thỏa mãn đẳng thức: .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Câu 20.**  **Số** số phức z thỏa mãn .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** 1 | **B.** 2 | **C.** 3 | **D.** 4 |

**Câu 21.** Tìm mô đun số phức z thỏa mãn .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**Câu 22.** Biết  là số phức thỏa điều kiện . Tìm số phức  có phần ảo âm

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |

**DẠNG IV. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC**

**I. PHƯƠNG PHÁP:** Giả sử z = x + yi (x, y ∈ R). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm M(x;y).

Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

*Một số quỹ tích thường gặp:*

Với z = x+yi (x, y là các số thực) khi đó nếu:

\* x= a : Quỹ tích z là đường thẳng x = a (song song với Oy).

\* y= b: Quỹ tích z là đường thẳng y = b (song song với Ox).

\* (x-a)2 +(y-b)2= R2 Quỹ tích z là đường tròn tâm I(a.b) bán kính R.

\* (x-a)2 +(y-b)2 R2 Quỹ tích z là hình tròn tâm I(a.b) bán kính R ( kể cả biên).

\* (x-a)2 +(y-b)2> R2 Quỹ tích z là các điểm nằm ngoài đường tròn tâm I(a.b) bán kính R.

**II. CÁC VÍ DỤ**

**Ví dụ 1. (Mã đề 101- QG – 2017)** Cho số phức . Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  trên mặt phẳng tọa độ ?

**A.  B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Ta có . Suy ra điểm biểu diễn của số phức  là **.**

Đáp án: **B**

**Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm *M* như hình bên ?











**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải**

Đáp án: **C**

**Ví dụ 3. (Mã đề 102 - QG – 2017)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn  và  là số thuần ảo.

**A.  B.  C.  D. **

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Theo giả thiết, ta có 

.

Mặt khác, .

Theo giả thiết  là số thuần ảo nên

.

Đường tròn (*C*) có tâm , bán kính .

Ta có , suy ra *d*  tiếp xúc (*C*).

Ta có , suy ra  cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt.

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức chính là các giao điểm của (*C*) với hai đường thẳng *d* và . Số giao điểm là 3.

Đáp án: **C**

**Ví dụ 4. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Cho số phức . Tìm điểm biểu diễn của số phức  trên mặt phẳng tọa độ.

**A.**  **B.**  **C. ** **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Vậy điểm biểu diễn của số phức  là .

Đáp án: **C**

**Ví dụ 5. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Kí hiệu  là hai nghiệm phức của phương trình . Gọi *M, N* lần lượt là các điểm biểu diễn của  trên mặt phẳng tọa độ. Tính  với *O* là gốc tọa độ.

**A. **. **B. ** **C. **. **D. **.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Suy ra 

Đáp án: **D**

**Ví dụ 6. (Mã đề 104 - QG – 2017)** Gọi *S* là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số *m* để tồn tại duy nhất số phức *z* thỏa mãn  và. Tìm số phần tử của *S*.

**A.  B.  C.** 1 **D.** 3.

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

Đặt .

Theo giả thiết .

 là đường tròn tâm , bán kính .

Mặt khác 

 là đường tròn tâm , bán kính .

Để tồn tại duy nhất số phức *z* thì  và  tiếp xúc ngoài hoặc trong.

TH1:  và  tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi .

TH2  và  tiếp xúc trong khi và chỉ khi .

Vậy .

Đáp án: **A**

**Ví dụ 7. (QG – 2018)** Xét các số phức  thỏa mãn  là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức  là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Ta có 

Vì  là số thuần ảo nên .

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức  là một đường tròn có bán kính bằng .

Đáp án: **C**

**III. BÀI TẬP**

**Câu 1. (QG – 2018)** Xét các số phức  thỏa mãn  là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức  là một đường tròn có bán kính bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 2.** **(QG – 2018)** Xét các số phức *z* thỏa mãn  là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức *z* là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** 2. **B.** . **C.** 4. **D.** .

**Câu 3. (QG – 2018)** Xét các số phức  thỏa mãn  là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức  là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 4. (QG-2019)**Cho hai số phức  và . Trên mặt phẳng toạ độ , điểm biểu diễn số phức  có toạ độ là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 5. (QG-2019)**Xét các số phức thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ , tập hợp điểm biểu diễn của các số phức là một đường tròn có bán kính bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 6. (QG-2019)**Xét các số phức thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ , tập hợp điểm biểu diễn các số phức  là một đường tròn có bán kính bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 7. (QG-2019)**Cho hai số phức  và . Trên mặt phẳng tọa độ  điểm biểu diễn số phức  có tọa độ là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 8. (QG-2019)**Cho hai số phức  và . Trên mặt phẳng , điểm biểu diễn số phức  có tọa độ là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 9. (QG-2019)**Cho số phức  thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ , tập hợp các điểm biểu diễn của số phức  thỏa mãn  là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 10. (QG-2019)**Cho hai số phức . Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, điểm biểu diễn số phức  có tọa độ là:

**A.** . **B.** . **C. **. **D. **.

**Câu 11. (QG-2019)**Cho số phức  thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ , tập hợp các điểm biểu diễn của số phức  thỏa mãn  là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 12.** Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều là

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đường thẳng | **B.** Đường thẳng |
| **A.** Đường thẳng | **D.** Đường thẳng |

**Câu 13.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện  là

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đường thẳng | **B.** Đường thẳng |
| **A.** Đường thẳng | **D.** Đường thẳng |

**Câu 15.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện  là

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng thẳng | **B.** Đường tròn |
| **C.** Đường thẳng | **D.** Đường tròn tâm  và bán kính |

**Câu 16.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện  là

|  |  |
| --- | --- |
| **A.** Đuờng elip | **B.** Đuờng elip |
| **C.** Đuờng elip | **D.** Đuờng elip |

**Câu 17.**  Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện  là

|  |
| --- |
| **A.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung |
| **B.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung |
| **C.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành |
| **D.** Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành |

**Câu 18.**  Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện  là

|  |
| --- |
| **A.** Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm  , bán kính 2 |
| **B.** Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại  và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là |
| **C.** Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm  , bán kính 1 |
| **D.** Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại  và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là |

**Câu 19.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho  là một số thuần ảo.

|  |
| --- |
| **A.** Đường tròn tâm  bán kính |
| **B.** Đường tròn tâm  bán kính  trừ đi hai điểm . |
| **C.** Đường tròn tâm  bán kính |
| **D.** Đường tròn tâm  bán kính  trừ đi hai điểm . |

**Câu 20.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức  thỏa mãn điều kiện  là

|  |
| --- |
| **A.** Ba cạnh của tam giác |
| **B.** Bốn cạnh của hình vuông |
| **C.** Bốn cạnh của hình chữ nhật |
| **D.** Bốn cạnh của hình thoi |

**DẠNG V. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC**

**I. PHƯƠNG PHÁP:** Sử dụng **c**ác kiến thức cơ bản như: Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bunhia- Cốpxki, bất đẳng thức hình học và một số bài toán công cụ sau:

|  |
| --- |
| BÀI TOÁN CÔNG CỤ 1:  Cho đường tròn  cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn . Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất. |

Hướng dẫn giải:

*TH1: A thuộc đường tròn (T)*

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

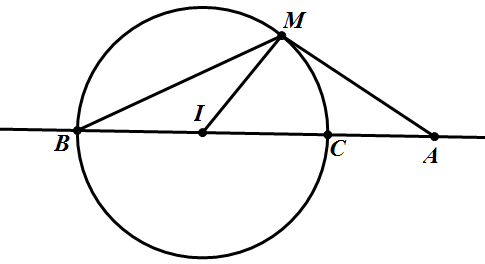
AM đạt giá trị lớn nhất bằng 2R khi M là điểm đối xứng với A qua I

*TH2: A không thuộc đường tròn (T)*

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A,I và đường tròn (T);

Giả sử *AB < AC.*

+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

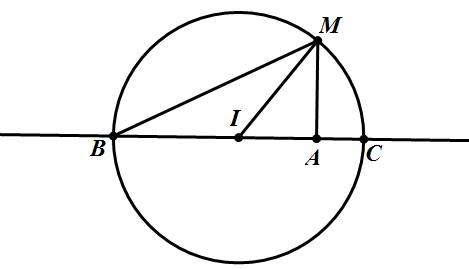
.

Đẳng thức xảy ra khi 

.

Đẳng thức xảy ra khi 

+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

.

Đẳng thức xảy ra khi 

.

Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt gía trị nhỏ nhất.

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt gía trị lớn nhất.

|  |
| --- |
| BÀI TOÁN CÔNG CỤ 2:  Cho hai đường tròn  có tâm I, bán kính R1; đường tròn  có tâm J, bán kính R2. Tìm vị trí của điểm M trên , điểm N trên  sao cho MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. |

Hướng dẫn giải:

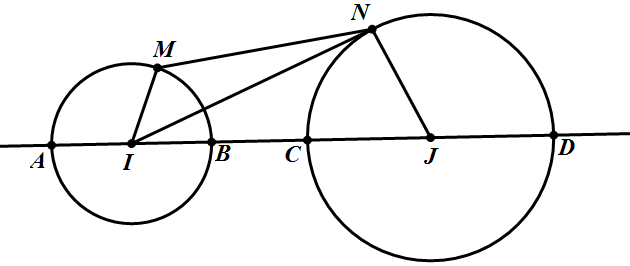
Gọi d là đường thẳng đi qua I, J;

d cắt đường tròn  tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử JA > JB) ; d cắt  tại hai điểm phân biệt C, D ( giả sử ID > IC).

Với điểm M bất khì trên  và điểm N bất kì trên .

Ta có: .

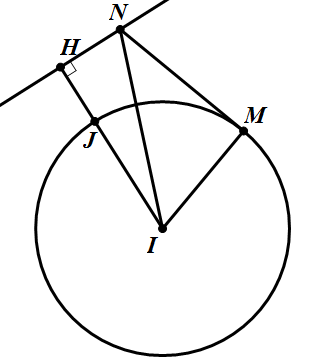
Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C.

Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.

khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.

|  |
| --- |
| BÀI TOÁN CÔNG CỤ 3:  Cho hai đường tròn  có tâm I, bán kính R; đường thẳng  không có điểm chung với . Tìm vị trí của điểm M trên , điểm N trên  sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất. |

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d

Đoạn IH cắt đường tròn  tại J

Với M thuộc đường thẳng , N thuộc đường tròn , ta có: .

Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.

**II. CÁC VÍ DỤ**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1.** Trong các số phức thoả mãn . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của . |

**Hướng dẫn giải**

Cách 1

Gọi  biểu diễn cho số phức trong hệ toạ độ Oxy



Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (T) có tâm , bán kính R = 4.

; nên O nằm ngoài đường tròn (T)

lớn nhất khi OM lớn nhất, nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

*(Bài toán qui về Bài toán công cụ 1- Trường hợp 2)*

Đường thẳng OI cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt 

Với M di động trên (T), ta có: 

 OM nhỏ nhất khi M trùng với A; OM lớn nhất khi M trùng với B

Vậy  nhỏ nhất bằng 1 khi ; lớn nhất bằng 9 khi 

Cách 2

Gọi 

 biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

 biểu diễn cho số phức 

;

Theo giả thiết .

Ta có: 

; khi ; khi 

Vậy  nhỏ nhất bằng 1 khi ; lớn nhất bằng 9 khi 

* *Nhận xét:* Ngoài ra bài toán trên có thể Hướng dẫn giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhia-Cốpxki hoặc phương pháp lượng giác hoá.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2.** Trong các số phức  thoả mãn điều kiện là một số ảo, tìm số phức  sao cho có môđun lớn nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi 

 biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

là một số ảo



 M biểu diễn cho  thuộc đường tròn (T) có tâm , bán kính 

 với 

 *(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 1 - trường hợp 1)*

Vì M là điểm di động trên (T) nên AM lớn nhất

AM là đường kính của (T)

 M đối xứng với A qua I

I là trung diểm của AM



Vậy lớn nhất bằng  khi .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3.** Trong các số phức  có môđun bằng . Tìm số phức  sao cho biểu thức  đạt giá trị lớn nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi 





Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpxki cho hai bộ số

1;1 và , ta có:



Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-cốpxki cho hai bộ số 1;1 và , ta có:



. Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4.** Trong các số phức  có môđun bằng . Tìm số phức  sao cho biểu thức  đạt giá trị lớn nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi 





Xét . Khi đó:

. Đẳng thức xảy ra khi  cùng hướng





Với  thì  ngược hướng (không thoả mãn)

Với  thì  cùng hướng (thoả mãn)

Vậy  thì P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5.** Trong các số phức z1, z2 thoả mãn: , tìm số phức z1, z2 sao cho  đạt giá trị lớn nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là những số thực); được biểu diễn bởi điểm M(a; b); được biểu diễn bởi điểm N(c; d) trong mặt phẳng toạ độ Oxy

 suy ra M thuộc đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1.

 suy ra M thuộc đường tròn tâm J(6; 6), bán kính R' = 6.

.

*(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 2)*

Đường thẳng IJ có phương trình y = x. Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm I tại hai điểm

Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm J tại hai điểm .

.

Vậy thì đạt giá trị lớn nhất.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 6.** Cho các số phức thoả mãn: là một số thực. Tìm số phức sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi 

 lần lượt biểu diễn cho  trong hệ toạ độ Oxy



 M thuộc đường tròn  có tâm O, bán kính R = 1



 là số thực 

 N thuộc đường thẳng 

Ta có  nên  và  không có điểm chung



 (vì )

*(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 3)*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên 

Đoạn OH cắt đường tròn  tại 

Với N thuộc đường thẳng , M thuộc đường tròn , ta có:

.

Đẳng thức xảy ra khi 

.

Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng  khi .

|  |
| --- |
| **Ví dụ 7.** Trong các số phức  thoả mãn điều kiện. Tìm số phức z có môđun lớn nhất. |

**Hướng dẫn giải**

Gọi 

 biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

;

(với  ).

 có tâm O, trục lớn bằng 10; tiêu cự bằng 6

lớn nhất 

Vậy  lớn nhất bằng 5 khi 

**III. BÀI TẬP**

**Câu 1.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện  .Số phức nào có mô đun lớn nhất?

A.1+2i B.1-2i C.2+4i D.1/2-i

**Câu 2.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện  .Số phức nào có mô đun nhỏ nhất?

A.2+i B.4-i C. D.

**Câu 3.** Xét các số phức  thỏa mãn  Gọi  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  . Tính 

**A. **. **B. **.

**C. ** . **D. ** .

**Câu 4.** Xét số phức  thỏa mãn  Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 5.** Xét số phức  thỏa mãn  Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 6.** Xét số phức  thỏa mãn  Tìm giá trị nhỏ nhất của biển thức 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 7.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện , tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.   |  |  | | --- | --- | | **A.** | **B.** | | **C.** | **D.** |   **Câu 8.** Cho số phức z thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của .   |  |  | | --- | --- | | **A.** | **B.** | | **C.** | **D.** | |