# PHẦN I. HÀM SỐ

## **1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ**

### 1.1. Định nghĩa

Kí hiệu  là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số xác định trên  ta có:

* Hàm số được gọi là **đồng biến** *(tăng)* trên  nếu:

****

* Hàm số được gọi là **nghịch biến** *(giảm)* trên  nếu:



*Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên*  *được gọi chung là* ***đơn điệu*** *trên* 

***\* Nhận xét:***

* Hàm số đồng biến trên *K* Khi đó đồ thị của hàm số ***đi lên*** từ trái sang phải.
* Hàm số nghịch biến trên *K*  Khi đó đồ thị của hàm số ***đi xuống*** từ trái sang phải.
* Nếu  hàm số  **đồng biến** trên khoảng 
* Nếu  hàm số  **nghịch biến** trên khoảng 
* Nếu  hàm số  **không đổi** trên khoảng 
* Nếu  **đồng biến** trên khoảng 
* Nếu  **nghịch biến** trên khoảng 
* Nếu thay đổi khoảng  bằng một **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì phải **bổ sung** thêm giả thiết “hàm số ***liên tục*** trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”.

### 1.2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm

***Quy tắc tính đạo hàm:***Cho  là hằng số .

* ***Tổng, hiệu: ***
* **Tích:**  ******
* **Thương:**  ******
* **Đạo hàm hàm hợp:** Nếu .

### 1.3. Bảng công thức tính đạo hàm

|  |  |
| --- | --- |
| **Đạo hàm của hàm sơ cấp** | **Đạo hàm của hàm hợp** |
| (C là hằng số). |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### 1.4 . Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức

* ******
* ******

### 1.5. Đạo hàm cấp 2

**1.5.1. Định nghĩa**



**1.5.2. Ý nghĩa cơ học**

Gia tốc tức thời của chuyển động  tại thời điểm  là: 

**1.5.3. Đạo hàm cấp cao**

.

**\* Một số chú ý:**

* Nếu hàm số  và  cùng đồng biến (nghịch biến) trên  thì hàm số  cũng đồng biến (nghịch biến) trên  Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu .
* Nếu hàm số và  là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên  thì hàm số  cũng đồng biến (nghịch biến) trên Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số  không là các hàm số dương trên 
* Cho hàm số , xác định với  và . Hàm số  cũng xác định với  .

**Ta có nhận xét sau:**

* Giả sử hàm số  đồng biến với . Khi đó, hàm số  đồng biến với  đồng biến với .
* Giả sử hàm số  nghịch biến với  . Khi đó, hàm số  nghịch biến với nghịch biến với .

|  |  |
| --- | --- |
| ***Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.***  Giả sử hàm số  có đạo hàm trên   * Nếu  với mọi  và  chỉ tại một số hữu hạn điểm  thì hàm số  đồng biến trên . * Nếu  với mọi  và  chỉ tại một số hữu hạn điểm  thì hàm số  nghịch biến trên .   ***Chú ý:***  \* Đối với hàm phân thức hữu tỉ  thì dấu  khi xét dấu đạo hàm  không xảy ra.  Giả sử | |
| Hàm số đồng biến trên | Hàm số nghịch biến trên |
| Trường hợp 2 thì hệ số  khác  vì khi thì  (Đường thẳng song song hoặc trùng với trục *Ox* thì không đơn điệu) | |
| *\* Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng  ta giải như sau:*  *Bước 1:* Tính  Bước 2: Hàm số đơn điệu trên  có  nghiệm phân biệt    *Bước 3:* Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng    *Bước 4:* Giải  và giao với  để suy ra giá trị *m* cần tìm. | |

## **2. CỰC TRỊ HÀM SỐ**

### 2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số  xác định trên tập K và . Ta nói:

* **** là **điểm cực tiểu** của hàm số  nếu tồn tại một khoảng  chứa  sao cho và . Khi đó  được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số.
*  là **điểm cực đại** của hàm số  nếu tồn tại một khoảng  chứa  sao cho và . Khi đó  được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số.
* Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
* Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
* Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp *K*.
* Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị******cực trị (hay cực trị)*** *của**hàm**số*.
* Nếu  là điểm cực trị của hàm số thì điểm  được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số .

**\* Nhận xét:**

* Giá trị cực đại (cực tiểu) nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số  trên tập D;  chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số  trên một khoảng  nào đó chứa hay nói cách khác khi  điểm cực đại ( cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng (a;b) chứa  sao cho là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số  trên khoảng 
* Hàm số  có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

### 2.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

***Định lí 1:***

Giả sử hàm số đạt cực trị tại điểm . Khi đó, nếu  có đạo hàm tại điểm  thì 

***Chú ý:***

* Đạo hàm  *có thể* bằng  tại điểm  nhưng hàm số  không đạt cực trị tại điểm .
* Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
* Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng  hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

### 2.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

***Định lí 2:***

Giả sử hàm số  đạt cực trị tại điểm . Khi đó, nếu hàm số  có đạo hàm tại điểm  thì .

* Nếu  trên khoảng  và trên khoảng  thì  là một điểm cực đại của hàm số 
* Nếu  trên khoảng  và  trên khoảng  thì  là một điểm cực tiểu của hàm số 

### 2.4. Quy tắc tìm cực trị

***Quy tắc 1:***

* *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm 
* *Bước 2:* Tìm các điểm   mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm*.
* *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu . Nếu *đổi dấu khi đi qua * thì hàm số đạt cực trị tại .

***Định lí 3:***

Giả sử  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  với  Khi đó:

* Nếu  thì hàm số  đạt cực đại tại 
* Nếu  thì hàm số  đạt cực tiểu tại 

*Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số*

***Quy tắc 2:***

* *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm 
* *Bước 2:* Tìm các nghiệm   của phương trình 
* *Bước 3:* Tính  và tính 
* Nếu  thì hàm số  đạt cực đại tại điểm 
* Nếu  thì hàm số  đạt cực tiểu tại điểm 

## **3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ**

### 3.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba

**3.1.1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Bài toán tổng quát****:*  Cho hàm số  Tìm tham số *m* để hàm số có cực đại, cực tiểu tại  thỏa mãn điều kiệncho trước?  ***Phương pháp****:*   * *Bước 1:* * Tập xác định: * Đạo hàm: * *Bước 2:*   Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)  có hai nghiệm phân biệt vàđổi dấu qua 2 nghiệm đó  phương trình  có hai nghiệm phân biệt     * *Bước 3:*   Gọi  là hai nghiệm của phương trình  Khi đó:   * *Bước 4:*   Biến đổi điều kiện  về dạng tổng và tích . Từ đó giải ra tìm được   * *Bước 5:*   Kết luận các giá trị *m* thỏa mãn:  ***\* Chú ý:*** Hàm số bậc ba:  Ta có:   |  |  | | --- | --- | | *Điều kiện* | *Kết luận* | |  | Hàm số không có cực trị. | |  | Hàm số có hai điểm cực trị. |  * ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.*** * *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt trái dấu     * *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu     * *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*   phương trình  có hai nghiệm dương phân biệt     * *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*   phương trình  có hai nghiệm âm phân biệt     * ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị  thỏa mãn:***      * Hai cực trị  thỏa mãn      * Hai cực trị  thỏa mãn      * Hai cực trị  thỏa mãn      * Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng   khi có 1 nghiệm là, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là  . |

**3.1.2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng**

|  |
| --- |
| ***Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng****:*  Cho 2 điểm  và đường thẳng  Nếu  thì hai điểm  nằm về  hai phía so với đường thẳng  Nếu  thì hai điểm  nằm cùng  phía so với đường thẳng  ***Một số trường hợp đặc biệt****:*   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Oy*   hàm số có 2 cực trị cùng dấu  phương trình  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 2 phía đối với trục Oy*   hàm số có 2 cực trị trái dấu  phương trình  có hai nghiệm trái dấu   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Ox*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt và  ***Đặc biệt:***   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía trên đối với trục Ox*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt và   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía dưới đối với trục Ox*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt và   * Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*   phương trình  có hai nghiệm phân biệt và  (*áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số*)  Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*  đồ thị cắt trục *Ox* tại 3 điểm phân biệt  phương trình hoành độ giao điểm  có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*) |

**3.1.3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị**

****** *hoặc*   *hoặc*  

**3.1.4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là**

 với 

**3.2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương **

**3.2.1. Một số kết quả cần nhớ**

* Hàm số có một cực trị 
* Hàm số có ba cực trị 
* Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu .
* Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại .
* Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại .
* Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại .

**3.2.2. Một số công thức tính nhanh**

Giả sử hàm số  có cực trị: 

tạo thành tam giác thỏa mãn dữ kiện: ****

**Đặt: **

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tổng quát: |  | |
| **Dữ kiện** | | **Công thức**  **thỏa mãn** | |
| Tam giác vuông cân tại | |  | |
| Tam giác đều | |  | |
| Tam giác có diện tích | |  | |
| Tam giác có diện tích | |  | |
| Tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp | |  | |
| Tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp | |  | |
| Tam giác có độ dài cạnh | |  | |
| Tam giác có độ dài | |  | |
| Tam giác có cực trị | |  | |
| Tam giác có  góc nhọn | |  | |
| Tam giác có trọng tâm | |  | |
| Tam giác có trực tâm | |  | |
| Tam giác cùng điểm  tạo thành hình thoi | |  | |
| Tam giác có  là tâm đường tròn nội tiếp | |  | |
| Tam giác có  là tâm đường tròn ngoại tiếp | |  | |
| Tam giác có cạnh | |  | |
| Trục hoành chia tam giác thành  hai phần có diện tích bằng nhau | |  | |
| Tam giác có điểm cực trị cách đều trục hoành | |  | |
| Đồ thị hàm số  cắt trục  tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng | |  | |
| Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau. | |  | |
| Phương trình đường tròn ngoại tiếp  là: | | | |

**4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT**

### 4.1. Định nghĩa.

Cho hàm số  xác định trên tập 

* Số *M* gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số  trên  nếu: . Kí hiệu: .
* Số  gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số  trên  nếu: . Kí hiệu: .

**4.2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN**

**4.2.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp**

* *Bước 1:* Tính  và tìm các điểm  mà tại đó  hoặc hàm số không có đạo hàm.
* *Bước 2:*Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

**4.2.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn**

* *Bước 1:*
* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn 
* Tìm các điểm  trên khoảng , tại đó  hoặc  không xác định.
* *Bước 2:* Tính 
* *Bước 3:* Khi đó:
* 
* 

**4.2.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng**

* *Bước 1:* Tính đạo hàm .
* *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm  của phương trình  và tất cả các điểm  làm cho  không xác định.
* *Bước 3.* Tính , , , .
* *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận , .

*Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

**Chú ý:**

* Nếu  đồng biến trên  thì .
* Nếu  nghịch biến trên  thì 
* Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

**5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

**5.1. Đường tiệm cận ngang**

Cho hàm số  xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng  hoặc ). Đường thẳng  là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: 

**5.2. Đường tiệm cận đứng**

Đường thẳng  được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:



***Lưu ý:*** Với đồ thị hàm phân thức dạng  luôn có tiệm cận ngang là  và tiệm cận đứng 

## **6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

**6.1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức**

**6.1.1. Hàm số bậc ba **

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TRƯỜNG HỢP** |  |  |
| *Phương trình  có*  *2 nghiệm phân biệt* |  |  |
| *Phương trình  có nghiệm kép* |  |  |
| *Phương trình  vô nghiệm* |  |  |

**6.1.2. Hàm số trùng phương **

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TRƯỜNG HỢP** |  |  |
| *Phương trình  có*  *3 nghiệm phân biệt*  (ab<0) |  |  |
| *Phương trình  có*  *1 nghiệm.* |  |  |

**6.1.3. Hàm số nhất biến **

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

### 6.2. Một số phép biến đổi đồ thị

**6.2.1. Dạng 1**

Từ đồ thị  suy ra đồ thị .

Ta có: 

và  là *hàm chẵn* nên đồ thị  nhận *Oy* làm trục đối xứng.

**\* Cách vẽ  từ :**

* *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị .
* *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của , **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ:** Từ đồ thị  suy ra đồ thị .  Biến đổi :   * Bỏ phần đồ thị của  bên trái  giữ nguyên  bên phải * Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua . |  |

**6.2.2. Dạng 2**

Từ đồ thị  suy ra đồ thị .

Ta có: 

**\* Cách vẽ  từ :**

* *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên *Ox* của đồ thị (C):.
* *Bỏ* phần đồ thị phía dưới *Ox* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ:** Từ đồ thị  suy ra đồ thị .  Biến đổi :   * Bỏ phần đồ thị của  dưới  giữ nguyên  phía trên * Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua . |  |

***Chú ý*** với dạng:  ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị  và 



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ:** Từ đồ thị  suy ra đồ thị . Biến đổi  để được đồ thị . Biến đổi  ta được đồ thị . |  |

**6.2.3. Dạng 3**

Từ đồ thị  suy ra đồ thị .

Ta có: 

**\* Cách vẽ  từ :**

* *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền  của đồ thị .
* *Bỏ* phần đồ thị trên miền của , **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

**Ví dụ**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Từ đồ thị  suy ra đồ thị | b) Từ đồ thị  suy ra đồ thị |
| Đồ thị (C’):   * Giữ nguyên (C) với . * Bỏ (C) với . Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox.*     Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox, Oy*, CĐ, CT… | Đồ thị (C’):   * Bỏ phần đồ thị của  với  giữ nguyên  với * Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua     Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác. |

## **7. TIẾP TUYẾN**

### 7.1. Tiếp tuyến

Cho hàm số , có đồ thị (*C*). **Tiếp tuyến** của đồ thị (*C*) tại điểm  có dạng: .

Trong đó:

Điểm  được gọi là *tiếp điểm*. ( với ) **và **là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

### 7.2. Điều kiện tiếp xúc

Cho hai hàm số  và . Đồ thị  và  tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình:  có nghiệm.



## **8. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ**

Cho hàm số  có đồ thị  và  có đồ thị .

Phương trình hoành độ giao điểm của  và  là . Khi đó:

* Số giao điểm của  và  bằng với số nghiệm của phương trình .
* Nghiệm  của phương trình  chính là hoành độ  của giao điểm.
* Để tính tung độ  của giao điểm, ta thay hoành độ  vào  hoặc .
* Điểm  là giao điểm của  và .

## **9. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG**

### 9.1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong  có phương trình , trong đó  là hàm đa thức theo biến  với  là tham số sao cho bậc của *m* không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi  thay đổi?

**Phương pháp giải:**

* *Bước 1:* Đưa phương trình  về dạng phương trình theo ẩn  có dạng sau: hoặc .
* *Bước 2:*Cho các hệ số bằng , ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:  hoặc .
* *Bước 3:*Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong  không có điểm cố định.

- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của .

### 9.2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong  có phương trình  (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

*Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.*

**Phương pháp giải:**

* *Bước 1:*Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
* *Bước 2:*Lập luận để giải bài toán.

### 9.3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng

Cho đường cong  có phương trình. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

***Bài toán 1:*** *Cho đồ thị trên đồ thị  tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm.*

**Phương pháp giải:**

* Gọi  là hai điểm trên  đối xứng nhau qua điểm .
* Ta có .

Giải hệ phương trình tìm được  từ đó tìm được toạ độ *M*, *N*.

***Bài toán 2:*** *Cho đồ thị . Trên đồ thị  tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

**Phương pháp giải:**

* Gọi  là hai điểm trên  đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
* Ta có .
* Giải hệ phương trình tìm được từ đó tìm được toạ độ .

***Bài toán 3:*** *Cho đồ thị trên đồ thị  tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng .*

**Phương pháp giải:**

* Gọi  là hai điểm trên  đối xứng nhau qua đường thẳng .
* Ta có:  (với  là trung điểm của  và  là vectơ chỉ phương của đường thẳng ).
* Giải hệ phương trình tìm được *M*, *N*.

### 9.4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

**9.4.1. Lý thuyết:**

* Cho hai điểm  
* Cho điểm  và đường thẳng , thì khoảng cách từ  đến  là .
* Cho hàm phân thức:  tiếp tuyến tại *M* cắt *TCĐ,* *TCN* ở *A* và *B* thì *M* là trung điểm của *AB*. Thì diện tích tam giác  không đổi: .

**9.4.2. Các bài toán thường gặp**

***Bài toán 1:*** *Cho hàm số  có đồ thị . Hãy tìm trên  hai điểm  và  thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách  ngắn nhất.*

**Phương pháp giải:**

*  có tiệm cận đứng  do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số  là hai số dương.
* Nếu  thuộc nhánh trái: ; .
* Nếu  thuộc nhánh phải: ; .
* Sau đó tính:

.

* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

***Bài toán 2:*** *Cho đồ thị hàm số  có phương trình . Tìm tọa độ điểm  thuộc  để tổng khoảng cách từ  đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

**Phương pháp giải:**

* Gọi và tổng khoảng cách từ đến hai trục tọa độ là  thì 
* Xét các khoảng cách từ đến hai trục tọa độ khi  nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
* Sau đó xét tổng quát, những điểm có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của  khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
* Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của .

***Bài toán 3:*** *Cho đồ thị  có phương trình. Tìm điểm trên  sao cho khoảng cách từ đến Ox bằng lần khoảng cách từ đến trục.*

**Phương pháp giải:**

Theo đầu bài ta có .

***Bài toán 4:*** *Cho đồ thị hàm số  có phương trình . Tìm tọa độ điểm  trên  sao cho độ dài ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

**Phương pháp giải:**

* Tiệm cận đứng ; tiệm cận ngang .
* Ta tìm được tọa độ giao điểm của hai tiệm cận.
* Gọi  là điểm cần tìm, thì:
* Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số  để thu được kết quả.

***Bài toán 5:*** *Cho đồ thị hàm số  có phương trình  và đường thẳng . Tìm điểm  trên  sao cho khoảng cách từ  đến  là ngắn nhất.*

**Phương pháp giải:**

* Gọi  thuộc .
* Khoảng cách từ  đến  là 
* Khảo sát hàm số  để tìm ra điểm  thỏa mãn yêu cầu.

# PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT

**1. LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA**

### 1.1. Khái niệm lũy thừa

**1.1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên**

Cho  là một số nguyên dương.

Với  là số thực tùy ý, lũy thừa bậc  của a là tích của  thừa số .

( thừa số).

Với  thì 

Ta gọi  là cơ số,  là mũ số. Và chú ý  và  không có nghĩa.

**1.1.2. Một số tính chất của lũy thừa**

* Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

* Nếu  thì ;
* Nếu  thì .
* Với mọi , ta có:





**Chú ý:**

* Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.
* Khi xét lũy thừa với số mũ  và số mũ nguyên âm thì cơ số  phải khác .
* Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số  phải dương.

### 1.2. Phương trình

Ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình  như sau:

* Trường hợp n lẻ:

Với mọi số thực , phương trình có nghiệm duy nhất.

* Trường hợp n chẵn:
* *Với *, phương trình vô nghiệm.
* *Với ,* phương trình có một nghiệm 
* *Với ,* phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là , còn giá trị âm là .

### 1.3. Một số tính chất của căn bậc

Với , ta có:

* 
* 
* 
* 
* 
* 
* ,  nguyên dương,  nguyên
* , ,nguyên dương
* Nếu  thì nguyên dương  nguyên

Đặc biệt: 

### 1.4. Hàm số lũy thừa

**1.4.1. Khái niệm**

Xét hàm số , với  là số thực cho trước.

Hàm số , với , được gọi là hàm số lũy thừa.

**Chú ý.**

Tập xác định của hàm số lũy thừa  tùy thuộc vào giá trị của . Cụ thể.

* Với  nguyên dương, tập xác định là 
* Với  nguyên âm hoặc bằng , tập xác định là 
* Với  không nguyên, tập xác định 

**1.4.2. Khảo sát hàm số lũy thừa** 

Tập xác định của hàm số lũy thừa  luôn chứa khoảng  với mọi  Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số  trên khoảng này.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. Tập xác định: 2. Sự biến thiên     Giới hạn đặc biệt:    Tiệm cận: không có.   1. Bảng biến thiên.  |  |  | | --- | --- | |  |  | | y’ |  | | y |  | | 1. Tập xác định: 2. Sự biến thiên     Giới hạn đặc biệt:    Tiệm cận:  Ox là tiệm cận ngang.  Oy là tiệm cận đứng.   1. Bảng biến thiên.  |  |  | | --- | --- | |  |  | | y’ |  | | y |  | |
| Đồ thị của hàm số. | |

Đồ thị của hàm số lũy thừa  luôn đi qua điểm 

### 1.5. Khảo sát hàm số mũ .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. Tập xác định: 2. Sự biến thiên.     Giới hạn đặc biệt:    Tiệm cận:  *Ox* là tiệm cận ngang.   1. Bảng biến thiên.  |  |  | | --- | --- | |  | 0 1 | |  |  | |  | 1 |   Đồ thị như hình sau. | 1. Tập xác định: 2. Sự biến thiên.     Giới hạn đặc biệt:    Tiệm cận:  *Ox* là tiệm cận ngang.   1. Bảng biến thiên.  |  |  | | --- | --- | |  | 0 1 | |  |  | |  | 1 |   Đồ thị như hình sau. |

## **2. LOGARIT**

### 2.1. Khái niệm Logarit

Cho hai số dương  với . Số  thỏa mãn đẳng thức  được gọi là logarit cơ số  của  và được kí hiệu là .



*Không có logarit của số âm và số 0.*

### 2.2. Bảng tóm tắt công thức Mũ-loarrit thường gặp

|  |  |
| --- | --- |
|  | * . |

## **3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.**

### 3.1. Bất phương trình mũ cơ bản

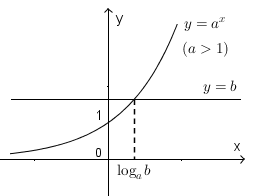
Bất phương trình mũ cơ bản có dạng  (hoặc ) với 

Ta xét bất phương trình có dạng 

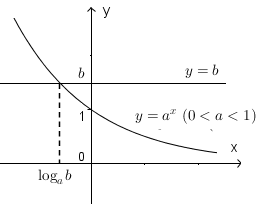
* Nếu , tập nghiệm của bất phương trình là , vì .
* Nếu  thì bất phương trình tương đương với 
* Với , nghiệm của bất phương trình là 
* Với , nghiệm của bất phương trình là 

Ta minh họa bằng đồ thị sau:

* Với , ta có đồ thị sau.



* Với , ta có đồ thị sau.



### 3.2. Bất phương trình logarit cơ bản

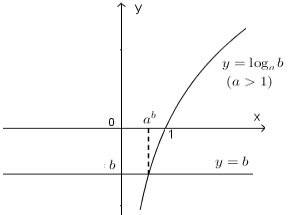
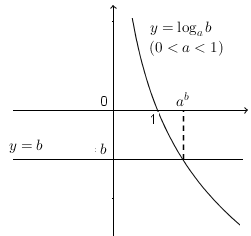
Bất phương trình logarit cơ bản có dạng (hoặc ) với 

Xét bất phương trình 

* Trường hợp , ta có: 
* Trường hợp , ta có: 

Ta minh họa bằng đồ thị như sau.

* Với , ta có đồ thị sau.



* Với , ta có đồ thị sau.

Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:

* Trường hợp :  khi và chỉ khi 
* Trường hợp : khi và chỉ khi .

## **4. BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG**

### 4.1. Lãi đơn

**4.1.1. Định nghĩa**

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

**4.1.2. Công thức tính**

Khách hàng gửi vào ngân hàng  đồng với lãi đơn  /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  kì hạn (  ) là:



**Chú ý:** *trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ  là  .*

### 4.2. Lãi kép

**4.2.1. Định nghĩa**

Lãi kép làtiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

**4.2.2. Công thức tính**

Khách hàng gửi vào ngân hàng  đồng với lãi kép  /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  kì hạn (  ) là:







### 4.3. Tiền gửi hàng tháng

**4.3.1. Định nghĩa**

Tiền gửi hàng tháng là mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

**4.3.2. Công thức tính**

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền  đồng với lãi kép /tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  tháng (  ) ( nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là .







### 4.4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

**Công thức tính**

Gửi ngân hàng số tiền là  đồng với lãi suất /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là  đồng. Tính số tiền còn lại sau  tháng là bao nhiêu?



### 4.5. Vay vốn trả góp

**4.5.1. Định nghĩa**

Vay vốn trả góp là vay ngân hàng số tiền là  đồng với lãi suất /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là  đồng và trả hết tiền nợ sau đúng  tháng.

**4.5.2. Công thức tính**

Cách tính số tiền còn lại sau  tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có



Để sau đúng  tháng trả hết nợ thì  nên





### 4.6. Bài toán tăng lương

**4.6.1. Định nghĩa**

Bài toán tăng lương được mô tả như sau: Một người được lãnh lương khởi điểm là  đồng/tháng. Cứ sau  tháng thì lương người đó được tăng thêm /tháng. Hỏi sau  tháng người đó lĩnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

**4.6.2. Công thức tính**

Tổng số tiền nhận được sau  tháng là 

### 4.7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số



Trong đó:

% là tỉ lệ tăng dân số từ năm  đến năm 

 dân số năm 

 dân số năm 

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là 

### 4.8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng  đồng với lãi kép /năm thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau  năm  là:  . Giả sử ta chia mỗi năm thành  kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là  thì số tiền thu được sau  năm là: 

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là  , gọi là hình thức lãi kép tiên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

 ( công thức tăng trưởng mũ)

**PHẦN III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN**

## **1. NGUYÊN HÀM**

### 1.1. Định nghĩa

Cho hàm số  xác định trên  ( là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số  được gọi là nguyên hàm của hàm số  trên  nếu  với mọi .

Kí hiệu: .

***Định lí:***

1) Nếu  là một nguyên hàm của trên  thì với mỗi hằng số , hàm số  cũng là một nguyên hàm của  trên .

2) Nếu  là một nguyên hàm của hàm số  trên  thì mọi nguyên hàm của  trên  đều có dạng , với  là một hằng số.

Do đó  là họ tất cả các nguyên hàm của  trên .

### 1.2. Tính chất của nguyên hàm

*  và ; 
* Nếu F(x) có đạo hàm thì: 
*  với  là hằng số khác .
* 
* **Công thức đổi biến số:** Cho  và 

Nếu  thì  

### 1.3. Sự tồn tại của nguyên hàm

***Định lí:***

Mọi hàm số  liên tục trên  đều có nguyên hàm trên .

### 1.4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

|  |  |
| --- | --- |
| 1.  2. |  |
| 3. | 16. |
| 4. | 17. |
| 5. | 18. |
| 6. | 19. |
| 7. | 20. |
| 8. | 21. |
| 9. | 22. |
| 10. | 23. |
| 11. | 24. |
| 12. | 25. |
| 13. | 26. |
| 14. | 27. |
| 15. | 28. |

### 1.5. Bảng nguyên hàm mở rộng

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## **2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM**

### 2.1. Phương pháp đổi biến

**2.1.1. Đổi biến dạng 1**

Nếu :  và với  là hàm số có đạo hàm thì :



**2.1.1.1. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Chọn , trong đó  là hàm số mà ta chọn thích hợp .
* *Bước 2:* Lấy vi phân hai vế : 
* *Bước 3:* Biến đổi : 
* *Bước 4:* Khi đó tính : .

**2.1.1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp**

|  |  |
| --- | --- |
| **Dấu hiệu** | **Cách chọn** |
|  | Đặt ; với hoặc ;  với |
|  | Đặt ; với  hoặc  với |
|  | Đặt ; với hoặc  với |
| hoặc | Đặt |
|  | Đặt |
|  | Đặt  ; với |

**2.1.2. Đổi biến dạng 2**

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt . Trong đó  cùng với đạo hàm của nó ( là những hàm số liên tục) thì ta được :

.

**2.1.2.1. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Chọn t=. Trong đó  là hàm số mà ta chọn thích hợp .
* *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : .
* *Bước 3:* Biểu thị : .
* *Bước 4:* Khi đó : 

**2.1.2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :**

|  |  |
| --- | --- |
| **Dấu hiệu** | **Cách chọn** |
| Hàm số mẫu số có | là mẫu số |
| Hàm số : |  |
| Hàm |  |
| Hàm | Với :  và .   * Đặt :   Với  và .  Đặt : |

### 2.2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:



Hay  ( với  )

**2.2.1. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : 
* *Bước 2:* Đặt : 
* *Bước 3:* Khi đó : 

**2.2.2. Các dạng thường gặp**

**2.2.2.1. Dạng 1**

**.** Đặt  

Vậy: *- *

**2.2.2.2. Dạng 2**

**.** Đặt  

Vậy **

**2.2.2.3. Dạng 3**

. Đặt  

Vậy *I =*  - 

Bằng phương pháp tương tự ta tính được  sau đó thay vào 

## **3. TÍCH PHÂN**

### 3.1. Công thức tính tích phân

.

*\* Nhận xét*:Tích phân của hàm số  từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi  hay  Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào *f* và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

### 3.2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số  và  liên tục trên  là ba số bất kỳ thuộc. Khi đó ta có :

1. 
2. .
3. 
4. .
5. .
6. Nếu f(x)  thì : 

7. Nếu .

8. Nếu  Nếu thì .

## **4. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN**

### 4.1. Phương pháp đổi biến

**4.1.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1**

**4.1.1.1. Định lí**

Nếu 1) Hàm  có đạo hàm liên tục trên 

2) Hàm hợp  được xác định trên ,

3) 

Khi đó: .

**4.1.1.2. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Đặt 
* *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : 

Đổi cận: 

* *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: 

**4.1.2. Phương pháp đổi biến dạng 2**

**4.1.2.1. Định lí**

Nếu hàm số đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn  sao cho  thì: .

**4.1.2.2. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Đặt 
* *Bước 2:* Đổi cận : 
* *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo 

Vậy: 

### 4.2. Phương pháp tích phân từng phần

**4.2.1. Định lí**

Nếu  và  là các hàm số có đạo hàm liên tục trên  thì:

 Hay 

**4.2.2. Phương pháp chung**

* *Bước 1:* Viết  dưới dạng  bằng cách chọn một phần thích hợp của  làm  và phần còn lại 
* *Bước 2:* Tính  và 
* *Bước 3:* Tính  và 

**\* Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Đặt u theo thứ tự ưu tiên:  ***Lốc-đa-mũ-lượng*** |  |  |  |  |
| *u* | *P(x)* | *lnx* | *P(x)* |  |
| *dv* |  | *P(x)dx* | *cosxdx* | *cosxdx* |

***Chú ý***: Nên chọn  là phần của  mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn  là phần của  là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

## **5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN**

### 5.1. Tích phân hàm hữu tỉ

**5.1.1. Dạng 1**

I = . (với a≠0)

Chú ý: Nếu I = 

**5.1.2. Dạng 2**

**** ( với mọi )

Xét .

* Nếu thì 

 thì :



* Nếu  thì 

thì I = 

* Nếu thì 

Đặt 

**5.1.3. Dạng 3**

**.**

(trong đó  liên tục trên đoạn )

* Bằng ph­ương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm  và  sao cho:



* Ta có I= 

Tích phân  = 

Tích phân  thuộc dạng 2.

**5.1.4. Dạng 4**

** với**  **và**  **là đa thức của** **.**

* Nếu bậc của  lớn hơn hoặc bằng bậc của  thì dùng phép chia đa thức.
* Nếu bậc của  nhỏ hơn bậc của  thì có thể xét các trường hợp:
* Khi  chỉ có nghiệm đơn thì đặt

.

* Khi có nghiệm đơn và vô nghiệm

 thì đặt



* Khi có nghiệm bội

 với α ≠ β thì đặt

.

 với α ≠ β thì đặt



### 5.2. Tích phân hàm vô tỉ

 **Trong đó**  ***có dạng:***

*  Đặt 
*  Đặt  hoặc 
*  Đặt 
*  Với 

Đặt , hoặc Đặt 

*  Đặt , 
*  Đặt , 
* * Gọi  . Đ*ặt 

**5.2.1. Dạng 1**

****

Từ : 

Khi đó ta có :

* Nếu  (1)
* Nếu :  (2)
* Nếu : .
* Với  :  (3)
* Với  : (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

* **Phương pháp :**

*\* Trường hợp :* 

Khi đó đặt :



*\* Trường hợp :* 

Khi đó : 

*\* Trường hợp :* . Đặt : 

*\* Trường hợp :* . Đặt : 

**5.2.2. Dạng 2**

****

* **Phương pháp :**
* *Bước 1:*

Phân tích 

* *Bước 2:*

Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số 

* *Bước 3:*

Giải hệ tìm  thay vào (1)

* *Bước 4 :*

Tính  (2)

Trong đó đã biết cách tính ở trên

**5.2.3. Dạng 3**

****

* **Phương pháp :**
* *Bước 1:*

Phân tích : . (1)

* *Bước 2:*

Đặt : 

* *Bước 3:*

Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : . Tích phân này chúng ta đã biết cách tính .

**5.2.4. Dạng 4**

****

( Trong đó :  là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và  là các hằng số đã biết )

* ***Phương pháp :***
* *Bước 1:*

Đặt :  (1)

* *Bước 2:*

Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng 

* *Bước 3:*

Tính vi phân hai vế :  và đổi cận

* *Bước 4:*

Tính : 

### 5.3. Tích phân hàm lượng giác

**5.3.1. Một số công thức lượng giác**

**5.3.1.1. Công thức cộng**







**5.3.1.2. Công thức nhân đôi**



 ; ;



**5.3.1.3. Công thức hạ bậc**

; ;



;



**5.3.1.4. Công thức tính theo** 

Với Thì ; ;



**5.3.1.5. Công thức biến đổi tích thành tổng**



**5.3.1.6. Công thức biến đổi tổng thành tích**



**Công thức thường dùng:**

****

**Hệ quả:**

****

**5.3.2. Một số dạng tích phân lượng giác**

* Nếu gặp ta đặt .



* Nếu gặp dạng ta đặt .



* Nếu gặp dạng ta đặt .



* Nếu gặp dạng ta đặt .



**5.3.2.1. Dạng 1**



**\* Phương pháp**

* Nếu  chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc
* Nếu  thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi
* Nếu  lẻ  thì thực hiện biến đổi:



**5.3.2.2. Dạng 2**



**\* Phương pháp**

* + ***Trường hợp 1:  là các số nguyên***

**a.** Nếu  chẵn,  chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

**b.** Nếu  chẵn,  lẻ  thì biến đổi:

**c.** Nếu  lẻ ,  chẳn thì biến đổi:



**d.** Nếu  lẻ,  lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

* + ***Nếu  là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt ***

(\*)



Tích phân (\*) tính được ⇔ 1 trong 3 số là số nguyên



**5.3.2.3. Dạng 3**





* + 
  + 

## **6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN**

### 6.1. Diện tích hình phẳng

**6.1.1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục trên đoạn , trục hoành và hai đường thẳng , được xác định:



**6.1.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , liên tục trên đoạn và hai đường thẳng , được xác định:



- Nếu trên đoạn , hàm số không đổi dấu thì:



- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường ,



và hai đường thẳng , được xác định:



### 6.2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

**6.2.1. Thể tích vật thể**

Gọi là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*; là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm , . Giả sử là hàm số liên tục trên đoạn .



**6.2.2. Thể tích khối tròn xoay**

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường , trục hoành và hai đường thẳng , quanh trục *Ox*:



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường , trục hoành và hai đường thẳng , quanh trục *Oy*:



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới

hạn bởi các đường , và hai đường thẳng , quanh trục *Ox*:



**PHẦN IV. SỐ PHỨC**

## **1. SỐ PHỨC**

### 1.1. Khái niệm số phức

* + Số phức (dạng đại số) : . Trong đó : là phần thực, là phần ảo, là đơn vị ảo,



* + Tập hợp số phức kí hiệu: .



* + là số thực phần ảo của bằng .



* + là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) phần thực bằng .



* + Số vừa là số thực vừa là số ảo.



### 1.2. Hai số phức bằng nhau

* + Hai số phức và bằng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.



* + Khi đó ta viết



### 1.3. Biểu diễn hình học số phức

Số phức được biểu diễn bởi điểm hay bởi trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ .



### 1.4. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của là .



* + 
  + là số thực ; là số ảo .



### 1.5. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ được gọi là **môđun của số phức**  và kí hiệu là . Vậy hay .



Một số tính chất:

* + ;



* + .



* + ; ;



* + .



## **2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC**

### 2.1. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức và . Khi đó:



* + Số đối của số phức là .



* + Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó: .



### 2.2. Phép nhân số phức

* + Cho hai số phức và .



Khi đó: .



* + Với mọi số thực và mọi số phức , ta có



*Đặc biệt:* với mọi số phức .



* + Lũy thừa của **:**



.



### 2.3. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của khác là số .



Phép chia hai số phức và là .



## **3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC**

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

* + tập hợp điểm là đường thẳng



* + tập hợp điểm là trục tung *Oy*



* + tập hợp điểm là trục hoành *Ox*



* + tập hợp điểm là *hình tròn* tâm bán kính



* + tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm bán kính



* + tập hơp điểm là miền bên phải trục tung



* + tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành



* + tập hợp điểm là miền bên trái trục tung



* + tập hợp điểm là phía trên trục hoành



* + tập hợp điểm là đường Parabol



* + tập hợp điểm là đường Elip



* + tập hợp điểm là đường Hyperbol



## **4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC**

### 4.1. Căn bậc hai của số thực âm

* + Cho số , nếu có số phức sao cho thì ta nói là một căn bậc hai của .



* + Mọi số phức đều có hai căn bậc hai.



* + Căn bậc hai của số thực âm là .



Tổng quát, các căn bậc hai của số thực âm là .



### 4.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai . Xét biệt số của phương trình. Ta thấy:



* + Khi , phương trình có một nghiệm thực .



* + Khi , phương trình có hai nghiệm thực phân biệt .



* + Khi , phương trình có hai nghiệm phức .



**5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC**

* + Cho số phức thỏa mãn



* + Cho số phức thỏa mãn .



và



* + Cho số phức thỏa mãn .



và



**MỤC LỤC**

[**PHẦN I. HÀM SỐ** 4](#_Toc523603624)

[**1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ** 4](#_Toc523603625)

[1.1. Định nghĩa 4](#_Toc523603626)

[1.2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm 4](#_Toc523603627)

[1.3. Bảng công thức tính đạo hàm 5](#_Toc523603628)

[1.4 . Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức 5](#_Toc523603629)

[1.5. Đạo hàm cấp 2 5](#_Toc523603630)

[**2. CỰC TRỊ HÀM SỐ** 7](#_Toc523603631)

[2.1. Định nghĩa 7](#_Toc523603632)

[2.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị 8](#_Toc523603633)

[2.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị 8](#_Toc523603634)

[2.4. Quy tắc tìm cực trị 8](#_Toc523603635)

[**3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ** 9](#_Toc523603636)

[3.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba  9](#_Toc523603637)

[**3.2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương ** 12](#_Toc523603638)

[**4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT** 14](#_Toc523603639)

[4.1. Định nghĩa. 14](#_Toc523603640)

[**4.2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN** 14](#_Toc523603641)

[**5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ** 15](#_Toc523603642)

[**5.1. Đường tiệm cận ngang** 15](#_Toc523603643)

[**5.2. Đường tiệm cận đứng** 15](#_Toc523603644)

[**6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ** 16](#_Toc523603645)

[**6.1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức** 16](#_Toc523603646)

[6.2. Một số phép biến đổi đồ thị 17](#_Toc523603647)

[**7. TIẾP TUYẾN** 20](#_Toc523603648)

[7.1. Tiếp tuyến 20](#_Toc523603649)

[7.2. Điều kiện tiếp xúc 20](#_Toc523603650)

[**8. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ** 20](#_Toc523603651)

[**9. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG** 20](#_Toc523603652)

[9.1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong 20](#_Toc523603653)

[9.2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên 21](#_Toc523603654)

[9.3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng 21](#_Toc523603655)

[9.4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách 22](#_Toc523603656)

[**PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT** 24](#_Toc523603657)

[**1. LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA** 24](#_Toc523603658)

[1.1. Khái niệm lũy thừa 24](#_Toc523603659)

[1.2. Phương trình  24](#_Toc523603660)

[1.3. Một số tính chất của căn bậc **** 25](#_Toc523603661)

[1.4. Hàm số lũy thừa 25](#_Toc523603662)

[1.5. Khảo sát hàm số mũ . 26](#_Toc523603663)

[**2. LOGARIT** 27](#_Toc523603664)

[2.1. Khái niệm Logarit 27](#_Toc523603665)

[2.2. Bảng tóm tắt công thức Mũ-logarit thường gặp 27](#_Toc523603666)

[**3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.** 28](#_Toc523603667)

[3.1. Bất phương trình mũ cơ bản 28](#_Toc523603668)

[3.2. Bất phương trình logarit cơ bản 28](#_Toc523603669)

[**4. BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG** 29](#_Toc523603670)

[4.1. Lãi đơn 29](#_Toc523603671)

[4.2. Lãi kép 29](#_Toc523603672)

[4.3. Tiền gửi hàng tháng 30](#_Toc523603673)

[4.4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng 30](#_Toc523603674)

[4.5. Vay vốn trả góp 30](#_Toc523603675)

[4.6. Bài toán tăng lương 31](#_Toc523603676)

[4.7. Bài toán tăng trưởng dân số 31](#_Toc523603677)

[4.8. Lãi kép liên tục 31](#_Toc523603678)

[**PHẦN III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN** 32](#_Toc523603679)

[**1. NGUYÊN HÀM** 32](#_Toc523603680)

[1.1. Định nghĩa 32](#_Toc523603681)

[1.2. Tính chất của nguyên hàm 32](#_Toc523603682)

[1.3. Sự tồn tại của nguyên hàm 32](#_Toc523603683)

[1.4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp 32](#_Toc523603684)

[1.5. Bảng nguyên hàm mở rộng 33](#_Toc523603685)

[**2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM** 34](#_Toc523603686)

[2.1. Phương pháp đổi biến 34](#_Toc523603687)

[2.2. Phương pháp nguyên hàm từng phần 35](#_Toc523603688)

[**3. TÍCH PHÂN** 36](#_Toc523603689)

[3.1. Công thức tính tích phân 36](#_Toc523603690)

[3.2. Tính chất của tích phân 36](#_Toc523603691)

[**4. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN** 37](#_Toc523603692)

[4.1. Phương pháp đổi biến 37](#_Toc523603693)

[4.2. Phương pháp tích phân từng phần 38](#_Toc523603694)

[**5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN** 38](#_Toc523603695)

[5.1. Tích phân hàm hữu tỉ 38](#_Toc523603696)

[5.2. Tích phân hàm vô tỉ 40](#_Toc523603697)

[5.3. Tích phân hàm lượng giác 43](#_Toc523603698)

[**6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN** 46](#_Toc523603699)

[6.1. Diện tích hình phẳng 46](#_Toc523603700)

[6.2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay 46](#_Toc523603701)

[**PHẦN IV. SỐ PHỨC** 48](#_Toc523603702)

[**1. SỐ PHỨC** 48](#_Toc523603703)

[1.1. Khái niệm số phức 48](#_Toc523603704)

[1.2. Hai số phức bằng nhau 48](#_Toc523603705)

[1.3. Biểu diễn hình học số phức 48](#_Toc523603706)

[1.4. Số phức liên hợp 48](#_Toc523603707)

[1.5. Môđun của số phức 48](#_Toc523603708)

[**2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC** 49](#_Toc523603709)

[2.1. Phép cộng và phép trừ số phức 49](#_Toc523603710)

[2.2. Phép nhân số phức 49](#_Toc523603711)

[2.3. Chia hai số phức 49](#_Toc523603712)

[**3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC** 49](#_Toc523603713)

[**4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC** 50](#_Toc523603714)

[4.1. Căn bậc hai của số thực âm 50](#_Toc523603715)

[4.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực 50](#_Toc523603716)

[**5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC** 50](#_Toc523603717)