DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A.Bài toán

1. Tìm các cặp số nguyên sao cho: 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 



Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

Tìm các giá trị nguyên dương sao cho : 

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 3x – y3 = 1
2. Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: x2 + y2 + 5x2y2 + 60 = 37xy.
3. Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn và 
4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 
5. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng .
6. **.** Tìm các giá trị nguyên dương sao cho: 
7. : Tìm nguyên dương thỏa mãn: 
8. Tìm giá trị nguyên của  để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên. 
9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình



**Bài 15:** Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn: 

1. Tìm các giá trị nguyên dương sao cho 
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình: 
3. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn 
4. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn  sao cho tích đạt giá trị lớn nhất.
5. Với giá trị nào của và  thì đa thức  phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên.
6. a)Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn 

b) Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn  sao cho tích đạt giá trị lớn nhất.

1. Ký hiệu (phần nguyên của ) là số nguyên lớn nhất không vượt quá Tìm biết rằng: 
2. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn: 

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: 

Tìm nguyên dương thỏa mãn: 

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 
2. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
3. Tìm các số nguyên thỏa mãn 
4. Giải phương trình nghiệm nguyên : 
5. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 
6. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên thỏa mãn: 
7. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: 
8. Giải phương trình nghiệm nguyên: 
9. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 
10. Tìm cặp số nguyên  thỏa mãn phương trình: 
11. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 
12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 
13. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi
14. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình



1. Tìm các giá trị nguyên dương sao cho 
2. Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn: 
3. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn: 
4. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
5. Giải phương trình nghiệm nguyên: 
6. Giải phương trình nghiệm nguyên : 

a) Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

b) Tìm các số nguyên thỏa mãn: với nguyên dương.

1. Tìm giá trị nguyên của x để biết và 
2. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
3. Giải phương trình nghiệm nguyên: .
4. Tìm nghiệm nguyên  của phương trình

.

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn: 
3. Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn:

x3 + 2x2 + 3x + 2 = y3

1. Giải phương trình nghiệm nguyên : x2 + y2 = 3 - xy
2. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
3. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

Tìm giá trị nguyên của để biểu thức nhận giá trị nguyên

1. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: 
2. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 
3. Giải phương trình nghiệm nguyên: 
4. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn: 
5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: 
6. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 
7. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình: 
8. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 
9. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 
10. Giải phương trình nghiệm nguyên: 

B. HƯỚNG DẪN

1. Tìm các cặp số nguyên sao cho: 

Lời giải

Ta có:



Đặt : và Suy ra và là các ước của có tích bằng Nhận thấy là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 10 |

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

Lời giải



 (vì không là nghiệm của )



Vì nguyên nên  là ước của 3 hay 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 6 | 4 | 8 |
|  | 0 | 8 | 0 | 8 |

Vậy nghiệm của phương trình 

1. . Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

Lời giải

Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

Lời giải

Ta có:



Ta thấy  nên do nguyên nên 



Với  thay vào ta được: tìm được 

Với thay vào ta có: , không tìm được nguyên

Với  thay vào ta có  không tìm được nguyên

Vậy 

1. Tìm các giá trị nguyên dương sao cho : 

Lời giải

Ta có:



Do là số chẵn và nên Do đó  và là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : và 

và Vậy 

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 3x – y3 = 1

Lời giải

3x – y3 = 1 ⇔ 3x = y3 + 1 (1)

- Dễ thấy x = y = 0 là một nghiệm của (1).

- Nếu x < 0 thì 3x =  ( n nguyên dương, n = - x)

suy ra 0 < 3x < 1. Mà y3 + 1 là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên.

- Nếu x > 0 thì 3x 3

(1) ⇔ 3x = (y + 1)3 – 3y(y + 1) ⇒ (y + 1)3 3 nên y + 1 3

Đặt y + 1 = 3k ( k nguyên), suy ra y = 3k – 1. Thay vào (1) ta được: 3x = (3k – 1)3 + 1 = 9k(3k2 – 3k + 1) nên 3k2 – 3k + 1 là ước của 3x mà 3k2 – 3k + 1 3 và 3k2 – 3k + 1= 

nên 3k2 – 3k + 1 = 1 ⇔ 3k(3k – 1) = 0 ⇔ k = 0 hoặc k = 1.

Với k = 0 thì y = - 1 suy ra 3x = 0 phương trình vô nghiệm.

Với k = 1 thì y = 2 suy ra 3x = 9 nên x = 2.

1. Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: x2 + y2 + 5x2y2 + 60 = 37xy.

Lời giải

a) x2 + y2 + 5x2y2 + 60 = 37xy.

 x2 + y2 – 2xy = 35xy - 5x2y2 - 60

(x – y)2= 5(3 – xy)(xy – 4) (1)

Vì (x – y)2 ≥ 0 nên 5(3 – xy)(xy – 4) ≥ 0  3 ≤ xy ≤ 4 xy  {3;4}

Đẳng thức (1) xảy ra   .  
Vậy (x,y) {(2;2);(-2;-2)}

1. Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn và 

Lời giải



Vì nên , do đó 

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

Lời giải: Thêm vào hai vế của phương trình ta có:



Ta thấy là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

TH1: 

TH2: ta cónên 

Thử lại ba cặp số đều là nghiệm của phương trình đã cho.

1. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng 

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là . Ta có:



Vậy ba số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 

1. **.** Tìm các giá trị nguyên dương sao cho: 

Lời giải

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng 

Lập luận để có và là các ước dương của 12. Từ đó ta có các trường hợp:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 6 | 4 |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  |  | 4 |  |
|  |  |  |  |

Mà nguyên dương nên 

1. : Tìm nguyên dương thỏa mãn: 

Lời giải



Vì nguyên dương nên  và 

Phương trình có nghiệm dương duy nhất 

1. Tìm giá trị nguyên của  để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên.



Lời giải:

ĐKXĐ: 

Ta có: 

Để A có giá trị nguyên khi x nguyên thì 

Lập bảng:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *2x +1* | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
| *2x* | -5 | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
| *x* |  |  | -1 | 0 |  |  |

Vậy, .

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình



**Giải:**

+) Với dương, ta có:



(theo bất đẳng thức 

Mặt khác: 



Suy ra và đẳng thức xảy ra 

+)Áp dụng với ta có:



Đẳng thức xảy ra 

1. Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn: 

**Giải:**

1. 



Có các giá trị 

Tìm các giá trị nguyên dương sao cho 

Giải:

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng 

Lập luận để có và là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 12 |  |  |
|  | 1 |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Mà nguyên dương nên 

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình:



**Lời giải**

****

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 7 | -1 | 5 | 1 | 11 | -5 | 4 | 2 | 19 | -13 |
|  | 1 | -7 | 5 | -11 | -1 | 5 | 13 | -19 | -2 | -4 |

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:



1. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn 

**Lời giải**



V T (\*) là số chính phương, VP (\*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0



Với 

Với 

1. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn  sao cho tích đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

Điều kiện 



Vì với mọi mọi y

Do đó  mà 

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

1. Với giá trị nào của và  thì đa thức  phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên.

**Lời giải**

Giả sử :



Khử ta có:



Vì nguyên ta có: 

1. a)Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn 

b) Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn  sao cho tích đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**





VT (\*) là số chính phương, VP (\*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0



Với 

Với 



Điều kiện 



Vì với mọi mọi y

Do đó  mà 

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

1. Ký hiệu (phần nguyên của ) là số nguyên lớn nhất không vượt quá Tìm biết rằng: 

**Lời giải**

vả 



Do 

1. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

1. 





Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Vì nên 

(2) viết thành: 



Vậy 

1. Tìm nguyên dương thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có:



Vì nguyên dương nên

 và 

Phương trình có nghiệm dương duy nhất 

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

**Lời giải**

Gọi các cạnh của tam giác vuông là trong đó cạnh huyền là 

là các số nguyên dương). Ta có

 và 

Từ (2) suy ra thay (1) vào ta có:





thay vào (1) ta được: 



Từ đó tìm được các giá trị của là:



1. Tìm các số nguyên thỏa mãn 

**Lời giải** Ta có: 



Từ (1) và (2) ta có : mà nguyên suy ra 

Thay vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Từ đó tìm được hai cặp số thỏa mãn Câu toán là: 

1. Giải phương trình nghiệm nguyên : 

**Lời giải**

Ta có: 

Lại có: 

Suy ra Mà 

Lần lượt thử ta được là nghiệm của PT

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có:

Vì nguyên nên nên ta có:



Vì nguyên nên ta có nguyên 

Xét các trường hợp ta tìm được  thỏa mãn và kết luận

1. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên thỏa mãn: 
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn:

**Lời giải**

1. Ta có: (\*)

+Xét ta có: 

+Xét và  ta có VT(\*) là số chẵn còn vế phải (\*) là số lẻ, Vô lý

Vậy 

1. Ta có:



Vì và nên 



1. Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**





1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có:

Vì nguyên nên nên ta có:





Vì nguyên nên ta có nguyên 

Xét các trường hợp ta tìm được 

1. Tìm cặp số nguyên  thỏa mãn phương trình: 

**Lời giải**









Vì: 

Mà 

Mặt khác  với mọi x



 

Với , ta có: 

 



Vì y Z nên y3 = 1 y = 1

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên 

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**



Do  nên 

thỏa mãn nguyên

Vậy 

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta thấy là nghiệm của phương trình đã cho.

Với  ta xét:

Nếu thì 

Với dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với ta đặt thì nên . Ta có:



Phương trình này vô nghiệm vì 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

**Lời giải:** Gọi các cạnh của tam giác vuông là trong đó cạnh huyền là (là các số nguyên dương)

Ta có: và 

Từ (2) suy ra thay (1) vào ta có:









Suy ra thay vào ta được:



Từ đó ta tìm được các giá trị của là:



1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình



**Lời giải**

+) Với dương, ta có:



(theo bất đẳng thức 

Mặt khác:





Suy ra và đẳng thức xảy ra 

+)Áp dụng với ta có:



Đẳng thức xảy ra 

1. Tìm các giá trị nguyên dương sao cho 

**Lời giải** Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng 

Lập luận để có và là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 12 |  |  |
|  | 1 |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Mà nguyên dương nên 

1. Tìm tất cả các số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**



Có các giá trị 

1. Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**







1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

**Lời giải**

Gọi các cạnh của tam giác vuông là trong đó cạnh huyền là 

là các số nguyên dương). Ta có

 và 

Từ (2) suy ra thay (1) vào ta có:





thay vào (1) ta được: 



Từ đó tìm được các giá trị của là:



1. Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**



Từ suy ra 



Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên là 

1. Giải phương trình nghiệm nguyên : 

**Lời giải**

Ta có: 

Lại có: 

Suy ra Mà 

Lần lượt thử ta được là nghiệm của phương trình

1. a) Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

b) Tìm các số nguyên thỏa mãn: với nguyên dương.

**Lời giải**

a) Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 





Vì nguyên dương nên 

Vậy 

1. Tìm giá trị nguyên của x để biết và 

**Lời giải**

Xét 

Với thì khi 

Mà Ưnên thì 

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

**Lời giải**

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y , z ; trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có : và 

Từ (2) suy ra thay (1) vào ta có :

thay (1) vào ta có:



, thay vào (1) ta được:



Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là :



1. Giải phương trình nghiệm nguyên: .

**Lời giải**



Đặt x2- 4x = t. ĐK t - 4

Khi đó ta có được phương trình: t2 + 2t - 35 = 0  (t + 7)(t – 5) = 0

 t = -7 (loại) hoặc t = 5

Với t = 5, khi đó x2 - 4x - 5 = 0 (x +1)(x – 5) = 0  x = 5 hoặc x = -1

Vậy tập nghiệm phương trình là S = {-1; 5}

1. Tìm nghiệm nguyên  của phương trình

.

**Lời giải**



Đặt  ta được 

Vì x, y là những số nguyên nên  và  cũng là những số nguyên. Do đó ta có hai trường hợp sau:

\* TH1:  và . Suy ra  và .

Với  thì   hoặc .

\* TH2:  và . Suy ra  và .

Với  thì  hoặc .

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm nguyên  là 

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

**Lời giải**

Ta có  (1)

 (2)

Từ (1) và (2) ta có x < y < x + 2 mà x, y nguyên suy ra y = x + 1

Thay y = x + 1 vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được x = 1;

Từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là:

(-1 ; 0) và (1; 2)

KL nghiệm

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có:



Vì  và 64 chỉ được phân tích thành  nên ta có:

 hoặc   hoặc

Vậy pt đã cho có 4 nghiệm nguyên: 

1. **:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có:  (\*) 

VT của (\*) là số chính phương; VP của (\*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0



\*) Với 

\*) Với 

Vậy có 2 cặp số nguyên  hoặc .

1. Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: x3 + 2x2 + 3x + 2 = y3

**Lời giải**

Ta có: = 2

> 0

Từ (1) và (2) ta có :

Thay y = x + 1 vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được x = 1 hoặc -1.

Từ đó tìm được hai cặp số (x;y) thỏa mãn bài toán là (-1;0); (1;2)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên : x2 + y2 = 3 - xy

Lời giải

Ta có:

Lại có:

Suy ra

Lần lượt thử ta được là nghiệm của phương trình.

**Lời giải**Gọi các cạnh của tam giác vuông là trong đó cạnh huyền là z.

là các số nguyên dương).

Ta có:

Từ (2) suy ra , thay (1) vào ta có:

Suy ra thay vào (1) ta được:

Từ đó tìm được các giá trị của là:

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

* 1. Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 

1. Tìm giá trị nguyên của để biểu thức nhận giá trị nguyên

**Lời giải**



Để B nhận giá trị nguyên thì 

1. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Ta nhận thấy với mọi 

Nên 

Theo câu a): 

Suy ra : 





Vậy phương trình có các nghiệm nguyên 

Ta có:



Ta thấy: nên do nguyên nên 

Với thay vào ta được tìm được 

Với thay vào ta có : không tìm được x nguyên

Với thay vào ta có: không tìm được nguyên.

Vậy nguyên tìm được 

1. Biến đổi về dạng :

Xét 4 trường hợp 

1. Ta có:



VT của (\*) là số chính phương ; VP của (\*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0



Vậy có 2 cặp số nguyên 

1. 

(vì không là nghiệm của phương trình (2))

Vì nguyên nên là ước của 3

Hay  hay 

Khi  Khi 

Khi  Khi 

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là 

1. Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 

1. Bài 6.

****

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 7 | -1 | 5 | 1 | 11 | -5 | 4 | 2 | 19 | -13 |
|  | 1 | -7 | 5 | -11 | -1 | -5 | 13 | -19 | -2 | -4 |

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:



Lời giải

Ta có: 



Từ và ta có:  mà nguyên suy ra 

Thay  vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được 

Vậy 

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có:



Vì nguyên nên nên ta có:



Vì nguyên nên ta có nguyên 

Xét các trường hợp ta tìm được  thỏa mãn và kết luận.

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

1. 

