DẠNG 3: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A.Bài toán

1. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số , biết rằng nó là một số chính phương, số  chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.
2. Cho  là một số gồm  chữ số ,  là một số gồm  chữ số ,  là một số gồm  chữ số  . Cmr:  là một số chính phương .
3. Tìm số nguyên dương  để  và  là số chính phương
4. Tìm số tự nhiên để và là hai số chính phương
5. a) Tìm số có hai chữ sô mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b)Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

1. Cho các số nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

Chứng minh là số chính phương.

1. Cho Chứng minh rằng là một số chính phương
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên thì:

là số chính phương

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ
2. Tìm số tự nhiên để: là số chính phương.

1. Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

1. Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.
2. Tìm tất cả các số nguyên sao cho: là số chính phương.
3. Chứng minh: số có dạng  với  và  không phải là số chính phương.
4. Tìm các số nguyên  để  là số chính phương?
5. Tìm số tự nhiên để và là hai số chính phương

1. Cho Chứng minh rằng là một số chính phương

1. Cho  trong đó là số nguyên tố. Tìm các giá trị của để tổng các ước dương của  là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên để là một số chính phương.
3. Cho (với 

Chứng minh rằng là bình phương của một số tự nhiên

1. Tìm số tự nhiên sao cho số là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên để là một số chính phương.
3. Cho n là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng cũng là tổng của hai số chính phương
4. Cho các số nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

Chứng minh là số chính phương.

1. Cho Chứng minh rằng là một số chính phương.
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên thì:

là số chính phương.

1. Cho  Chứng minh rằng  là một số chính phương.
2. Cho là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện Chứng minh rằng biểu thức là bình phương của một số hữu tỷ.
3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương. 
4. Tìm số tự nhiên  để  là một số chính phương
5. Cho và là các số tự nhiên thỏa mãn 

Chứng minh rằng: và là các số chính phương.

1. Cho $A=p^{4}$ trong đó $p $là số nguyên tố. Tìm các giá trị của $p$ để tổng các ước dương của $A $là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên $n $để $n^{2}+4n+2013$ là một số chính phương.
3. Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+…+k\left(k+1\right)\left(k+2\right) với k\in N^{\*}$

Chứng minh rằng $4S+1 $là bình phương của một số tự nhiên

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.
2. Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.
3. Tìm số tự nhiên sao cho số là số chính phương.

B. HƯỚNG DẪN

1. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số , biết rằng nó là một số chính phương, số  chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

Lời giải:

Vì  là số chính phương và d là một số nguyên tố có 1 chữ số nên .

Đặt . Khi đó  có chữ số tận cùng là 5 (1)

Mặt khác,  suy ra ( 2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Suy ra 

Ta lại có: .

Do đó, chọn .

1. Cho  là một số gồm  chữ số ,  là một số gồm  chữ số ,  là một số gồm  chữ số  . Cmr:  là một số chính phương .

Lời giải:

Ta có : 

 

 

Vậy,  là một số chính phương

1. Tìm số nguyên dương  để  và  là số chính phương

Lời giải:

Đặt 

Ta có: 

Mà  nên  và  nên suy ra  và 

Do đó, . Vậy, .

1. Tìm số tự nhiên để và là hai số chính phương

Lời giải:

1. Để và  là hai số chính phương

và 



Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: 

Từ 

Thay vào ta được 

Vậy với  thì và là hai số chính phương

1. a) Tìm số có hai chữ sô mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

 b)Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

 c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Lời giải:

a) Số cần tìm có dạng , với 

Theo đề bài ta có: 

Hệ thức (1) chứng tỏ  phải là một số lập phương và  phải là một số chính phương.

Do  hoặc 

+Nếu  ( chính phương )

+Nếu  ( không chính phương nên loại )

Vậy, số cần tìm là .

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là  ( ĐK : )

Ta có :  ( Vì  ) Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4.

 c) Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là 

( ĐK : )

Ta có : 

 

 

Vì  nên   ( Vì  )

Vậy, bốn số nguyên dương liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4, 5

1. Cho các số nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

Chứng minh là số chính phương.

Lời giải:







Vậy là số chính phương

1. Cho Chứng minh rằng là một số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có:



là một số chính phương.

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên thì:

là số chính phương

**Lời giải:**

Ta có: 



Đặt thì



Vì nên 

Vậy A là số chính phương

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

**Lời giải**

Gọi hai số lần lượt là và 

Theo đề bài ra ta có:



=là một số chính phương lẻ vì là số chẵn

là số lẻ

1. Tìm số tự nhiên để: là số chính phương.

**Lời giải**



Mà (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và . Vậy chia 5 dư 2

Do đó có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của để D là số chính phương

1. Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

**Lời giải**

Gọi là số phải tìm , 

Ta có: 



Do đó: 



 hoặc 



Kết luận đúng: 

1. Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k2 và (k+1)2.

Ta có: k2 + (k+1)2 + k2.(k+1)2 = k4 +2k3+ 3k2 + 2k +1 = (k2 + k +1)2 = [k(k + 1) +1]2 là số chính phương. (1)

Vì k(k + 1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên k(k + 1) chẵn  k(k + 1) +1 lẻ  [k(k + 1) +1]2 lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

1. Tìm tất cả các số nguyên sao cho: là số chính phương.

Lời giải

Giả sử 

Ta có: 



Thay 



Thử trực tiếp thỏa mãn

Vậy số nguyên n cần tìm là 

1.

Chứng minh: số có dạng  với  và  không phải là số chính phương.

Lời giải

) Chứng minh: số có dạng với và không phải là số chính phương.

Ta có





Với và thì và

Suy ra với và do đó không phải là số chính phương.

Vậy, số có dạng với và không phải là số chính phương

Tìm các số nguyên  để  là số chính phương?

Lời giải

Ta có là số chính phương thì cũng là số chính phương.

Đặt

Khi đó,

Vì nên ta có 4 trường hợp:

Giải ra ta lần lượt được:

Vậy, khi hoặc hoặc hoặc thì là số chính phương.

Tìm số tự nhiên để và là hai số chính phương

**Lời giải**

Để và là hai số chính phương

và

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên:

Từ

Thay vào ta được

Vậy với thì và là hai số chính phương

Cho Chứng minh rằng là một số chính phương

Lời giải

Ta có:

 là một số chính phương.

1. Cho  trong đó là số nguyên tố. Tìm các giá trị của để tổng các ước dương của  là số chính phương.

**Lời giải**

Các ước dương của là 

Tổng các ước là 



Ta có:

 

Do đó :



Vậy 

1. Tìm số tự nhiên để là một số chính phương.

**Lời giải**

Giả sử 

Suy ra 



Mặt khác  và  nên có các trường hợp sau:







Vậy các số cần tìm là 

1. Cho (với 

Chứng minh rằng là bình phương của một số tự nhiên

**Lời giải**

Ta có: 



Mặt khác:



Mà nên nên suy ra đpcm.

1. Tìm số tự nhiên sao cho số là số chính phương.

**Lời giải**

Giả sử là số chính phương, suy ra tồn tại số sao cho :





Do nên dễ thấy và là các số nguyên

Ngoài ra và 

Suy ra 

Căn cứ các lập luận trên và là số nguyên tố nên từ (\*) suy ra



Với thì là số chính phương

Vậy là số tự nhiên cần tìm

1. Tìm số tự nhiên để là một số chính phương.

**Lời giải**

Giả sử 

Suy ra 



Mặt khác  và  nên có các trường hợp sau:



Vậy các số cần tìm là 

1. Cho n là tổng của hai số chính phương. cũng là tổng của hai số chính phương

**Lời giải**

Đặt với 

Khi đó là tổng của hai số chính phương.

1. Cho các số nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

Chứng minh là số chính phương.

**Lời giải**







Vậy là số chính phương

Cho Chứng minh rằng là một số chính phương.

**Lời giải**

Ta có:



là một số chính phương.

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên thì:

là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 



Đặt thì



Vì nên 

Vậy A là số chính phương

1. Cho  Chứng minh rằng là một số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 



 

  là một số chính phương.

1. Cho là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện Chứng minh rằng biểu thức là bình phương của một số hữu tỷ.

**Lời giải**

Vì nên 

Tương tự: 

Do đó: 

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương. 

**Lời giải**

Ta có: 









Vơi x là số nguyên thì P là một số CP.

1. Tìm số tự nhiên  để  là một số chính phương

**Lời giải**

b) Giả sử 

 Suy ra 

 

Mặt khác  và nên có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: 

TH2: 

 TH3: 

Vậy các số cần tìm là: 1002; 138; 2

1. Từ có 

Cũng có : Suy ra 

Gọi . Chứng minh được 

là số chính phương là số chính phương (đpcm)

1. Tìm số tự nhiên $n $để $n^{2}+4n+2013$ là một số chính phương.

**Lời giải**

Các ước dương của $A $là $1;p;p^{2};p^{3};p^{4}$

Tổng các ước là $1+p+p^{2}+p^{3}+p^{4}=n^{2} (n\in N)$

 $⇒4+4p+4p^{2}+4p^{3}+4p^{4}=4n^{2}$

Ta có: $4p^{4}+4p^{3}+p^{2}<4n^{2}<4p^{4}+p^{2}+4+4p^{3}+8p^{2}+4p$

$$⇒\left(2p^{2}+p\right)^{2}<\left(2n\right)^{2}<\left(2p^{2}+p+2\right)^{2}⇒\left(2n\right)^{2}=\left(2p^{2}+p+1\right)^{2}$$

Do đó :$ 4+4p+4p^{2}+4p^{3}+4p^{4}=4p^{4}+4p^{3}+5p^{2}+2p+1$

$$⇒p^{2}-2p-3=0⇔\left[\begin{array}{c}p\_{1}=-1 ( không thỏa mãn)\\p\_{2}=3 ( thỏa mãn)\end{array}\right.$$

Vậy $p=3$

1. Tìm số tự nhiên $n $để $n^{2}+4n+2013$ là một số chính phương.

**Lời giải**

Giả sử $n^{2}+4n+2013=m^{2} (m\in N)$

Suy ra $\left(n+2\right)^{2}+2009=m^{2}⇔m^{2}-\left(n+2\right)^{2}=2009$

 $⇔\left(m+n+2\right)\left(m-n-2\right)=2009$

Mặt khác 2009= 2009.1=287.7 = 49.41 và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau: $TH1:\left\{\begin{array}{c}m+n+2=2009\\m-n-2=1\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}m=1005\\n=1002\end{array}\right.$

 $TH2:\left\{\begin{array}{c}m+n+2=287\\m-n-2=7\end{array}\right. ⇔\left\{\begin{array}{c}m=147\\n=138\end{array}\right.$

$$TH3:\left\{\begin{array}{c}m+n+2=49\\m-n-2=41\end{array}\right. ⇔\left\{\begin{array}{c}m=45\\n=2\end{array}\right.$$

Vậy các số cần tìm là 1002; 138; 2.

1. Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+…+k\left(k+1\right)\left(k+2\right) với k\in N^{\*}$

Chứng minh rằng $4S+1 $là bình phương của một số tự nhiên

**Lời giải**

Ta có: $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{1}{4}k\left(k+1\right)\left(k+2\right).4=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\left[\left(k+3\right)-(k-1)\right]$

 $=\frac{1}{4}k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)-\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1)$

$$⇒4S=1.2.3.4-0.1.2.3+2.3.4.5-1.2.3.4+…+k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)-k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k-1\right)=k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)+1$$

$$⇒4S+1=k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)+1$$

Mặt khác:

$$k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)+1=k\left(k+3\right)\left(k+1\right)\left(k+2\right)+1=(k^{2}+3k)\left(k^{2}+3k+2\right)+1=\left(k^{2}+3k+1\right)^{2}$$

Mà $k\in N^{\*} nên k^{2}+3k+1\in N^{\*}$ nên suy ra đpcm.

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

**Lời giải**

Gọi hại số lần lượt là và 

Theo bài ra ta có:



là một số chính phương lẻ vì là số chẵn nên là số lẻ

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

**Lời giải**

Gọi là số phải tìm 

Ta có: 

Do đó: 





Vậy số cần tìm là 

1. Tìm số tự nhiên sao cho số là số chính phương.

**Lời giải**

Giả sử là số chính phương, suy ra tồn tại số sao cho :





Do nên dễ thấy và là các số nguyên

Ngoài ra và 

Suy ra 

Căn cứ các lập luận trên và là số nguyên tố nên từ (\*) suy ra



Với thì là số chính phương

Vậy là số tự nhiên cần tìm.