**HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU**

**VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

**A. CHUẨN KIẾN THỨC**

**A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.**

**1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.**

Cho hai đường thẳng  và  trong không gian. Có các trường hợp sau đây xảy ra đối với  và :

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa cả  và , khi đó theo kết quả tronh hình học phẳng ta có ba khả năng sau:

*  và  cắt nhau tại điểm , ta kí hiệu .
*  và  song song với nhau, ta kí hiệu .
*  và  trùng nhau, ta kí hiệu .

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả  và , khi đó ta nói  và  là hai đường thẳng chéo nhau.

**2. Các định lí và tính chất.**

* Trong không gian, qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng  có một và chỉ một đường thẳng song song với .
* Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.
* Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
* Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song.



**B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.**

**Bài toán 01: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT BẰNG QUAN HỆ SONG SONG**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

**Phương pháp:**

Sử dụng tính chất: Nếu hai mặt phẳng  và  có điểm chung và lần lượt chứa hai đường thẳng song song  và  thì giao tuyến của  và  là đường thẳng đi qua  song song với  và .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và 

**Lời giải.**

Ta có 

.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với các cạnh đáy là  và . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và  và  là trọng tâm của tam giác .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

b) Tìm điều kiện của  và  để thiết diện của  và hình chóp là một hình bình hành.

**Lời giải.**

a) Ta có  là hình thang và  là trung điểm của  nên .

Vậy 

  với

 .

b) Dễ thấy thiết diện là tứ giác .

Do  là trọng tâm tam giác  và nên 

( là trung điểm của ).

.

Lại có . Vì  nên  là hình thang, do đó  là hình bình hành khi 

.

Vậy thết diện là hình bình hành khi .

**Bài toán 01: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.**

**Phương pháp:**

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể làm theo một trong các cách sau:

* Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng rồi dùng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.
* Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song vơi đường thẳng thứ ba.
* Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
* Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình thang với đáy lớn . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và .

a) Chứng minh  song song với .

b) Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Chứng minh  song song với .

**Lời giải.**

a) Ta có  là đường trung bình của tam giác  nên .

****Lại có  là hình thang .

Vậy .

b) Trong  gọi , trong  gọi .

Ta có  .

Vậy .

Do .

Ta có .

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình thang với đáy  và . Biết . Gọi  và  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và . Mặt phẳng  cắt  lần lượt tại . Mặt phẳng  cắt  tại .

a) Chứng minh  song sonng với .

b) Giải sử  cắt  tại ;  cắt  tại . Chứng minh  song song với  và . Tính  theo .

**Lời giải.**

a) Ta có .

Vậy 



Tương tự 

Vậy 



Từ  và  suy ra .

b) Ta có ;

Do đó . Mà .

Tính : Gọi 

Ta có , 

Mà .

Từ suy ra 

Tương tự . Vậy .

**Bài toán 03: CHỨNG MINH BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI**

**Phương pháp:**

Để chứng minh bốn điểm  đồng phẳng ta tìm hai đường thẳng  lần lượt đi qua hai trong bốn điểm trên và chứng minh  song song hoặc cắt nhau, khi đó  thuôc .

Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ngoài cách chứng minh ở §1, ta có thể chứng minh  lần lượt là giao tuyến của hai trong ba mặt phẳng  trong đó có hai giao tuyến cắt nhau. Khi đó theo tính chất về giao tuyến của ba mặt phẳng ta được  đồng qui.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có đáy  là một tứ giác lồi. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh bên  và .

a) Chứng minh  đồng qui ( là giao điểm của  và ).

b) Bốn điểm  đồng phẳng.

**Lời giải.**

a) Trong  gọi , dễ thấy  là trung điểm của , suy ra  là đường trung bình của tam giác .

Vậy .

Tương tự ta có  nên  thẳng hàng hay .

Vậy minh  đồng qui .

b) Do  nên  và  xác định một mặt phẳng. Suy ra  đồng phẳng.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật. Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và . Chứng minh:

a) Bốn điểm  đồng phẳng.

b) Ba đường thẳng  đồng qui ( là giao điểm của  và ).

**Lời giải.**

a) Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh  và .

Ta có 

.

Tương tự 

Lại có 

Từ  và  suy ra . Vậy bốn điểm  đồng phẳng.

b) Dễ thấy  cũng là hình bình hành và .

Xét ba mặt phẳng  và  ta có :







.

Do đó theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng  đồng qui.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**19**. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

**20.** Cho hình chóp . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và .

a) Chứng minh .

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

**21**. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

b) Gọi  là một điểm trên cạnh . Xác định giao điểm  của  với . Tứ giác  là hình gì?

c) Giả sử . Chứng minh  thuộc một đường thẳng cố định khi  chạy trên cạnh .

**22**. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh .

a) Chứng minh  là một hình bình hành.

b) Gọi  là một điểm trên cạnh . Xác định thiết diện của hình chóp với .

**23**. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và ,  là một điểm thuộc cạnh (  khác  và ).

a) Xác định thiết diện của tứ diện với .

b) Tìm vị trí của điểm  trên  sao cho thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của tứ diện  và vị trí của điểm  trên  sao cho thiết diện là hình thoi.

**24.** Cho tứ diện đều  cạnh . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và .

a) Hãy xác định các điểm  và  sao cho .

b) Tính  theo .

**25**. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang.Một mặt phẳng  cắt các cạnh  và  lần lượt tại các điểm .

a) Giả sử , . Chứng minh  thẳng hàng.

b) Giả sử  và .

Chứng minh .

**26.** Cho hình chóp  có đáy là hình thang với .  là một điểm di động trong tứ giác . Qua  vẽ các đường thẳng song song với  cắt các mặt  và  lần lượt tại .

a) Nêu cách dựng các điểm .

b) Tìm tập hợp điểm  sao cho  lớn nhất.

**27.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình thang với đáy  và . Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh  và .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của  và  nằm bên trong hình chóp.

**28.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác  và ,  là điểm trên cạnh  sao cho . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng .

**29.** Cho hình chóp ,  là một điểm nằm trong tam giác  Các đường thẳng qua  và song song  và  cắt các mặt  lần lượt tại các điểm .

a) Nêu cách dựng các điểm .

b) Chứng minh  có giá trị không đổi khi  di động trong tam giác .

c) Xác định vị trí của điểm  để tích  lớn nhất.

**30.** Cho tứ diện  . Một mặt phẳng cắt bốn canh

 Lần lượt tại các điểm  .

Chứng minh : . Khi đẳng thức xảy ra thì  là hình gì?