|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT ………..**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KÌ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI**  **NĂM HỌC 2020-2021**  **Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT**  **Thời gian:** *150 phút (không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1 (2 điểm).** Cho . Biết rằng luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm , . Gọi , lần lượt là hình chiếu của ,  lên , , lần lượt là hình chiếu của ,  lên . Tìm  để tam giác có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác .

**Câu 2 (4 điểm).**

1. Giải phương trình ****.

2.Giải hệ phương trình ****.

**Câu 3 (4 điểm).**

1. Chứng minh rằng .

2.Cho đa giác đều  nội tiếp đường tròn tâm , chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tứ giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác.

**Câu 4 (2 điểm).**  Nhà anh A muốn khoan một cái giếng sâu 20 mét dùng để lấy nước cho sinh hoạt gia đình. Có hai cơ sở khoan giếng tính chi phí như sau:

Cơ sở I: Mét thứ nhất 200 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét tăng thêm 60 nghìn đồng so với giá của mỗi mét trước đó.

Cơ sở II: Mét thứ nhất 10 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét gấp  lần so với giá của mỗi mét trước đó.

Hỏi gia đình anh A để tiết kiệm tiền thì nên chọn cơ sở nào để thuê, biết rằng hai cơ sở trên có chất lượng khoan là như nhau.

**Câu 5 (6 điểm).**

1.Trong mặt phẳng hệ tọa độ  cho hình thang cân  có hai đường chéo  và  vuông góc với nhau tại  và . Gọi  là điểm nằm trên cạnh sao cho ,  là trung điểm . Biết , đường thẳng  đi qua điểm  , đường thẳng  có phương trình . Tìm tọa độ các điểm ,  và .

2.Cho hình chóp có đáy  là hình thang cân, . Các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi  là giao điểm của *AC* và *BD*. *I* là trung điểm của *SO*. Mặt phẳng  thay đổi đi qua  và cắt  lần lượt tại . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  .

3. Cho hình lăng trụ tứ giác , mặt phẳng  thay đổi và song song với hai đáy của lăng trụ lần lượt cắt các đoạn thẳng  tại . Hãy xác định vị trí của mặt phẳng  để tứ giác  có diện tích nhỏ nhất.

**Câu 6 (2 điểm).**

1. Cho  là các số thực dương thoả mãn . Chứng minh bất đẳng thức

.

2. Giải phương trình .

---------- Hết ------------

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM**

*(Gồm có 06 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **NỘI DUNG** | **Điểm** |
| **I**  **2,0 điểm** | **Cho . Biết rằng luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm , . Gọi ,  lần lượt là hình chiếu của ,  lên , ,  lần lượt là hình chiếu của , lên . Tìm  để tam giác có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác .** | **2,0** |
| Xét phương trình hoành độ giao điểm: . | 0,5 |
| \*TH1:  ; .  ;.  Khi đó . | 0,75 |
| \*TH2:  ; .  ; .  Khi đó .  Vậy có 4 giá trị của  thỏa mãn yêu cầu đề bài. | 0,75 |
| **II**  **4,0 điểm** | **1. Giải phương trình** | **2,0** |
| Điều kiện: (\*).  Phương trình tương đương | 0,5 |
|  | 0,5 |
| * Giải (1) :      * Giải (2):  vô nghiệm vì . | 0,5 |
| Đối chiếu điều kiện (\*) phương trình có họ nghiệm | 0,5 |
| **2. Giải hệ phương trình** | **2,0** |
| Điều kiện: | 0,25 |
| Phương trình (1)    vì | 0,5 |
| Thế  vào phương trình (2) ta có: | 0,5 |
|  | 0,25 |
| * Giải (3) ta được * Giải (4): phương trình     vô nghiệm vì vế trái luôn dương với .  Đối chiếu điều kiện (\*) suy ra tập nghiệm hệ là . | 0,5 |
| **III**  **4,0 điểm** | **1. Chứng minh rằng** **.** | **2,0** |
| Ta có      . | 0,25 |
| Hệ số  trong khai triển  là **.** | 0,75 |
| Mà . | 0,5 |
| Hệ số của  trong khai triển là .  Vậy có điều phải chứng minh. | 0,5 |
| **2. Cho đa giác đều  nội tiếp đường tròn tâm , chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tứ giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác.** | **2,0** |
| Xác định được không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu | 0,5 |
| Xác định được biến cố, chỉ ra ứng vỡi mỗi cạnh có  (chia 2016 cái kẹo cho 3 bạn mà bạn nào cũng có kẹo) tứ giác thỏa mãn bài toán. | 0,5 |
|  | 0,5 |
| Xác suất cần tìm là | 0,5 |
| **IV**  **2,0 điểm** | **1. Nhà anh A muốn khoan một cái giếng sâu 20 mét dùng để lấy nước cho sinh hoạt gia đình. Có hai cơ sở khoan giếng tính chi phí như sau:**  **Cơ sở I: mét thứ nhất 200 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét tăng thêm 60 nghìn đồng so với giá của mỗi mét trước đó.**  **Cơ sở II: mét thứ nhất 10 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét gấp  lần so với giá của mỗi mét trước đó.**  **Hỏi gia đình anh A để tiết kiệm tiền thì nên chọn cơ sở nào để thuê, biết rằng hai cơ sở trên có chất lượng khoan là như nhau.** | **2,0** |
| Cơ sở I: Gọi  (nghìn đồng) là số tiền chi phí khoan giếng ở mét thứ .  Theo giả thiết ta có  và  Chứng minh dãy số  là một cấp số cộng có công sai . | 0,5 |
| Vậy số tiền thanh toán cho cơ sở I khoan giếng khi khoan giếng sâu 20 mét là:  (nghìn đồng). | 0,5 |
| Cơ sở II: Gọi  (nghìn đồng) là số tiền chi phí khoan giếng ở mét thứ .  Theo giả thiết ta có  và  Chứng minh dãy số  là một cấp số nhân có công bội . | 0,5 |
| Vậy số tiền thanh toán cho cơ sở II khoan giếng khi khoan giếng sâu 20 mét là:  (nghìn đồng).  Vậy gia đình anh A nên thuê cơ sở I. | 0,5 |
| **V**  **6,0 điểm** | **1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ  cho hình thang cân  có hai đường chéo  và  vuông góc với nhau tại  và . Gọi  là điểm nằm trên cạnh sao cho ,  là trung điểm . Biết , đường thẳng  đi qua điểm  , đường thẳng  có phương trình . Tìm tọa độ các điểm ,  và .** | **2,0** |
| Ta có  là hình thang cân nên có hai đường chéo  và  vuông góc với nhau tại  nên . | 0,5 |
| Ta đặt   , khi đó:    Suy ra . Do đó  Đường thẳng  đi qua  và vuông góc với  nên có phương trình là:  . | 0,5 |
| Gọi  . Theo định lí Talet ta có:  và  ngược hướng nên  , suy ra .  Mặt khác  nên . . | 0,5 |
| Nhận xét rằng , đường thẳng .  Đường thẳng  đi qua  và vuông góc với  có phương trình : .  Tọa độ điểm  là nghiệm của hệ phương trình:.  Vì  là trung điểm của  nên .  Mặt khác .  Vậy tọa độ ba điểm cần tìm là . | 0,5 |
|  | **2. Cho hình chóp có đáy  là hình thang cân,** **. Các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi  là giao điểm của *AC* và *BD*. *I* là trung điểm của *SO*. Mặt phẳng  thay đổi đi qua  và cắt  lần lượt tại . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức**  . | **2,0** |
| Gọi *K* là trung điểm của *AB*, *E* là trung điểm của  Ta có    Do: | 0,5 |
|  | 0,5 |
| Do  đồng phẳng nên . Suy ra . | 0,5 |
| T=  Vậy  khi . | 0,5 |
| **3. Cho hình lăng trụ tứ giác , mặt phẳng  thay đổi và song song với hai đáy của lăng trụ lần lượt cắt các đoạn thẳng  tại . Hãy xác định vị trí của mặt phẳng  để tứ giác  có diện tích nhỏ nhất.** | **2,0** |
|  |  |
| Giả sử mặt phẳng  cắt các cạnh  lần lượt tại .  Do mặt phẳng  nên ta có: . | 0,5 |
| Đặt  với  là hằng số. Ta có .  Suy ra . | 0,5 |
| .  Chứng minh tương tự ta có:  .  Ta có  . | 0,5 |
| Ta có .  Khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất là  khi .  Vậy mặt phẳng  đi qua trung điểm các cạnh . | 0,5 |
| **VI**  **2,0 điểm** | **1. Cho  là các số thực dương thoả mãn . Chứng minh bất đẳng thức**  **.** | **1,0** |
| Ta có    Tương tự có ; . | 0,5 |
| Do đó, cộng theo vế các bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức Schur cùng giả thiết  ta được    Hay | 0,25 |
| Mặt khác  Từ  và  suy ra  Do vậy  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | 0,25 |
| **2. Giải phương trình**  **.** | **1,0** |
|  |  | 0,25 |
|  | 0,25 |
| Thật vậy,.  , luôn đúng. | 0,25 |
| Vậy phương trình xảy ra . | 0,25 |

**---------- Hết ------------**

***Chú ý:***

**- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.**