**CHUYÊN ĐỀ I: ỨNG DỤNG VECTƠ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC**

**Phương pháp chung**

Để giải một bài toán tổng hợp bằng phương pháp vectơ ta thường thực hiện theo các bước sau

*Bước 1:* Chuyển giả thiết và kết luận của bài toán sang ngôn ngữ của vectơ, chuyển bài toán tổng hợp về bài toán vectơ.

*Bước 2:*Sử dụng các kiến thứcvectơ để giải quyết bài toán đó.

*Bước 3:* Chuyển kết quả bài toán vectơ sang kết quả bài toán tổng hợp.

*Sau đây là một số dạng toán thường gặp*

**I. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH VÀ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG CỐ ĐỊNH.**

**1. Phương pháp giải.**

* Để chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng ta chứng minh hai véc tơ  và  cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho: .
* Để chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định ta đi chứng minh ba điểm A, B, H thẳng hàng với H là một điểm cố định.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi có hai số thực , có tổng bằng 1 sao cho: .

***Lời giải***

\* Nếu A, B, M thẳng hàng 

. Đặt  và

.

\* Nếu  với 

Suy ra M, A, B thẳng hàng.

***Ví dụ 2:*** Cho góc xOy . Các điểm A, B thay đổi lần lượt nằm trên Ox, Oy sao cho . Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.

**Định hướng:** Ta có hệ thức vectơ xác định điểm I là (\*)

Từ *ví dụ 1* ta cần xác định hai điểm cố định A', B' sao cho  với . Do đó từ hệ thức (\*) ta nghĩ tới việc xác định hai điểm cố định A', B' lần lượt trên Ox, Oy

Ta có . từ đó ta cần chọn các điểm đó sao cho . Kết hợp với giả thiết  ta chọn được điểm A' và B' sao cho .

***Lời giải***

Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A', B' sao cho .

Do I là trung điểm của AB nên 

Ta có 

Do đó điểm I thuộc đường thẳng A'B' cố định.

***Ví dụ 3:*** Cho hình bình hành , I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn . Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

**Định hướng:** Để chứng minh D, E, I thẳng hàng ta đi tìm số k sao cho

, muốn vậy ta sẽ phân tích các vectơ  qua hai vectơ không cùng phương  và  và sử dụng nhận xét "  với  là hai vectơ không cùng phương " từ đó tìm được .

***Lời giải*** (hình 1.35)

Ta có  (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có  suy ra



Hình 1.35



(2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.

***Ví dụ 4:***  Hai điểm *M, N* chuyển động trên hai đoạn thẳng cố định *BC* và *BD* () sao cho 

Chứng minh rằng đường thẳng *MN*  luôn đi qua một điểm cố định.

***Lời giải***

Dễ thấy luôn tồn tại điểm I thuộc MN sao cho .

Gọi H là điểm thỏa mãn  do đó H cố định.

Ta có 





 (theo (1))

 (3)

Do các điểm B, H cố định, nên điểm I cố định.(xác định bởi hệ thức (3))

***Ví dụ 5:*** Cho ba dây cung song song  của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác  nằm trên một đường thẳng.

***Lời giải***

Gọi  lần lượt là trực tâm của các tam giác

Ta có: , 

và 

Suy ra  

Vì các dây cung  song song với nhau

Nên ba vectơ  có cùng phương

Do đó hai vectơ  và cùng phương hay ba điểm  thẳng hàng.

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.101:** Cho tam giác  và các điểm M là trung điểm AB, N thuộc cạnh AC sao cho , P là điểm đối xứng với B qua C. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

**Bài 1.102:** Cho tam giác . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho . Gọi O là giao điểm của CM và BN. Trên đường thẳng BC lấy E . Đặt .

Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

**Bài 1.103:** Cho  lấy các điểm I, J thoả mãn , . Chứng minh rằng IJ đi qua trọng tâm G của .

**Bài 1.104:**Cho tam giác . Hai điểm M, N di động thỏa mãn 

a) Chứng minh rằng MN đi qua điểm cố định.

b) P là trung điểm của AN. Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

**Bài 1.105:** Cho hai điểm M,P là hai điểm di động thỏa mãn . Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

**Bài 1.106.** Cho hình bình hành . Gọi E là điểm đối xứng của D qua điểm A, F là điểm đối xứng của tâm O của hình bình hành qua điểm C và K là trung điểm của đoạn OB. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng và K là trung điểm của EF.

**Bài 1.107:** Cho hai tam giác  và  ;  lần lượt là trọng tâm các tam giác . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác , .

Chứng minh rằng  thẳng hàng và tính .

**Bài 1.108.** Cho tam giác .Các điểm M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho .

Tìm điều kiện của α, β, γ để M, N, P thẳng hàng.

**Bài 1.109:** Cho tứ giác  ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng trung điểm hai đường chéo AC, BD và tâm O thẳng hàng.

**Bài 1.110**: Cho lục giác  nội tiếp đường tròn tâm O thỏa mãn . Về phía ngoài lục giác dựng các tam giác  đồng dạng và cân tại M, N, P, Q, R, S. Gọi  lần lượt là trọng tâm tam giác  và . Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

**Bài 1.101:** Ta chứng minh  M, N, P thẳng hàng.

**Bài 1.102:**  Ta có: 



A, E, O thẳng hàng 



Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 1.103:**  

Suy ra I, J, G thẳng hàng.

**Bài 1.104:** a) Gọi G là trọng tâm tam giác  suy ra



Suy ra  thẳng hàng hay MN đi qua điểm cố định G.

b) P là trung điểm AM 

Gọi I là trung điểm BC, J là trung điểm AI suy ra 

Do đó  suy ra MP đi qua điểm cố định J.

**Bài 1.105:**  Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  suy ra 

Do đó 

Vậy MP đi qua điểm cố định I.

**Bài 1.106:** Ta có: , 

. Vì vậy K là trung điểm EF

**Bài 1.107:** Vì  là trọng tâm tam giác  suy ra 



Tương tự  là trọng tâm tam giác  suy ra 



Mặt khác 

Mà  lần lượt là trọng tâm các tam giác 

Suy ra 

Do đó 



Vậy 

**Bài 1.108:** Ta có:



Ta có:  Và



Để M, N, P thẳng hàng thì ta phải có

.

**Bài 1.109:** Gọi P, Q, R, S lần lượt là các tiếp điểm của các đoạn thẳng AB,BC,CD,DA đối với đường tròn tâm O. Đặt .

Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác  ta có:

  
Suy ra O, M, N thẳng hàng (đpcm)

**Bài 1.110:** Gọi  lần lượt là hình chiếu của  lên . Suy ra  lần lượt là trung điểm của 

Ta có 





( Vì theo định lí con nhím thì )

Mặt khác  suy ra 

Do đó 



Hay ba điểm  thẳng hàng.

**II. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.**

**1. Phương pháp giải.**

* Để chứng minh đường thẳng AB song song với CD ta đi chứng minh  và điểm A không thuộc đường thẳng CD.
* Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể chứng minh theo hai hướng sau:

+ Chứng minh mỗi đường thẳng cùng đi qua một điểm cố định.

+ Chứng minh một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho ngũ giác . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ.



Hình 1.36

Chứng minh rằng IJ song song với AE

***Lời giải*** (hình 1.36)

Ta có 



Suy ra IJ song song với AE

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác ABC.Các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn ,  thì AM, BN, CP đồng quy tại O, với O là điểm được xác định bởi 

***Lời giải***

Ta có 



Suy ra M, O, A thẳng hàng hay AM đi qua điểm cố định O

Tương tự ta có BN, CP đi qua O

Vậy ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy

***Ví dụ 3:*** Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi  là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và  là tam giác có ba đỉnh còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn  khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác  và  đồng quy.

**Định hướng.** Giả sử sáu điểm đó là *A, B, C, D, E, F*.

Ta cần chứng minh tồn tại một điểm *H* cố định sao cho với các cách chọn  khác nhau thì *H*  thuộc các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác  và . Nếu  là tam giác *ABC* thì  là tam giác *DEF*. Gọi *G* và *G*' lần lượt là trọng tâm của tam giác *ABC* và tam giác *DEF*.

*H* thuộc đường thẳng  khi có số thực *k* sao cho 



Vì vai trò của các điểm *A, B, C, D, E, F*  trong bài toán bình đẳng nên chọn *k* sao cho  khi đó 

***Lời giải***

Gọi H là trọng tâm sáu điểm A, B, C, D, E, F khi đó



Giả sử  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  suy ra



Suy ra





Do đó GG' đi qua điểm cố định H do đó các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác  và  đồng quy.

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.111:** Cho tứ giác , gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD. Chứng minh rằng hai đường thẳng KL và AD song song với nhau

**Bài 1.112:** Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác  lần lượt lấy các điểm  sao cho . Trên các cạnh  lần lượt lấy các điểm  sao cho . Chứng minh rằng tam giác  có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của tam giác .

**Bài 1.113:** Trên đường tròn cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua trọng tâm của ba trong năm điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm còn lại. Chứng minh rằng mư­ời đường thẳng nhận được cắt nhau tại một điểm.

**Bài 1.114.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC. Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét về điểm đồng quy và hai điểm I, O (I là giao điểm của MP và NQ).

**Bài 1.115:** Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi  là một tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng . Chứng minh rằng với các cách chọn  khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm tam giác  và trung điểm đoạn thẳng  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 1.116:** Cho tam giác . Ba đường thẳng x, y, z lần lượt đi qua A, B, C và chúng chia đôi chu vi tam giác .

Chứng minh rằng x, y, z đồng quy .

**Bài 1.117:** Cho tam giác ABC, các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.Chứng minh AM, BN, CP cùng đi qua một điểm, xác định điểm đó.

**Bài 1.118 :** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA

a) Gọi G là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh rằng 

b) Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy tại điểm G.

**Bài 1.119:** Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là một điểm tùy ý. Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) Các đường thẳng  đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường

b) M, G, O thẳng hàng và .

**Bài 1.120:** Cho tam giác . Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác  với các cạnh . Gọi  là đường thẳng đi qua trung điểm PN và vuông góc với BC,  là đường thẳng đi qua trung điểm PM và vuông góc với AC,  là đường thẳng đi qua trung điểm MN và vuông góc với AB. Chứng minh rằng  và  đồng quy.

**Bài 1.121**: Cho hai hình bình hành  và  sắp xếp sao cho B' thuộc cạnh AB, D' thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.

**Bài 1.111:**  Ta có  và 

Trừ vế với vế ta được

Suy ra KL//AD

**Bài 1.112:** , vì  và  nên 

Tương tự ta có  và 

**Bài 1.113:**  Giả sử năm điểm đó là  nằm trên đường tròn (*O*). Ta cần chứng minh tồn tại điểm *H* thuộc mười đường thẳng đó.

Gọi *G* là trọng tâm của tam giác ; *P* là trung điểm của đoạn thẳng *.*Vì (do ) nên điểm *H* thuộc đường thẳng đi qua *G* và vuông góc với đường thẳng  khi có số thực *k* sao cho . Mà  (vì *G* là trọng tâm của tam giác ). (vì *P* là trung điểm của đoạn thẳng )

Do đó 

Hay

Vì các điểm  trong bài toán có vai trò bình đẳng nên chọn *k* sao cho 

Khi đó 

Hay  (*G* là trọng tâm của hệ điểm ).

**Bài 1.114:** Ta cần chứng minh tồn tại điểm *H* thuộc đường thẳng *MM',* *NN', PP', QQ'*.

Vì *OP* *CD* (do *OC = OD*) nên điểm *H* thuộc đường thẳng *MM'* khi có số thực *k* sao cho .

Mà *M* và *P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD* nên



Do đó  Hay 

Vì các điểm *A, B, C, D* trong bài toán có vai trò bình đẳng nên chọn 

Khi đó 

Hay  (Dễ thấy *I* là trọng tâm của tứ giác *ABCD*)

Vậy *H* là điểm đối xứng của *O* qua *I*.

**Bài 1.115:** Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác  và DE là đoạn thẳng . Gọi G là trọng tâm tam giác  và M là trung điểm của DE thì với điểm O tùy ý ta có 

Do đó GM luôn đi qua điểm cố định O là trọng tâm hệ điểm A, B, C, D, E.

**Bài 1.116:** Hướng dẫn :

Đặt 

Giả sử đường thẳng x đi qua A cắt BC tại M khi đó ta có





Suy ra 

Do đó : 

Tương tự ta có :

 Do đó x, y, z đồng quy tại I được xác định bới 

**Bài 1.117:** Giả sử đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc BC tại M.

Gọi B’,C’ là tiếp điểm của cạnh AB,AC với đường tròn bàng tiếp góc A

Khi đó 

Đến đây tương tự **bài 1.116**.

**Bài 1.118:** a) Ta có: 



b) ; 

 cùng phương hay AA­1 đi qua G

Tương tự ta có BB­1 đi qua G; CC­1 đi qua G; DD­1 đi qua G

Vậy ta có  đồng quy tại G

**Bài 1.119:** a) Gọi O là trung điểm CC­1



 (vì  hình bình hành)  hay O là trung điểm AA1

Tương tự ta có  hay O là trung điểm BB1

Vậy  đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường

b) Ta có: 



 M, G, O thẳng hàng và 

**Bài 1.120:** Đặt 

Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của NP, PM, MN.

O là điểm được xác định 

Suy ra 

Suy ra , tương tự ta có 

Suy ra  và  đồng quy tại O.

**Bài 1.121:**  Đặt . Gọi I là giao điểm BD' và DB'

Ta có 

Do đó ;



Suy ra 

Suy ra I, C', C thẳng hàng đpcm

**III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.**

**1. Phương pháp.**

Phân tích vectơ qua hai vectơ không cùng phương và sử dụng các kết quả sau:

Cho  là hai vectơ không cùng phương khi đó

* Với mọi vectơ  luôn tồn tại duy nhất các số thực  sao cho 
* 
* Nếu  và  là hai vectơ cùng phương thì 

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho . Gọi O là giao điểm của CM và BN.

Tính tỉ số  và 



Hình 1.37

***Lời giải*** (hình 1.37)

Giả sử ; 

Ta có 

;

Và 



Vì  chỉ có một cách biểu diễn duy nhất qua  và  suy ra

.

Vậy  và .

***Ví dụ 2:*** Cho hình bình hành . M thuộc đường chéo AC sao cho . Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho . Gọi N là giao điểm của AQ và CP.

Tính tỉ số  và  theo .

***Lời giải*** (hình 1.38)

Đặt , ta có:  




Hình 1.38





Vì  nên 

Mặt khác 



Vì  nên



Từ (1) và (2) ta suy ra: .

Do đó  và 

***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trung tuyến AM. Trên cạnh AB và AC lấy các điểm B’ và C’ . Gọi M' là giao điểm của B'C' và AM. Chứng minh: .

***Lời giải*** (hình 1.39)

Đặt 



Hình 1.39

Vì 









Hay  đpcm.  
**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.122.** Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC ta lấy các điểm M, N sao cho

. Gọi I là giao điểm của AN và CM

Tính tỉ số  và 

**Bài 1.123:** Cho tam giác  và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song AC.

Tính 

**Bài 1.124:** Cho  có . Phân giác trong AD của góc  cắt trung tuyến BM tại I. Tính 

**Bài 1.125:** Cho tam giác , trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: , , gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích  biết diện tích  bằng 1.

**Bài 1.126:** Cho hình bình hành . Gọi M, N lần lượt là nằm trên cạnh AB, CD sao cho , G là trọng tâm tam giác  và AG cắt BC tại I. Tính 

**Bài 1.127:** Cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N. Biết , tính  .

**Bài 1.128**. Cho tam giác . M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho . Một đường thẳng cắt các cạnh  lần lượt tại  phân biệt. Chứng minh rằng 

**Bài 1.129:** Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng minh rằng 

**Bài 1.122:**  Đặt 

Ta có: 



Vì M, I, C thẳng hàng nên ta có:.

Tương tự: .

**Bài 1.123:** Ta đặt:  .Khi đó . Vì E nằm ngoài đoạn thẳng AC nên có số k sao cho , với . Khi đó 

Điểm D nằm trên AM và EF nên có hai số x và y sao cho: 

Hay 

Vì hai vectơ  không cùng phương nên  và .

Suy ra, do đó 

Ta có:  =

Chú ý rằng vì  hay  suy ra 

Do đó 

**Bài 1.124:** Ta có: 

 (1)

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra



**Bài 1.125:** Vì A, O, N thẳng hàng nên: 

Tương tự: 

 hay  (1)

Đặt  ,  , Ta có : 

Thay vào (1) ta có: 



Từ đó ta có: 

Với  

 hay.

Vì 

**Bài 1.126:** Đặt 

Ta có 

Mặt khác G là trọng tâm tam giác  suy ra



Vì  cùng phương nên 

**Bài 1.127:**  Ta có 

Vì  cung phương nên có số thực k sao cho 

Đặt , ta có 

Suy ra 

**Bài 1.128:** Ta có 

Đặt 

Ta có 





Mặt khác ,  cùng phương nên 

Hay 

**Bài 1.129:** (hình 1.56) Đặt 

Ta có:  (1)



Hình 1.56

Do:  cùng phương nên



Mặt khác

Suy ra 

Từ (1) và (2) suy ra: 