**CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG HỆ THỨC VI-ÉT**

**A. Lý thuyết**:

 + Nếu x1, x2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai ax2 + bx + c = 0 thì

 ***S = x1 +x2 = P = x1.x2 = ***

 + Nếu hai số x1 , x2  có tổng x1 + x2 = S và tích x1x2 = P thì hai số đó là các nghiệm của phương trình X2 - SX + P = 0 (Định lý Viét đảo)

**B. Nội dung:**

Vận dụng Định lý Viét và Viét đảo ta chia làm các dạng bài tập sau:

***Dạng 1:* Nhẩm** **nghiệm của phương trình bậc hai**

+ Nếu phương trình ax2 + bx + c = 0 (a khác 0) có a + b + c = 0 thì phương trình có một nghiệm là x1= 1, còn nghiệm kia là x2 = 

+ Nếu phương trình ax2 + bx + c = 0 (a khác 0) có a - b + c = 0 thì phương trình có một nghiệm là x1= -1, còn nghiệm kia là x2 = -

***Ví dụ 1:*** Không giải phương trình hãy nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) 3x2 - 5x + 2 = 0

b) -7x2 - x + 6 = 0

**Giải**:

1. Ta có a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0

 nên phương trình có hai nghiệm x1 = 1, x2 =  = 

1. Ta có a - b + c = -7 +1 + 6 = 0

 nên phương trình có hai nghiệm x1= -1, x2 = -  = 

**Trong trường hợp phương trình có nghiệm nguyên đơn giản ta có thể nhẩm nghiệm theo hệ thức Viét, xét ví dụ sau:**

***Ví dụ 2***: Nhẩm nghiệm của phương trình sau

 a) x2 - 7x + 10 = 0 b) x2 + 6x +8 = 0

**Giải:**

 a) Nếu phương trình có nghiệm x1, x2 thì theo hệ thức Viét ta có:

 x1+ x2 = 7 và x1x2 = 10 ta nhẩm được hai nghiệm là x1= 2, x2 = 5

 b) Tương tự như câu a) ta có x1 + x2 = -6 và x1x2 = 8 nên x1 = -2, x2 = -4

***Dạng 2:*** **Tìm điều kiện của tham số khi biết một nghiệm của phương trình đã cho**

***Ví dụ1:***  Cho phương trình 2x2 - px + 5 = 0.

 Biết phương trình có một nghiệm là 2. Tìm p và tìm nghiệm còn lại

**Giải:**

 ***Cách 1***: Thay x = 2 vào phương trình ta được p =  . Theo hệ thức Viét ta có

 x1x2 =  mà x1= 2 nên x2 = 

 ***Cách 2***: Vì phương trình có nghiệm nên theo hệ thức Viét ta cóx1 x2 =  mà x1 = 2 nên x2 = .

 Mặt khác x1+ x2 =  ⇒ = 2 +  ⇒ p = 

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình x2 + mx - 3 = 0.

 Biết phương trình có một nghiệm là 3. Tìm m và tìm nghiệm còn lại

**Giải:**

 Tương tự như ví dụ trên ta tìm được m = -2 và nghiệm còn lại là x = -1

***Dạng 3*: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

 Phương trình bậc hai ax2 + bx + c = 0 nếu có nghiệm thoả mãn:

a) P < 0 thì hai nghiệm đó trái dấu

b) P > 0 và S > 0 thì hai nghiệm đều dương

c) P > 0 và S < 0 thì hai nghiệm đều âm

***Ví dụ1*** : Không giải phương trình xét dấu các nghiệm của các phương trình sau:

 a) x2 - 2 x + 4 = 0 b) x2 + 5x - 1 = 0

 c) x2 - 2x + 1 =0 d) x2 + 9x + 6 = 0

**Giải:**

 a) Ta có Δ '= -1 < 0 nên phương trình vô nghiệm

 b) Ta có P < 0 nên phương trình có hai nghiệm trái dấu

 c) Ta có Δ' = 2; S = 2 > 0; P = 1 > 0 nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

 d) Ta có Δ =57; S = -9 < 0; P = 6 > 0 nên phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

***Ví dụ 2:*** Tìm điều kiện của m để phương trình sau: 2x2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0

 a) Có hai nghiệm khác dấu

 b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

 c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

 d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

**Giải**:

 a) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi P < 0 hay m - 1 < 0 ⇔ m < 1

 b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi

 

 c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương khi

  không có giá trị nào của m thoả mãn

 d) Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu

 nhau hay phương trình có hai nghiệm đối nhau .

 Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi

  ⇔ 1 - 2m = 0 ⇔ m = 

 ***Điều cần chú ý ở đây*** là khi Δ < 0 thì không cần xét dấu các nghiệm của phương trình vì phương trình vô nghiệm.

Khi P < 0 thì kết luận ngay phương trình có hai nghiệm trái dấu vì Δ > 0

Khi P > 0 ta phải xét đến hai yếu tố còn lại là Δ và S

***Dạng 4:*** **Tính giá trị của biểu thức chứa các nghiệm của phương trình đã cho**

***Ví dụ 1***: Cho phương trình x2+ mx + 1 = 0 ( m là tham số)

 Nếu phương trình có nghiệm x1, x2 . Hãy tính giá trị biểu thức sau theo m:

 a) x12 + x22

 b) x13 + x23

 c) 

**Giải**:

Vì phương trình có nghiệm x1, x2 nên theo hệ thức Viét ta có:

 x1+ x2 = -m và x1.x2 = 1

 a) x12 + x22 = (x1 +x2)2 - 2x1x2 = m2 - 2

 b) x13 + x23 = (x1+x2)3 - 3x1x2(x1+ x2) = -m3+ 3m

 c) (x1 - x2)2 = (x1 +x2)2 - 4x1x2 = m2- 4 nên  = 

***Ví dụ 2***: Cho phương trình

 x2- 4x + 1 = 0 . Tính giá trị của biểu thức

  ( với x1 là một nghiệm của phương trình đã cho)

**Giải:**

Ta phải biến đổi biểu thức dưới căn bậc hai thành dạng (5x1+a)2 để đưa A về dạng A=

Bằng cách xét dấu nghiệm của phương trình đã cho chứng tỏ 5x1+ a > 0 từ đó tính được giá trị của A. Sau đây là cách biến đổi cụ thể:

 Vì x1 là nghiệm của phương trình đã cho nên : x12 = 4x1-1 ⇒ x14 = 16x12 - 8x1+ 1

 

Phương trình đã cho có Δ' > 0 nên theo hệ thức Viét ta có: 

 ⇒ x1 > 0 ⇒ 5x1+ 2 > 0 ⇒ A =2

***Ví dụ 3***: Cho phương trình x2 + x - 1 = 0 và x1,x2 là nghiệm của phương trình (x1 < x2) .

Tính giá trị của biểu thức

**Giải:**

Từ giả thiết ta có: x12 = 1 - x1⇒ x14 = x12 -2x1 + 1=(1 - x1) - 2x1 + 1=- 3x1 + 2 ⇒ x18 = 9x12 - 12x1+ 4

 ⇒  =

Vì P < 0 nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu mà x1< x2 nên x1< 0

 Vậy B =  = 5 - x1+ x1 = 5

***Dạng 5***: **Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức nào đó**

***Ví dụ 1***: Tìm m để phương trình x2 + 2x + m = 0 (m là tham số) có hai nghiệm x1, x2 thoả mãn

 a) 3x1 + 2x2 = 1

 b) x12 -x22 = 6

 c) x12 + x22 = 8

**Giải:**

 Để phương trình có nghiệm thì Δ' 0 ⇔ m1

a) Kết hợp hệ thức Viét ta có hệ:

  Giải hệ (1), (2) ta được x1= 5; x2= -7

 Thay vào (3) ta được m = -35 (thoả mãn điều kiện)

b) Kết hợp hệ thức Viét ta có hệ:

  Giải hệ (1), (2) ta được x1= ; x2 = 

 Thay vào (3) ta được m = - (thoả mãn điều kiện)

c) x12 + x22 = (x1+ x2)2 - 2x1x2 ⇒ 4 - 2m = 8 ⇒ m = -2 (thoả mãn)

***Ví dụ 2***: Tìm m để phương trình x2 - mx + 3 = 0 (m là tham số) có hai nghiệm thoả mãn 3x1+ x2 = 6

**Giải:**

 Để phương trình có nghiệm thì Δ  0 hay m2 - 12  0 ⇔ m 2 hoặc m  -2

Kết hợp với hệ thức Viét ta có

  giải hệ (1), (2) ta được x1= ; x2 = 

Thay vào (3) ta được (6 - m)(3m - 6) = 12 giải ra ta được m = 4 (thoả mãn)

***Ví dụ 3***: Giả sử x1, x2 là nghiệm của phương trình x2 + 2mx + 4 = 0.

Xác định m để x14 + x24  32

**Giải**:

 Để phương trình có nghiệm thì Δ'  0 hay m2 - 4  0 ⇔ 

Ta có: x14 + x24 = (x12 + x22)2 - 2x12x22 = 

Theo hệ thức Viét ta có:  nên x14 + x24  32 ⇔ (4m2 - 8)2 - 32  32

 ⇔ 

Kết hợp với điều kiện Δ'  0 ta được m = 2 hoặc m = -2

***Dạng 6***: **Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số**

***Ví dụ1*** : Cho phương trình x2 - 2(m + 1) x + m2 =0

 a) Tìm m để phương trình có nghiệm

 b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

**Giải**:

 a) Ta có Δ' = (m + 1)2 - m2 = 2m + 1 Phương trình đã cho có nghiệm ⇔ Δ'  0 ⇔ m - 

 b ) Theo hệ thức Viét ta có 

 Từ (1) ta có m =  thay vào (2) ta được 

 hay 4x1x2 = (x1 + x2 - 2)2 là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

 **Cách giải chung của dạng này là theo hệ thức Viét ta có hai biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình. Từ một trong hai biểu thức ta rút m theo hai nghiệm, sau đó thế vào biểu thức còn lại ta được biểu thức cần tìm.**

 Tuy nhiên có thể dùng cách biến đổi tương đương để khử m từ hai phương trình, ta xét tiếp vd sau:

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình mx2 - 2(m - 3)x + m+ 1 = 0 (m là tham số )

Biết phương trình luôn có hai nghiệm, tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

**Giải** :

 Do phương trình luôn có hai nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có:

 

 Ta có (2) ⇔ 6x1x2 = 6 +  (3). Cộng vế theo vế của (1) và (3) ta được x1 + x2 + 6x1x2 = 8.

Vậy biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m là: x1 + x2 + 6x1x2 = 8

***Dạng 7:*** **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất, chứng minh bất đẳng thức của biểu thức nghiệm**

***Ví dụ 1:*** Cho phương trình x2 - 2(m - 1)x + m - 5 = 0 với m là tham số

Gọi x1, x2 là hai nghiệm của phương trình trên. Với giá trị nào của m thì biểu thức A = x12 + x22 đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

**Giải:**

Ta có Δ' = (m - 1)2 -(m - 5) = m2 - 3m + 6 > 0 nên phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m

Theo hệ thức Viét ta có: x1+ x2 = 2(m - 1) và x1x2 = m - 5

 ⇒ x12+ x22 = (x1+x2)2 - 2x1x2 = 4(m - 1)2 - 2(m - 5)

 = 4m2 - 10m +14 = 

Dấu bằng xẩy ra khi m = . Vậy Amin =  khi m = 

***Ví dụ 2***: Cho phương trình x2 - mx + m - 1= 0 với m là tham số.

 Gọi x1, x2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

 

**Giải**:

 Ta có Δ= m2 -4(m - 1) = (m - 2)2 0 nên phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

Theo hệ thức Viét ta có: x1+ x2 = m và x­1x2 = m - 1

 ⇒ x12+x22 =(x1+x2)2 - 2x1x2 = m2 -2m + 2 . Thay vào ta có

  = 

 Đặt t = ta có tm2 - 2m + 2t - 1 = 0 (1)

Nếu t = 0 thì m = 

Nếu t 0 thì phương trình (1) là phương trình bậc hai đối với m. Ta có :

 Δ' = 1 - t(2t - 1) 0 ⇔ -2t2+ t + 1  0

 ⇔ (t - 1)(-2t - 1)  0 ⇔ 

 t = -  khi m = -2 ; t =1 khi m = 1

Vậy Cmin­ =  khi m = -2; Cmax= 1 khi m = 1 ***Hoặc*** ta chứng minh C - 1 0 và C +   0

***Ví dụ 3:*** Giả sử x1, x2  là nghiệm của phương trình 2008x2 - (2008m - 2009)x - 2008 = 0

 Chứng minh A= 

**Giải**: Theo hệ thứcViet ta có: x1 + x2 =  và x1x2 = -1

nên A = 6(x1 - x2)2 = 6( (x1 + x2)2 + 4)  24

***Ví dụ 4:*** Gọi x1 , x2 là hai nghiệm của phương trình x2 - 18x + 1= 0 .

 Đặt Sn = x1n + x2n ( n N) . Chứng minh:

 a) Sn+2 = 18 Sn+1 - Sn

 b) Sn nguyên dương và Sn không chia hết 17 với mọi n là số tự nhiên.

**Giải:**

a) Vì x1 , x2 là nghiệm phương trình x2 - 18x + 1 = 0 nên theo hệ thức Viét ta có:

 x1 + x2 = 18 và x1x2 = 1

Ta có: Sn+2 = x1n+2 + x2n+2 và Sn+1 = x1n+1 + x2n+1

 x1n(x12 - 18x1 + 1) + x2n(x22 - 18x2 + 1) = 0

hay x1n+2 + x2n+2 - 18(x1n+1 + x2n+1) - (x1n + x2n) = 0 ⇒ Sn+2 = 18 Sn+1 - Sn­

b) Ta c ó: S1 = 18 , S2 = x12 + x22 = (x1+ x2)2 - 2x1x2 = 182 - 2 = 322

 mà Sn+2 = 18 Sn+1 - Sn­ nên Sn nguyên dương với mọi n là số tự nhiên.

Tương tự câu a) ta có: Sn+3 = 18Sn+2 - Sn+1 = 17Sn+2 + Sn+2 - Sn+1

 = 17Sn+2 + (18Sn+1 - Sn) - Sn+1 = 17(Sn+2 + Sn+1) - Sn

mà S1 = 18, S2 = 322, S3 = 5778 không chia hết cho 17 nên S4 , S5,…. đều

không chia hết cho 17 ⇒ S­n không chia hết cho 17với mọi n là số tự nhiên.

***Dạng 8:***  **Ứng dụng hệ thức Viét đảo vào bài tập**

***Ví dụ 1:*** Tìm hai số x và y biết

 a)  b) 

**Giải:**

a) Đặt S = x + y; P = xy ta có hệ

  ⇔ 

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình X2 - 3X + 2 = 0

Giải phương trình ta được x1 = 1; x2 = 2 . Vậy (x ; y) 

b) Đặt S = x - y; P = xy ta có hệ

 

Suy ra x + (-y) = 2 và x(-y) = -15 hay x và -y là nghiệm của phương trình

 X2 - 2X - 15 = 0 giải ra ta được x1 = 3; x2 = -5

 Vậy (x ; y) 

**Thực chất dạng này được ứng dụng vào giải hệ đối xứng hai ẩn.**

Ta xét tiếp ví dụ sau

***Ví dụ 2:*** Giải hệ

 a)  b) 

**Giải**:

 a) Đặt S = x + y; P = xy ta có hệ

  S = 2 , P = 0 hoặc S = -3; P = 5

Suy ra x, y là nghiệm phương trình X2 - 2X = 0 hoặc X2 + 3X + 5 =0

 Vậy (x ; y) 

 b) Đặt x2 + x = S; y2 - 2y = P ta đưa về hệ đối xứng hai ẩn sau:

  suy ra S, P là nghiệm phương trình X2 - X - 2 = 0

 Giải ra ta được x1= -1; x2 = 2

 Từ đó ta có  hoặc  Vậy (x ; y) 

**Hệ thức Viét đảo còn được ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức, vận dụng vào các bài toán chứng minh khác** . Ta xét các ví dụ sau

***Ví dụ 3***: Cho ba số a, b, c thoả mãn điều kiện sau:

 a > 0, a2 = bc, a + b + c = abc. Chứng minh rằng: a , b > 0, c > 0 và b2 + c2  2a2

**Giải:**

 Từ a + b + c = abc ⇒ b + c = a(bc - 1) = a( a2 - 1) mà bc = a2 nên b, c là nghiệm của phương trình: X2 - (a3 - a)X + a2 = 0

Ta có Δ =(a3 - a)2 - 4a2  0 ⇔ (a2 - 1)2  4 ⇔ a2  3 ⇔ a  ( vì a > 0)

Khi đó b+ c = a( a2 - 1) > 0 và bc = a2 > 0 nên b > 0, c > 0.

***Ví dụ 4***: Cho a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và c 0. Chứng minh rằng nếu hai phương trình x2 + ax + bc = 0 (1) và x2 + bx + ca = 0 (2) có đúng một nghiệm chung thì nghiệm khác của các phương trình đó thoả mãn phương trình x2 + cx + ab = 0

**Giải:**

 Giả sử (1) có nghiệm x0 , x1 và (2) có nghiệm x0 , x2 ( x1x2). Ta có:

  ( a - b)(x0 - c) = 0 ⇒ x0 = c ( vì a b)

 Áp dụng định lý Viét vào phương trình (1) và phương trình (2) ta có:

  và  ⇒ 

Do đó x1, x2 là nghiệm của pt: x2 + cx + ab = 0 ( pt này luôn có nghiệm vì Δ= c2 - 4ab = (a + b)2- 4ab = (a - b)2 > 0)

**C. Bài tập áp dụng:**

Bài tập 1: Không giải phương trình hãy xét dấu các nghiệm của phương trình sau:

 a) x2 - 3x + 4 = 0 b) 2x2 - x + 4 = 0

Bài tập 2: Tìm m để phương trình x4 - mx2 + m -1 = 0 có:

a) Bốn nghiệm phân biệt

b) Ba nghiệm phân biệt

c) Hai nghiệm phân biệt

Bài tập 3: Cho phương trình x2 + 4x + 1 = 0 có hai nghiệm là x1 và x2

 Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là x12 + x22 và x12 - x22.

Bài tập 4: Cho phương trình x2 - mx + 6 = 0

 Tìm m để phương trình có hai nghiệm x1­, x2 thoả mãn

 a) x1 - x2 = 1 b) x12 + x22= 37

Bài tập 5: Cho phương trình x2 - 2(m + 1)x - m = 0

 a) Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm

 b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

 c) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm âm

 d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

 e) Tìm m để  nhỏ nhất.

Bài tập 6: Giải hệ

 a)  b)  c) 

Bài tập 7: Cho phương trình x2 - 3x + 1 = 0. Tính giá trị biểu thức

 A =  (x1 là một nghiệm của phương trình )

Bài tập 8:

Cho pt: x2 - 3x - 1 = 0 với . Tính giá trị biểu thức B = 

Bài tập 9:

Tìm p, q để phương trình x2 + px + q = 0 có các nghiệm x1, x2 thoả mãn:

 

Bài tập 10:

Xác định a để PT x2 + ax + 1 = 0 có nghiệm x1, x2 thoả mãn: 

Bài tập 11:

Giả sử PT ax2 + bx + c = 0 có hai nghiệm dương x1, x2. Chứng minh rằng phương trình cx2 + bx + a = 0 có hai nghiệm dương x3, x4 và x1+ x2 + x3 + x4  4