**CHUYÊN ĐỀ TỨ GIÁC**

Bài 1: Cho HBH ABCD có AB và BD cắt nhau tại O, Gọi d là đường thẳng đi qua A và không cắt đoạn BD, gọi BB’, CC’, DD’ là khoảng cách từ B, C, D đến đường thẳng d, ( B’, C’, D’ nằm trên d)

CMR: BB’ + DD’ = CC’

HD:

Vẽ OO’ d (O’ d)

Khi đó ta có: BB’D’D là hình thang

có OO’ là đường trung bình nên:

2.OO’= BB’ + DD’ (1)

Tương tự ACC’ có OO’ là đường trung bình nên:

2.OO’ = CC’ (2)

Từ (1) và (2) => BB’ + DD’ = CC’

Bài 2: Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, vẽ đường thẳng d đi qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC, Gọi A’, B’, C’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng d

CMR: 

HD:

Gọi H, K lần lượt là giao của d với AB và AC

Lấy N là hình chiếu của M trên đường thẳng d

=> AA’I =MNI ( cạnh huyền- góc nhọn)

=> AA’ = MN

Hình thang BB’C’C có MN là đường trung bình nên:



Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BH, CK, Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng HK,

CMR: DK = EH.



HD:

Gọi M, M’ lầ lượt là trung điểm của BC và DE,

Xét BHC vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên:

 (1)

BKC vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên:

 (2)

Từ (1) và (2) => MH = MK => KM’ = HM’

Vậy DM’ = EM’

Bài 4: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, đường thẳng d không cắt các cạnh của tam giác ABC, Gọi A’, B’, C’, G’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G trên đường thẳng d,

CMR: 

HD:

Gọi M là trung điểm của AC, và D đối xứng với G qua M,

M’ là hình chiếu của M trên d, Khi đó ta có :



=> G là trung điểm của BD

=> GG’ là đường trung bình của hình thang BB’D’D

=> MM’ là đường trung bình của hình thang GG’D’D

Nên:  (1)



=> DD’ + GG’ = AA’ + CC’ => DD’ = AA’ + CC’ - GG’

Thay (1) vào ta được: 2GG’ = BB’ + AA’ + CC’ - GG’

=> 3GG’ = AA’ + BB’ + CC’ => ĐPCM

Bài 5: Cho HBH ABCD và đường thẳng d nằm bên ngoài HBH, Gọi A’, B’, C’, D’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên d,

CMR: AA’+ CC’ = BB’ + DD’

HD:

Vì ABCD là hình bình hành

nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD

O’ là hình chiếu của O xuống d

Khi đó ta có: OO’ là đường trung bình của hình thang AA’C’C

nên: 2OO’ = AA’ + CC’ (1)

Tương tự OO’ là đường trung bình của hình thang DD’B’B

nên: 2.OO’ = DD’ + BB’ (2)

Từ (1) và (2) => AA’ + CC’ = BB’ + DD’

Bài 6: Cho tam giác ABC có trọng tâm G ( G nằm bên trong tam giác), Vẽ đường thẳng d đi qua G, cắt AB, AC, Gọi A’, B’, C’ là hình chiếu của A, B, C trên (d), Khi đó AA’, BB’, CC’ có mỗi quan hệ gì?

HD:

Gọi I trên AG sao cho AI = IG

Kẻ MM’ (d)

Khi đó ta có:

GII’ = GMM’ (cạnh huyền = góc nhọn)

=> II’ = MM’ mà II’ = AA’ => AA’ = 2. MM’

Hình thang BB’C’C có MM’ là đường trung bình nên ta có:

2. MM’ = BB’ + CC’

Nên ta có : AA’ = BB’ + CC’

Bài 7: Cho tam giác ABC, Gọi D là trung điểm cạnh AB, trên BC lấy các điểm E, F sao cho

BE = EF = FC, trên tia đối của tia BA lấy điểm G sao cho BG = BD

CMR: AF, CD, GE đồng quy

HD:

Gọi I là giao điểm của CD và GE

=> E là trọng tâm của DGC => DI = IC

DEC có IF là đường trung bình nên IF // DE

Lại có: DE là đường trung bình ABF => DE // AF

Khi đó A, I, F thẳng hàng hay AF có đi qua I

Bài 8: Cho hình thang ABCD có , Gọi M là 1 điểm nằm trên đáy nhỏ AD, kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N

CMR: MB = MN

HD:

Kẻ DK //AB, chứng minh BDC vuông tại D

=> ,

Gọi H là trung điểm của BN,

Chứng minh MHBN vì BMN vuông



 mà  (1)

Và  (2)

Từ (1) và (2) => 

Mà: 

Vậy HMBN => BMN có MH vừa là đường cao vừa là trung tuyên nên MB = MN

Bài 9: Cho tam giác ABC có góc A tù, AC > AB, H là chân đường cao hạ từ A, về phía trong góc , dựng D và E sao cho AD vuông góc với AB, AD = AB, AE vuông góc với AC và AE = AC, M là trung điểm DE

CMR: A, H, M thẳng hàng

HD:

Dựng HBH DAEF => M là trung điểm AF => AE = DF

Mà AEAC => DFAC

ta có: 

Mà: 

ADF =ABC (c.g.c) =>  và 

Gọi FD cắt BC tại I, cắt AC tại N và AF cắt BC tại H’

=> ,

Hay AF BC tại H

=> A, F, H thẳng hàng => A, H, M thẳng hàng

Bài 10: Cho hình thang ABCD ( AB // CD) tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD, CMR:

a,  b, BC = AB + CD

HD:

a, Giả sử MC cắt AB tại E

Khi đó 

=> CM = EM và CD = AE

Xét BEC có: => BEC cân

Mà BM là đường trung tuyến

=> BM là đường cao

Vậy BM EC

b, Vi BEC cân nên EB = BC => BC = EA + AB = DC + AB

Bài 11: Cho hình thang ABCD ( AB // CD), có , DB là phân giác của góc , Biết chu vi của hình thang là 20cm, Tính mỗi cạnh của hình thang

HD:

Đặt BC= a, ta có ngay:AD = AB = BC = a

Mà: 

Xét BDC có 

Mà Chu vi hình thang là 20 cm nên a + a + a + 2a = 20 => a = 4

Bài 12: Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d, ( AB > BC), Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, vẽ các  đều, Gọi M, N, P, Q, I theo thứ tự là Trung điểm của các đoạn thẳng BD, AE, BE, CD, DE

a, CMR: 3 điểm I, M, N thẳng hàng b, CMR: 3 điểm I, Q, P thẳng hàng

c, CMR: MNPQ là thình thang cân d, 

HD:

a, Dễ thấy AD // BE

IN là đường trung bình ADE => IN // AD

IM là đường trung bình DBE => IM // BE // AD

=> 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b, Chứng minh tương tự

c, Trong AEB có NP là đường trung bình => NP // (d)

Tương tự MQ // (d) => MQ // NP

=> ,

Chứng minh tương tự ta có: 

d, Vì MNPQ thang cân => NQ = MP, Mà MP là đường trung bình BED nên:



Bài 13: Cho hình thang ABCD ( AB // CD), Gọi E là giao điểm của AD và BC, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, BE, AC, BD,

CMR: MNPQ là hình thang

HD:

Dễ dạng chứng minh được MN // AB

Gọi R là trung điểm của AD khi đó ta có: RQ // AB

RP // DC // AB

Nên RP // AB => R, Q, P thẳng hàng => PQ / / AB

Vậy MNPQ là hình thang

Bài 14: Cho tứ giác ABCD, Gọi P, Q theo thứu tự là trung điểm của AD và BC

a, CMR: 

b, Tứ giác ABCD là hình thang khi và chỉ khi 

HD:

a, Tự chứng minh

b, Ta chứng minh ABCD là hình thang => 

Thật vậy : ADC có pR là đường trung bình =>  (1)

RQ là đường trung bình  ABC =>  (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được : 

Ta chứng minh nếu  thì ABCD là hình thang

Thật vậy  => 3 điểm P, Q, R thẳng hàng,

Mà : PQ // DC và RQ // AB => AB // CD => ABCD là hình thang

Bài 15: Cho  đều, Trên tia đối của tian AB, lấy D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD=AE, Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của BE, AD, AC, AB, CMR:

a, Tứ giác BCDE là hình thang cân b, Tứ giác CNEQ là hình thang

c,  là tam giác đều

HD:

a, AED đều => 

Lại có 2 đường chéo bằng nhau => là hình thang cân

b, ABC đều => CQAD

AED đều => EN AD => CQ // En => là hình thang

c, Ta có: NP là đường trung bình => 

Xét BEP có , MP là đường trung tuyến => 

Xét ENB có  và MN là đường trung tuyên => 

Vậy NMP có 3 cạnh bằng nhau nên là tam giác đều

Bài 16 : Cho tam giác ABC đều, M là điểm nằm trong tam giác, Đường thẳng qua M và // với BC cắt AB ở D, đường thẳng qua M và // với AC cắt BC tại E,đường thẳng qua M và // với AB cắt AC ở F, CMR :

a, Tứ giác : ADMF, BDMF, CFME là các hình thang cân

b, 

HD:

a, Vì ABC đều => 

và  ( đồng vị)

=> hình thang ADMF có hai góc ở đáy bằng nhau

Nên ADMF là hình thang cân

Các hình thang còn lại CMTT

b, Ta có:

MA=DF. MB=DE, MC=EF

Xét  DEF => ( Bất đẳng thức trong tam giác)

Bài 17 : Cho tứ giác ABCD, có : 

CMR : ABCD là hình thang cân

HD:

Vẽ 

=> ABM =CBN ( cạnh huyền- góc nhọn)

=> BM =BN

=> BD là tia phân giác góc 

Mà  ABD cân => AB// DC=>  => 

Vậy ABCD là hình thang cân

Bài 18 : Cho tam giác ABC vuông tại A, Vẽ AH vuông góc với BC tại H, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH CH, CMR :

MN vuông góc với AB và BM vuông góc với AN

HD:

Vì MN là đường trung bình

=> MN//AC mà AC AB

=> MN AB=> M là trực tâm của ABN

ABN có M là trực tâm => BM AN

Bài 19 : Cho tứ giác ABCD có AD = BC, đường thẳng đi qua trung điểm M và N của các cạnh AB và CD cắt AD và BC lần lượt ở E và F, CMR :

HD :

Gọi I là trung điểm của BD

Ta có: MI, NI lần lượt là đường trung bình

=> => IMN cân

=>  ( đồng vị )

và  ( so le trong)

Vậy 

Bài 20 : Cho hình thang ABCD, (AB<CD), GỌi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BD, AC, đường thẳng vuông góc với MN tại N và đường thẳng vuông góc với MP tại P cắt nhau tại E, CMR: EC = ED

HD:

Gọi Q là trung điểm của CD

MN là đường trung bình => 

PQ là đường trung bình => 

Chứng minh tương tự => MNPQ là hình bìn hành

Bài 21: Cho tam giác ABC có BC = a, các đường trung tuyến BD, CE, lấy các điểm M, N trên các cạnh BC sao cho BM=MN=NC, GỌi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE, Tính IK

HD:

Vì DN là đường trung bình của  ACM => DN // AM

BDN có: => I là trung điểm của BD

Chứng minh tương tự=> K là trung điểm của EC

Kéo dài IK cắt AB và AC lần lượt tại G và H

Khi đó  BED có GI đi qua trung điểm I của BD và // ED

nên GE=GBCED có KH đi qua trung điểm K của EC và // ED

nên HD=HC

Khi đó ta có: 

Còn 

Nên IK= GH - GI- HK=

Vậy 

Bài 22: Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H, M là trung điểm của BC, qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F

a, Trên Tia đối tia HC, lấy điểm D sao cho HD=HC, CMR E là trực tâm của tam giác DBH

b, CMR: HE=HF

HD:

a, Ta có MH là đường trung bình BCD

=> MH// BD,

Mà EF // MH => EF BD

Ta lại có: BADH => BDH có E là trực tâm

b, Gọi G là giao điểm của DE và BH

=> K là giao điểm BH và AC

=> DHG = CHK ( cạnh huyền - góc nhọn) => HG =HK

=> HGE =  HKF ( c. g. c) => HE= HF

Bài 23: Cho hình thang ABCD, có  và BC=2AB=2AD, gọi M là 1 điểm trên dây nhỏ AD, Kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N, CMR: MB =MN

HD:

Kẻ DK // AB, CMRBDC vuông tại D

=> 

Gọi H là trung điểm của BN,

=> MH BN vì BMN vuông

=> => MH= DH

, Mà 

và => 

Mà: 

Vậy HM BN

Bài 24: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các đường cao BD và CE, gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng ED, CMR: IE=DK

HD:

Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MN ED

Tứ giác BIKC là hình thang => NI= NK (1)

BEC vuông có EM =. BC

 BDC vuông có DM =. BC => EM =DM

=> EDM cân có MN đường cao và là trung tuyến

=> NE = ND (2)

Từ (1) và (2) => IE= DK

Bài 25: Cho hình thang ABCD (AB//CD), Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của BD và AC, Vẽ đường thẳng đi qua E và vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC, cắt nhau tại I, CMR: IC=ID

HD:

Gọi N là trung điểm của DC

=> FN là đường trung bình của ADC

=> 

Chứng minh tương tự:

 => I là trực tâm

=> IN  EF, mà EF // DC => IN  DC

IDC có IN vừa trung tuyến vừa đường cao => IDC cân => ID=IC

Bài 26: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó, trên cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ hai tia Ax và By vuông góc với AB, Một góc vuông đỉnh O cắt Ax tại C, cắt By tại D

a, AC+BD=CD b, CO là tia phân giác của 

HD

a, Gọi I là trung điểm của CD

AC// BD => OI là trung bình của hình thang ABCD

=> 

=> 

Lại có  COD vuông => OI là đường trung tuyến

=> OI= CI= ID=> 2OI = IC +ID = CD

b, ta có  OCD vuông tại O có OI là đường trung tuyến nên OI = IC

=>  IOC cân tại I=> 

Mà:  Nên =>  vậy OC là tia phân giác góc 

Bài 27: Cho ABC nhọn, trong đó , Lấy D là điểm bất kì trên BC, gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB, AC. EF cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a, CMR: AE=AF và Tính  b, CMR: AD là tia phân giác DMN

HD:

a, Ta có: D và E đối xứng với nhau qua AB

nên AB là đường trung trực của ED=> AE=AD

Tương tự AD= AF

khi đó AE=AF, Ta có: 

=> 

b, Do đối xứng nên ta có:

 và AEF cân tại A nên 

Vậy AD là phân giác góc 

Bài 28: Cho tứ giác ABCD, có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, và AD vuông góc AC, BD vuông góc với CB, Gọi E là giao điểm của AD và BC, d là đường thẳng đi qua các trung điểm của EO và CD

a, CMR: A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d

b, Tứ giác ABCD sẽ như thế nào nếu D trùng EO

HD:

a, Ta có: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của OE và BC

Ta có:

AOE vuông tại A có Ai là trung tuyến

nên AI= IE=IO (1)

BOE vuông tại B có BI là đường trung tuyến

nên BI=EI=IO (2)

Từ (1) và (2) ta có: IA = IB

Tương tự ADC vuông tại A có AK là đường trung tuyến

=> AK = DK=CK

BDC có BK là đường trung tuyến của tam giác vuông nên BK = KD= KC

Nên KA= KB hay K nằm trên đường trung trực AB

Vậy IK là trung trực của AB hay A và B đối cứng với nhau qua (d)

b, Ta thấy EO là đường thẳng chứa đường cao của EDC

Nếu d trùng với Eo thì d vừa là đường trung trực AB và CD nên ABCD là hình thang cân

Bài 29: Cho HBH ABCD, Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, đường chéo AC cắt BE, DF lần lượt tại P và Q, gọi R là trung điểm của đoạn thẳng BP, CMR:

a, AP=PQ=QC b, Tứ giác ARQE là hình bình hành

HD:

a, Trong BDC có CO và DF là hai đường trung tuyến

nên Q là trọng tâm

=> 

Tương tự ABD có P là trọng tâm

=> 

Từ (1) và (2) ta có AP= QC

Ta lại có :



vậy AP= PQ= QC

b, Vì P là trọng tâm ABD nên 

Tứ giác ARQE có hai đường chéo cắt nhau tịa trung điểm mỗi đường nên là HBH

Bài 30: Cho tam giác ABC, ba điểm N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, AC, và I, J, K lần lượt là TĐ của các đoạn thẳng NP, BP, NC.

CMR: IJKQ là hình bình hành

HD:

Ta có:

 NPB có IP =IN ( gt) và JP =JN (gt)

Nên Ị là đường trung bình => IJ // NB và IJ =NB

Tương tự ta có: QK // AN và QK =. AN=NB

Từ đó ta có: IJKQ là hình bình hành

Bài 31: Cho tam giác ABC (AB<AC), Dựng vè phía ngoài  các ABD cân tại B, ACE cân tại C sao cho , Gọi M là trung điểm BC, so sánh MD và ME

HD:

Dựng HBH ABFC

Ta chứng minh được BDF= CFE => FD= FE

Ta chứng minh AD<AE

Từ đó 

Bài 32: Cho ABC có , các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I, qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC ở F, CMR:

a, E và F đối xứng nhau qua BD b, IF là phân giác 

c, D và F đối xứng nhau qua IC

HD:

a, EBF cân tại B, BD là tia phân giác góc ,

nên BD là đường trung trực EF, vậy E, F đối xứng với nhau qua BD

b, Tính  nên 

vậy IF là tia phân giác 

c, IDC =IFC (g.c.g) => IF =ID, CF= CD

Do đó: CI là đường trung trực của DF

Vậy D, F đối xứng với nhau qua CI

Bài 33: Cho hình thang vuông ABCD , có CD= 2AB, gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC, CMR: 

HD:

Gọi N là trung điểm của HD, ta có: MN là đường trung bình

=> 

Mà: 

nên AB// MN và AB= MN => ABMN là hình bình hành

=> AN//BM

 ADM có DH AM, MN AD, AN DM

Khi đó 

Bài 34: Cho  ABC cân tại A, lấy điểm D trên AB, E trên AC sao cho AD=CE, gọi I là trung điểm của DE, K là giao điểm AI và BC

CMR: ADKF là HBH

HD:

Kẻ DM, IN // BC, Hãy chứng minh AM = CE

Vì MN =NE=> N là trung điểm AC

=> I là trung điểm AK

Tứ giác ADKE có hai đường chéo cắt nhau

tại trung điểm mỗi đường nên là HBH

Bài 35: Cho tam giác ABC đều, một đường thẳng // với BC cắt AB, AC ở D và E, Gọi D là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD, Tính số đo các góc của tam giác GIB

HD:

Qua C vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE tại K

Ta có: BDKC là hình bình hành=> B, I, K thẳng hàng

Chứng minh GDB= GEK (c.g.c)

Để GBK cân tại G có ,

do đó các góc của GBI lần lượt là 

Bài 36: Cho ABC, kẻ đường cao AH, Gọi D và E theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua AB và AC, đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a, CMR:DAE cân b, CMR: HA là phân giác 

c, CME : 3 đường thẳng BN, CM, AH thẳng hàng

d, CMR : BN, CM là các đường cao của  ABC

HD:

a, Ta có: AD= AH, AE = AH => AD = AE

b, Do Tính chất đối xứng ta => AB là phân giác 

Kẻ  (1)

AC là phân giác , Kẻ AK HN=> AK= AJ (2)

Từ (1) và (2) ta có: AI = AK

Vậy A cách đều 2 cạnh góc 

=> HA là phân giác góc 

c, Chứng minh tương tự ta cũng có: CM là tia phân giác 

BN là tia phân giác góc 

Trong MHN các đường phân giác trong HA, MC, NB cùng đồng quy tại 1 điểm

d, AB là phân giác góc 

MC là phân giác góc , mà 2 góc  kề bù => MCAB

=> MC là đường cao  ABC

Chứng minh tương tự BN là đường cao của ABC

Bài 37: Cho hình thang vuông ABCD, (AB//CD), gọi E , F theo thứ tự là các điểm đối xứng của B và điểm A qua đường thẳng DC, G, H theo thứ tự là các điểm đối xứng của C và E qua AD

a, CMR: D là trung điểm của BH b, CMR: AH// BF, CH// BG

HD:

a, Gọi I là giao BE và DC, do tính chất đối xứng ta có:

BI =IE, Mà DF =AD và AD=BI=> DF =BI

Ta cũng có: DI= HF

Hai tam giác vuông BID và DFH bằng nhau

cho ta DB= DH (1)

Và 

=> H, B, D thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) => D là trung điểm BH

b, Dễ dạng chứng minh được ADH = FDB => 

Dễ chứng minh được BDG =  HDC => 

Bài 38: Cho ABC, Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC và I, J, K theo thứ tự là trung điểm của DF, BF, CD

a, CMR: Tứ giác IJFK và IEKJ là hình bình hành

b, 3 điểm E, K, F thẳng hàng

HD:

a, Ta có: IJFK là hình bình hành

Chứng minh tương tự cho tứ giác IEKJ

b, DE// FC và DE =FC

=> DECF là hình bình hành

=> EF đi qua trung điểm K của DC

Vậy E, K, F thẳng hàng

Bài 39: Cho HBH ABCD có , Tia phân giác góc D đi qua trung điểm I của AB, Kẻ AH vuông góc với DC, CMR:

a, AB=2AD b, DI=2AH c, AC vuông góc AD

HD:

a, DAI cân đỉnh A

=> AD = AI= 

b, Kẻ AH DC, AM DI

=> ADM = ADH => AH= DM = DI

c, ADC có  vuông tại A

Bài 40: Cho HBH ABCD, lấy hai điểm E, F trên BD sao cho 

a, CMR: AECF là HBH

b, Gọi K là giao điểm của CE và AB, I là trung điểm của AK, Xác định vị trí E sao cho AI=IK=KB

HD:

a, Xét  ABE và  CDF ta có:

AB= CD,  và BE= CF => ABE=CDF (c. g.c)

=> AE= CF

Chứng minh tương tự AF = CE=> AECF là hình bình hành

b, Ta có:

 Khi đó:  => E là trung điểm OB

Bài 41: Cho ABC, kẻ các đường cao BD và CJ, Gọi H là trực tâm của , E là trung điểm của AH, D là trung điểm của BC, CMR: I và J đối xứng với nhau qua ED

HD:

BIC vuông tại I có ID là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

=> 

Chứng minh tương tự: 

Chứng minh tương tự: JE= EI

=> ED là đường trung trực của IJ

=> IJ đối xứng nhau qua ED

Bài 42: Cho ABC, Về phía ngoài tam giác vẽ các ABD vuông cân tại B, ACE vuông cân tại C, Gọi M là trung điểm của DE, CMR: MBC vuông cân

HD:

Trên nửa mặt phẳng bờ BC, Vẽ BCN vuông cân tại C

=> ABC = ENC (c.g.c)

=> 

=>  (K là giao điểm cảu EN và AB)

Ta lại có : BD=NE (= AB)

=> BD// NE ( Cùng vuông góc với AB)

=> BDNE là hình bình hành

=> M là trung điểm BN

Mà  CBN vuông cân tại C => MBC vuông cân tại M

Bài 43: Cho ABC có ba góc nhọn (AB<AC), gọi H là trực tâm, O là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O

a, CMR: Tứ giác BHCD là HBH

b, Gọi M là trung điểm của BC, CMR : AH=2.MO

HD:

a, Từ AO= OC = OD

=> Chứng minh ,

ta có: DCAC, BHAC ( H là trực tâm của ABC)

=> BH // DC

Chứng minh tương tự ta cũng có: CH// DB

Vậy BHCD là Hình bình hành

b, M là trung điểm của BC

=> M là trung điểm của HD

Mà O là trung điểm của AD => OM là đường trung bình của AHD

=> OM = AH => AH= 2OM

Bài 44: Cho ABC cân tại A, từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F, Vẽ các HCN BDEH, CDFK

CMR:A là trung điểm của HK



HD:

Gọi I và O là tâm của HCN BDEH và CDFK, Ta có:

 Mà 

=> BE// DK, DH// CA

=> AIDO là hình bình hành nên AO = ID

mà HI = ID, Nên AO = HI

Ta lại có: AO // HI nên AOIH là hình bình hành

Do đó:

AH // IO, AH= IO (1)

Chứng minh tương tự ta có:

AIOK là hình bình hành => AK// IO và AK=IO (2)

Từ (1) và (2) ta có: H, A, K thẳng hàng và AH= AK

Bài 45: Cho HBH ABCD, Các đường cao AE và AF, biết AC =25cm, EF=24cm, Tính khoẳng cachs từ A đến trực tâm H của AEF

HD:

Kẻ CN vuông góc với AB,

Tứ giác EHFC có EH // CF, HF// FC

nên EHFC là hình binh hành => AN = HF ( = EC)

Tứ giác ANFH có AN = HF, AN// HF

nên là hình bình hành => AH + NF, AH// NF

Lại có AH EF nên NF EF

EFN vuông tại F có EF =24cm, NE = AC= 25cm nên



Bài 46: Cho ABC, Trực tâm H, I là giao điểm các đường trung trực, Gọi E là điểm đối xứng với A qua I, CMR: BHCE là hình bình hành

HD:

Gọi I là giao của 3 đường trung trực => IA = IB = IC

Lại có: IA = IE nên IA= IB= IE= IC

Chứng minh AC CE để suy ra BH// EC

tương tự CH// BE

Bài 47: Cho H là hình chiếu của B trên đường chéo AC của HCN ABCD, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD

a, Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC, CMR: 

b, Tính số đo ?

HD:

Ta có: BIKC là Hình chữ nhật nên O là trung điểm của IC và BK

Xét IMC vuông, Ta có : MO=  DC

b, MBK có MD = IC=BK, Nên 

Bài 48: Cho ABC vuông cân tại A có AH là đường cao, Gọi M là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC, I và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC, CMR: IHK vuông cân

HD:

Chứng minh AIMK là hình chữ nhật

Vì  ABC vuông cân tại A

=> AK= IM = BI

mà BH = HA => 

=> BHI = AHK (c. g. c)

=> IH = HK

Mà 

Bài 49: Cho HCN ABCD, Kẻ BH vuông góc với AC, Gọi M và K lầ lượt là trung điểm của HC và AD, CMR: BK vuông góc với KM

HD:

AKB, kẻ đường cao KI cắt BH tại E

=> E là trực tâm của AKB=> AE BK

Ta có : KI// AD và KI //BC => KE // MA và KE =MA

=> Tứ giác AMKE là hình bình hành

=> AE//MK mà AE BK=> MK BK

Bài 50: Cho ABC nhọn, Trực tâm H, giao điểm của các đường trung trực là O, Gọi P, Q, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, AC

a, CMR: OPQN là HBH

b, ABC cần có điều kiện gì để OPQN là HCN

HD:



a, Gọi O là giao của 3 đường trung trực nên 

Trong  AHC, QN là đường trung bình nên QN// HC

Và PO //HC ( cùng vuông góc với AB)

Chứng minh tương tự ta có: OPQN là hình bình hành

b, ta có: tứ giác BCQN là hình chữ nhật có 2 đường chéo là NC và BQ

=> NC = BQ

=> ,

Xét MQB có MP là đường trung tuyến nên MP = BQ

nên MBQ vuông tại M => MB MQ

Bài 51: Cho ABC cân tại A, từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F, Vẽ các HCN BDEH, CDFK, Gọi I, J lần lượt là tâm các HCN BDEH và CDFK, M là trung điểm của AD

a, CMR: Trung điểm HK là 1 điểm có định không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC

b, CMR: 3 điểm I, J, M thẳng hàng và 3 đường thẳng AD, HJ, KI đồng quy



HD:

a, Ta có:  mà 

Chứng minh tương tự ta có: JD// AB

Khi đó AIDJ là hình bình hành=> AJ // ID, AJ = ID

=> Chứng minh AHIJ là hình bình hành

=> IJ // AH và IJ = AH và IJ //AK và IJ =AK

Khi đó 3 điểm A, H, K thẳng hàng và A là trung điểm của HK

b, Tứ giác AIDJ là hình bình hành

=> M là trung điểm của AD,

thì M nằm trên đường chéo của HBH

Bài 52: Cho HCN ABCD và 1 điểm M thuộc miền trong của HCN

a, Gọi E, F, G, H là các điểm đối xứng của M theo thứ tự qua các trục AB, BC, CD, DA, CMR: E, F đối xứng với nhau qua điểm B. E và H đối xứng với nhau qua A. G và H đối xứng với nhau qua D. F và G đối xứng với nhau qua C

b, Chọn M sao cho EFGH là HBH, khi đó EFGH là hình gì?

HD:

a, Do tính chất của đối xứng trục nên 

=> 

=> 3 điểm E, B, F thẳng hàng

Mà BE = BM = BF

=> E, F đối xứng với nhau qua B

Các điểm khác chứng minh tương tự

b, Để EFGH là hình bình hành thì EF// HG//AO, Khi đó M trùng với O, Tâm của HCN

=> EFGH là hình thoi

Bài 53: Cho ABC có trực tâm H, Gọi M là trung điểm của BC, Gọi D là điểm đối xứng với H qua M, Gọi I là trung điểm của AD, CMR: IM vuông góc BC

HD:

Vì IM là đường trung bình của AHD

=> 

Bài 54: Cho ABC, kẻ đường cao AH, gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I, Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HC và CE, các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K

a, CMR: Tứ giác AHCE là HCN b, CMR : HG=GK=KE

HD;

a, Tự chứng minh

b, G là trọng tâm AHC => HG = 2 GI

Chứng minh tương tự ta có: KE= 2. KI

mà IH = IE=> IG= IK => GK =2.GI=2.IK=> ĐPCM

Bài 55: Cho HBH ABCD có AB=2AD, Góc  vẽ BH vuông góc với AD, . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CD và AB

a, CMR: ANMD là hình thoi

b, Tính 

HD:

a, Tự chứng minh

b, Ta có:

, Tính 

Ta có:  ( So le trong)

Mà : 

Xét HAN cân tại N => 

=> , Vậy 

Bài 56: Cho  ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, Gọi D và E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC ,CMR:

a, AH= DE b,  c, 

d, DI//EK, với I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC

HD:

a, Tứ giác ADHE có 3 góc vuông nên là HCN => AH= DE

b, ABC vuông tại A, Có AM là đường trung tuyến => AM= MB= MC

=> AMC cân tại M => 

Mặt khác ,

Vì cùng phụ với 

c, Chứng minh AM, Ta có: , ta có:



d, Ta có: HEC có EK = KH = KC =>  EKC cân tại K

=> 

=> EK //AM => KE DE, Chứng minh tương tự

=> 

Bài 57: Cho ABC, Trên tia đối của tia BA lấy D, trên tia đối của tia CA lấy E sao cho BD=CE=BC, Gọi M là giao điểm của BE và CD, đường thẳng song song với tia phân giác của góc  cắt AC ở F,

CMR:AB=CF

HD:

Vẽ Hình bình hành ABNC => AB = NC

=> CB= CE=> BCE cân

=> 

=> BM là tia phân giác góc , CM là tia phân giác 

=> NM // phân giác góc 

=> 3 điểm F, M, N thằng hàng

=> 

=> NFC cân tại C

=> NC = CF mà NC = AB => AB= CF

Bài 58: Cho HCN ABCD, M là điểm bất kỳ nằm trong HCN, vẽ ME AB tại E, MF  AD tại F, CK  AM tại K, CMR:

a,  b,  c, 

HD

a, Tứ giác AEMF là hình chữ nhật

=> MA= EF => 

b, Gọi G là giao điểm của EM và CD,

H là giao điểm của FM và BC

=> Tứ giác DFMG, GMHC, EBHM là hình chữ nhật,

Do vậy 



=> ĐPCM

c, Gọi O là giao của 2 đường chéo AC và BD

=> 

Bài 59: Cho ABC vuông tại A (AC>AB), đường cao AH, trên HC lấy HD=HA, đường  BC tại D cắt AC tại E

a, CMR: AE =AB b, M là TĐ của BE, Tính 

HD:

a, Chứng minh AE=AB

Kẻ EF AH => tứ giác HDEF là hình chữ nhật

=> HBA=FAE (g.c.g) => AB=AE

b, ABE vuông cân tại A=> 

BDE vuông cân tại D=> 

Từ đó ta có: AM=MD

Xét AHM = DHM (c. c. c)=> 

Bài 60: Cho ABC, D trên AB, E trên AC sao cho BD=CE, Gọi M, N là trung điểm của BC, DE, Vẽ các hình bình hành BDNI và CENK

a, CMR: I, M, K thẳng hàng

b, MN cắt AC tại Q, cắt BA tại P, CMR: APQ cân

HD:

a, Tứ giác BDNI là hình bình hành => 

Tứ giác NECK là hình bình hành => 

Từ đó ta có KC//DE và BI= KC

=> Tứ giác BICK là hình bình hành có M là trung điểm của BC

=> M đi qua trung điểm IK => I, K, M thẳng hàng

b, Ta có: NI=DB, NK= CE mà BD = CE => NI = NK => NIK cân tại N

Mà MN là đường trung tuyến => NM là phân giác => 

Lại có : NK // QC=> ( đồng vị)

và NI// BD=> ( đồng vị )

=>  ( đối đỉnh) => 

Vậy APQ cân tại A

Bài 61: Cho HCN ABCD, qua E trên đường chéo AC, kẻ đường // với BD cắt AD và phần kéo dài của CD ở M và N, Vẽ HCN DMFN, CMR:

a, FD//AC b, E là trung điểm của FB

HD:

a, Chứng minh FD// AC

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật,

AC cắt BD tại O => OC= OD => ,

Mà EN // BD =>  Mà IND cân

=>  => FD//AC

b, Chứng minh DIEO là hình bình hành => DI//EO và DI =EO => FI//EO và FI =EO

=> FIOE là hình bình hành

=> IO //EF và IO =EF (1)

Mặt khác IO là đường trung bình của DFB => OI =EB (2)

Từ (1) và (2) => EB= EF

Bài 62: Cho ABC nhọn, vẽ các đường cao AD và BE, Tia phân giác Ax của  cắt BE và BC lần lượt ở M và N, Tia phân giác By của  cắt AD và AC lần lượt tại P và Q, CMR:

a, ANBQ b, Tứ giác MPNQ là hình thoi

HD:

a, Ta có:  ( cùng phụ góc C)

=> 

EBQ vuông => 

=> 

b, APQ có AO vừa là đường phân giác vừa là đường cao

=> AO là đường trung trực

=> MP= MQ, NP= NQ

BMN có BO vừa là đường phân giác vừa là đường cao=> là đường trung trực => ĐPCM

Bài 63: Cho hình vuông ABCD, Từ điểm M tùy ý trên đường chéo BD, kẻ ME, MF lần lượt vuông góc với AB và AD, CMR:

a, CF=DE, CFDE b, CM=EF, OMEF

c, CM, BF, DE đồng quy d, Xác định M để diện tích AEMF lớn nhất

HD:

a, BD là đường chéo của hình vuông ABCD

=> BD là phân giác góc D

=>  cân tại F=> DF=FM=AE

CDF= DAE (c.g.c) => CF = DE và 

Mà 

b, AM =EF, BD là đường trung trực của AC

=> MA =MC=> MC= EF

Kéo dài FM cắt BC tại N => Tứ giác BEMN là hình vuông, => MN= ME

=>EMF= MNC(c. g. c) => , Mà 

=> => ĐPCM

c, EFC có CHEF=> CM trùng CH là đường cao ứng với cạnh EF

Lại có EDCF tại O=> ED là đường cao ứng với cạnh CF

Chứng minh tương tự câu a=> CEBF=> BF là đường cao ứng với cạnh CE

=> 3 đường CM, BF, DE đồng quy

Bài 64: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC, lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD=BC=CE, Qua D kẻ đường thẳng // với AB cắt AC ở H, qua E kẻ đường thẳng // với AC cắt AB ở k, chúng cắt nhau ở I

a, Tứ giác BHKC là hình gì? b, Tia IA cắt BC tại M, CMR : MB=MC

c, Tìm điều kiện của ABC để tứ giác DHKE là hình thang cân

HD:

a, Tứ giác BHKC là hình bình hành vì

có 2 đường chéo BK và HC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

b, Tứ giác AHIK cũng là hình bình hành, nên AK// IH và AK= IH

AB//IH và AB=IH

=> ABHI là hình bình hành

=> IA// HB=> AM là đường trung bình của HBC

=> BM = MC

c, Tứ giác DHKE là hình thang vì HK //DE,

để là hình thang cân => 

Hay  cân tại A

Bài 65: Cho hình thang vuông ABCD, , CD=2AB=2AD, Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của CD, HC và HD

a, CMR: Tứ giác ABMD là hình vuông và tam giác BDC là tam giác vuông cân

b, CMR: DMPQ là hình bình hành

c, CMR: AQ vuông góc với DP

HD:

a, Chứng minh tứ giác ABMD có 4 cạnh bằng nhau,

lại có  nên ABMD là hình vuông

BCD có MB= MC=MD nên là tam giác vuông ,

lại có 

Do đó: BDC là tam giác vuông cân ở B

b, Tứ giác DMPQ là hình bình hành vì có PQ// DM và PQ = DM

c, Chứng minh Q là trực tâm của ADP

Bài 66: Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác vẽ hai hình vuong ABEF và ACGH, CMR: các đường BG và CE cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường cao AD của tam giác ABC

HD:



Trên tia đối của tia AD lấy điểm K sao cho AK= B

=>  ( cùng phụ  )

=> EBC = BAK (c.g.c)

=> , Mà 

=>  hay BKEC

Chứng minh tương tự => CK BG=> AD, BG,

CE là ba đường cao BCK

Bài 67: Cho hình vuông ABCD, các điểm E, F lần lượt trên các cạnh BC, CD sao cho , Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho DM =BE, CMR:

a, 

b, Chu vu tam giác CEF bằng 1 nửa chu vi tứ giác ABCD

HD:

a, ABE = ADN ( 2 cạnh góc vuông)

=> 

=> 

b, AEF = AMF (c.g.c)

=> EF = MF, EF = MD+DF=BE+DF

Chu vi CEF = CE+EF+CF

= CK+BE+DF+CF= BC+CD= chu vi ABCD

Bài 68: Cho ABC đều, đường cao AD, M là điểm nằm giữa B và D, gọi N là Trung điểm của AM, vẽ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc AC tại F

CMR: DENF là hình thoi

HD:

Ta có: MN = EN = DF= FN 

=> 

=> 

=> 

=>  NED Đều, NDF đều

vậy DENF là hình thoi

Bài 69: Cho hình vuông ABCD và 1 điểm E bắt kỳ nằm giữa 2 điểm A và B, trên tia đối của tia CB lấy 1 điểm F sao cho CF =AE

a, Tính 

b, Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF, tứ giác DEGF là hình gì?

c, CMR: AC, DG, EF đồng quy

HD:

a, AED = CFD (c.g.c)

=> 

=> 

b, Tứ giác DEGF có I là trung điểm của EF (gt)

I là trung điểm của DG

Do đó: DEGF là hình bình hành

lại có: => Là hình chữ nhật, lại có tiếp DE= DF

=> Là hình vuông

c, Ta có:

=> I nằm trên đường trung trực cảu BD

Mà AC cũng là đường trung trực của BD, ( Tứ giác ABCD là hình vuông)

=> => 3 đường AC, DG, EF đồng quy tại I

Bài 70: Cho HBH ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O, gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các OAB, OBC, OCD, OAD

CMR: EFGH là hình thoi

HD:

Vì OH , OF là hai tia phân giác của các góc đối đỉnh

nên H, O, F thẳng hàng

Tương tự ta có: G, O, E thẳng hàng

Lại có OHOG ( Hai tia phân giác của hai góc kề bù)

Xét OAE =OCG (c.g.c) => OG =OE

Chứng minh tương tự : OH= OF

=> EFGH là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau => là hình thoi

Bài 71: Cho hình vuông ABCD, Gọi E, F theo thứ tự là TĐ của AB, BC

a, CMR: CE vuông góc với DF

b, Gọi M là giao điểm của CE và DF, CMR : AM=AB

HD:

a, Tự chứng minh

b, Gọi N là trung điểm của DC,

Tứ giác AECN có AE //NC và AE=NC=> Là hình bình hành

=> AN // EC=> AN DF

Trong DMC có: 

=> ADM có AH là đường cao lại là đường trung tuyến nên AD= AM= AB

Bài 72: Cho ABC, trên tia AB ta lấy 1 điểm D, trên tia AC lấy 1 điểm E sao cho BD=CE, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD, DE, EB

a, CMR: MNPQ là hình thoi

b, CMR: các đường chéo của hình thoi MNPQ // với các phân giác trong và ngoài của góc A

HD:



a, Tự chứng minh

b, Vì MNPQ là hình thoi, MP và NQ là hai đường chéo

=> MP NQ

Gọi I, J lầ lượt là giao NQ với AB và AC

=> PQ//AD=> ( so le)

Tương tự: => IAJ cân tại A

=> Phân giác Ax là đường cao => Ax IJ, Mà MP IJ

=> Ax //MP

Dễ dàng chứng minh được NQ// Ay

Bài 73: Cho hình thoi ABCD, trên tia đối của tia BA, ta lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy N, trên tia đối tia DC lấy P, trên tia đối tia AD lấy Q sao cho BM=CN=DP=AQ

a, CMR: MNPQ là hình bình hành

b, CMR : MNPQ là hình thoi và ABCD có cùng tâm đối xứng

c, Hình thoi ABCD phải có ĐK gì để MNPQ là hình vuông

HD:

a, AQM = NCP => QM= PN

MBN= PDQ => QP= MN

b, OBM= ODN=> 

=> 

=> P, O, M thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta có: Q, O, N thẳng hàng

=> HBH MNPQ có tâm O

c, Để MNPQ là hình thoi thì Hình bình hành MNPQ có hai cạnh kề bằng nhau: QM= QD

Thật vậy:

 QAM= MBN => ,

Mà  và 

Hình thoi ABCD có 1 góc vuông => là hình vuông

Bài 74: Cho tam giác đều ABC, trực tâm H, kẻ đường cao AD, một điểm M thuộc cạnh BC, từ M kẻ ME vuông góc với AB và MF vuông góc với AC, Gọi I là trung điểm của AM, CMR:

a, DEIF là hình thoi

b, Đường thẳng HM đi qua tâm đối xứng của hình thoi DEIF

HD:

a,  ADM vuông có ,

Tương tự  cân

 cân có 

tương tự : 

=>EID đều => EI=ED= IP

Chứng minh tương tự: IF=FD=ID

=> EIFD là hình thoi

b, Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi DEIF và N là trung điểm AH, Ta có:

AMH có IN là đường trung bình => IN//MH

IDN có OH là đường trung bình => OH//IN

Như vậy O, H, M thẳng hàng

=> MH đi qua giao điểm O của ID và EF

Bài 75: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM, đường phân giác góc A, cắt đường trung trực BC tại D, Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

a, CMR: AD là phân giác 

b, 3 điểm E, M, F thẳng hàng

c, Tam giác BDC là tam giác vuông cân

HD:

a, Ta có:  ( cùng phụ góc B)

Mà AM= BC=> AM= MC=> 

=> AD là tia phân giác

b, AH // DM =>  ,mà  cân

=> AM= MD

Chứng minh Tứ giác AEDF là hình vuông => EA= ED => FA=FD

Ta có: M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD=> Thẳng hàng

c, BED = CFD => 



=> BDC vuông cân

Bài 76: Cho tam giác ABC vuông tại A, và AB<AC, kẻ đường cao AH, trong nửa mặt phẳng có chưa A bờ BC vẽ hình vuông AHDE

a, CMR: D nằm trên HC

b, Gọi F là giao của DE và AC, đường thẳng qua F và // với AB cắt đường thẳng qua B và // với AC tại G, CMR: ABGF là hình vuông

c, CMR: AG, BF, HE đồng quy

d, DEHG là hình thang

HD:

a, AC > AB => 

Mà: 

=> HC>AH=> AH= HD

=> HC>HD=> D nằm giữa H,C

b, ta có:



kết hợp với AE= AH

=> AEF = AHB => AB= AF

Tứ giác ABGF là hìn bình hành có 1 góc vuông => HCN có AB = AF => là hình vuông

c, Gọi M là giao điểm BF, AG, Khi đó BDF có DM = BF, tương tự AM= BF

=> M nằm trên đường trung trực AD,

Ta lại có: AE= ED, HA= HD

=> E, H cũng nèm trên đường trung trực của AD hay H, M, E thẳng hàng

Bài 77: Cho HCN ABCD và E là điểm nằm trên đường chéo AC, trên tia đối của tia EB lấy F sao cho EF =BE, Gọi M, N là hình chiếu của F trên 2 đường thẳng AD, DC, CMR:

a, DF//AC và MN//BD

b, 3 điểm E, M, N thẳng hàng

HD:

a, Dễ thấy OE là đường trung bình của  BDF

=> DF// OE=> DF // AC

=>  ( Đồng vị )

=> OAD cân => 

=> IDm cân => 

=> ( đồng vị) => MN// DB

b, I là trung điểm DF => IE là trung bình

=> IE // DB mà MN // BD

vậy M, N, E thẳng hàng

Bài 78: Cho hình vuông ABCD cạnh a, trên AB lấy , trên BC lấy BN sao cho 

a, CMR: AN vuông góc DM

b, Gọi I và J lần lượt là trung điểm của NM, DN và K là giao AN và DN, Tính IK , KJ và IJ

HD :

a, Ta chứng minh ABN =DAM

=> , Mà : 

=> 

b, Ta có : 



Tương tự ta có : 

Tương tự 

Bài 79 :



Bài 80: Cho ABC đều có cạnh bằng 4cm, M và N là các điểm lần lượt chuyển động trên hai cạnh BC và AC sao cho BM= CN

a) Tính diện tích ABC

b) Xác định vị trí của M, và N để độ dài MN nhỏ nhất, Tìm độ dài nhỏ nhất đó?

HD:

a) Tính được độ dài đường cao: 

Suy ra diện tích: 

b) Gọi P và Q là chân đường vuông góc kẻ từ M và N xuống AB

Ta có:  ANQ vuông ở Q, có: 

Tương tự đối với MPB có : 

Cộng theo vế ta được : 

Kẻ  Tứ giác MPQH là hình chữ nhật

Ta có: 

Như vậy khi M, N di chuyển ta luôn có: 

Và  , Khi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC

Suy ra vị trí của M,N cần xác định lần lượt là trung điểm BC và AC,

Khi đó độ dài nhỏ nhất của MN là : 

Bài 81: Cho  ABC vuông cân tại A, Gọi M là 1 điểm nằm giữa A và B, trên tia đối của tia AC lấy điểm I sao cho AI=AM

a) Chứng minh rằng : 

b) Trên BC lấy điểm P sao cho  , trên nửa mp bờ BC có chứa điểm A, vẽ Px sao cho  , Tia Px cắt tia CA tại D, Tính số đo 

HD:

a) Tia IM cắt BC tại H

ABC vuông cân tại A nên 

IAM vuông cân tại A nên 

IHC có  ,

Chứng minh được M là trực tâm IBC=>

b) Gọi E là điểm đối xứng với B qua PD => 

=>BPE cân tại P nên đường trung trực PD cũng là tia phân giác góc 



Ta chứng minh được EPC vuông tại C và CD là phân giác của PCE

Đồng thời ED là phân giác ngoài tai đỉnh E của PCE

Mặt khác:  , nên ta tính được:  hay 

Bài 82: Cho ABC có ba góc nhọn, Vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên ED, CMR:

a) 

b) 

HD:

a) Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, ED

Chứng minh được  MED cân tại M=> 

Hình thàng BHKC có: BM=MC, MI//BH//CK nên IH=IK ,mà ID=IE=>EH=DK

b) Vẽ EE’, II’, DD’ vuông góc với BC,

Ta chứng minh được II’ là đường trung bình của Hình thang EE’D’D nên  (1)

Qua I vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BH, CK tại P và Q

Chứng minh được: BPQC là hình thang nên  (2)

Chứng minh được:  PIH =QIK=>  (3)

Từ (1), (2), (3) => 

Bài 83: Cho hình vuông ABCD, M là điểm bất kì trên cạnh BC, trong nửa mp bờ AB chứa C đựng hình vuông AMHN, Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, Cắt DC ở F

a) CMR: BM=ND

b) CMR: N, D, C thẳng hàng

c) EMFN là hình gì?

d) Chứng minh  và chu vi MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

HD :

 a) Tứ giác ABCD là hình vuông=>  (1)

Vì AMHN là hình vuông

 (2)

Từ (1) và (2) ta có : 

Ta có :  AND=AMB (c.g.c)



b) ABCD là hình vuông

 ,

nên N, D, C thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN

của hình vuông AMHN

=> O là tâm đối xứng của hình vuông AMHN

=> AH là đường trung trực của đoạn MN, mà E, F  AH

=> EN=Em và FM=FN (3)

 (4)

Từ (3) và (4) => EM=NE=NF=FM=> MENF là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra FM=FN=FD+DN, mà DN=MB (cmt) => MF=DF+BM

Gọi chu vi của MCF là P và cạnh hình vuông ABCD là a

Ta có :  , Vì ( MF=DF+MB)



Hình vuông ABCD cho trước => a không đổi=> P không đổi

Bài 84: Gọi M là điểm nằm trong  , và P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy, Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

a) CMR: 

b) Tính số đo  theo m

HD:

a)  MPO vuông tại P=> đường trung tuyến 

MQO vuông tại Q=> đường trung tuyến 

Do đó: 

=>HPQ cân tại H, K là trung điểm của PQ=> HK vuông góc với PQ

b)  =>

Bài 85: Cho hình chữ nhật ABCD, điểm P thuộc đường chéo BD ( P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) chứng minh Am song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB.

Chứng mỉnh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí

của P

HD:

a) Ta có: O là trung điểm của AC (ABCD là hình chữ nhật)

P là trung điểm của CM ( Vì M đối xứng với C qua P)

Nên Op là đường trung bình của  ACM, do đó: OP//AM=> AM//BD

b) Vì OP là đường trunh bình của ACM nên OP//AM và OP= AM

Do đó: OP//AI và OP=AI=> tứ giác AIPO là hình bình hành=> PI//AC (1)

Kẻ ME//AB cắt AC tại K, ta có:  

Nên AE là phân giác . Mặt khác:  cân

E là trung điểm của KM,

do đó EI là đường trung bình của AMK=> EI//OA=>EI//AC (2)

Ta lại có : E, I, F thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: E, F, P thẳng hàng.

Bài 86: Cho ABC, đường vuông góc với AB tại A và đường vuông góc với BC tại C cắt nhau tại D, gọi H là trục tâm của ABC

a) Chứng minh DH đi qua trung điểmt M của AC

b) ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để B, H, D thẳng hàng

HD:

a) Chứng minh được tứ giác AHCD là hình bình hành

Hai đường chéo AC và DH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

b) Để B, H, D thẳng hàng thì:

 AHCD là hình thoi

 ABC cân ở B

Bài 87: Cho ABC vuông tại A( AC>AB) , đường cao AH, trên HC lấy HD=HA, đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

a) CMR: AE=AB

b) Gọi M là trung điểm của BE, TÍnh 

HD:

a) Chứng minh AE =AB

Kẻ 

Tứ giác HDEF là hình chữ nhật,

=> EF=HD mà HD=AH=> EF=AH

Xét  HBA và FAE có:



AH=EF

 cùng phụ với  , Do đó: HBA=FAE (g.c.g) => AE=AB

b) Tính 

Ta có: BAE vuông tại A => AM = BE

BDE vuông tại D => DM=BE

Do đó: AM=DM

Xét AHM và DHM có:

AM=MD, AH=HD và HM là cạnh chung

=> AHM=DHM (c.c.c)

=>

Bài 88: Cho hình vuông ABCD, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC ( E khác B và C), Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F, trung tuyến AI của AEF cắt CD ở K, đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh AE=AF và tứ giác EGFK là hình thoi

b) Chứng minh AKF đồng dạng với CAF và 

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi của EKC không đổi

HD:

a) Xét ABE vuông tại B và ADF vuông tại D có:

AB=AD,



=>  ABE=ADF

=> AE=AF

Vì AE=AF và AI là đường trung tuyến AEF

=> AI  EF

Hai IEG vuông tại I và IFK vuông tại I có:

IE=IF,

,

Nên IEG=IFK

=> EG=FK

Tứ giác EGFK có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Hình bình hành EGFK có hai đường chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi

b) Xét AKF và CAF có:  , 



c) Theo câu a ta có: ABE =ADF nên EB=FD, Tứ giác EGFK là hình thoi nên EK= KF

Do đó chu vi EKC là:  ( Không đổi)

Bài 89: Cho  ABC vuông tại A( AB<AC), M là trung điểm của BC, D đối xứng với A qua M

a, Tứ giác ABDC là hình gì?

b, Lấy điểm H bất kỳ trên MB( H khác B và M), Gọi I là điểm đối xứng của A qua H, CMR : BIDC là hình thang

c, Gọi E và F lầ lượt là hình chiếu của I trên BD và CD, O là giao của DI và EF, CMR : HODM lafhinhf bình hành

d, CMR : 3 điểm H, E, F thẳng hàng

Bài 90: Cho hình vuông ABCD, gọi E là điểm đối xứng của A qua D

a, CMR : ACE là tam giác vuông cân

b, kẻ AH vuông góc với BE tại H, Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và HE, tứ giác BMNC là hình gì ?

c, Cho AC =5cm, Tính diện tích BCE

d, CMR:  vuông

Bài 91: Cho HCN ABCD, kẻ CE  DB (E DB), Lấy điểm F đối xứng với C qua E, kẻ FG // BC

( G DB). CMR:

a, Tứ giác CGFB là hình thoi

b, Tứ giác AFBD là hình thang cân

c, Gọi H là hình chiếu của F trên đường thẳng AD, FG cắt AB tại K, Tứ giác AFHK là hình gì?

d, CMR: Ba điểm H, K, E thẳng hàng

Bài 92: Cho ABC vuông tại A và M là điểm bất kì trên BC, Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB, MP cắt AB tạo D, Gọi Q là điểm đối xứng với M qua AC, MQ cắt AC tại E

a, Các tứ giác ADME và BCQP là hình gì?

b, Cho Ab=6cm, AC=8cm, Tính đội dài BC và diện tích ABC

c, Chứng minh A là trung điểm của PQ

d, Tìm vị trí của M trên BC để chu vi của tứ giác BCQP đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 93: Cho ABC vuông tại A, các đường trung tuyến AM và CN cắt nhau tại I, lấy E thuộc tia đối của tia MN sao cho ME= MN, nối BE cắt AM tại F, Gọi D là trung điểm của CI, gọi K là trung điểm của CA

a, Tứ giác ANEC là hình gì?

b, CM : BF=2FE

c, ABC phải có điều kiện gì để MKDF là hình thoi

d, Cho BC cố định, Tìm vị trí điểm A để diện tích tứ giác ACEN lớn nhất

Bài 94: Cho ABC nhọn, trực tâm H, các đường cao BD, CE. Gọi M là trung điểm của BC, lấy điểm F đối xứng với C qua H

a, Qua F kẻ 1 đường thẳng song song với AC cắt AB tại P, nối PH cắt AC tại Q, CMR : HP=HQ

b, CM : MH PQ

c, Gọi I là trung điểm của DE, J là trung điểm của AH. CMR: I, J, M thẳng hàng

d, CMR: 

Bài 95: Cho HCN ABCD, kẻ AN và CM cùng vuông góc với BD

a, CMR: DN=BM

b, CM tứ giác ANCm là hình bình hành

c, Gọi K là điểm đối xứng với A qua N, tứ giác DKCB là hình gì?

d, Tia AM cắt KC tại P, CM các đường thẳng PN, AC, KM đồng quuy

Bài 96: Cho ABC vuông tại A, Gọi E và M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC, Từ A vẽ đường thẳng song song với BC cắt ME tại F

a, CMR: ABEF là hình bình hành

b, CH tứ giác AECF là hình thoi

c, Gọi N là điểm đối xứng với A qua E, tứ giác ABNC là hình gì ?

d, ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác AFCN là thang cân

Bài 97: Cho  ABC vuông tại A, đường cao AH, Gọi D là trung điểm của AC, lấy E đối xứng với H qua D

a, CMR : AHCE là hình chữ nhật

b, Kẻ AI// HE( I thuộc BC) cm tứ giác AEHI là hình bình hành

c, Trên tia đối của HA lấy điểm K sao cho AH= HK, CM tứ giác CAIK là hình thoi

d, ABC cần có thêm điều kiện gì để hình thoi CAIK là hình vuông, Khi đó tứ giác AHCE là hình gi ?

Bài 98: Cho hình thoi ABCD, đường chéo AC BD, M là 1 điểm tùy ý trên AC, đường thẳng qua M và song song với AB cắt AD tại E, Cắt BC tại G, đường thẳng qua M song song với AD cắt AB tại F, cắt CD tại H

a, CMR : Tứ giác MEAF là hình thoi, Từ đó EFGH là hình thang cân

b, xác định vị trí của điểm M sao cho EFGH là hình chữ nhật

c, Hình thoi ABCD thỏa mãn  điều kiện gì để hình chữ nhật EFGH ở câu b là hình vuông

Bài 99: Cho HCN ABCD, Gọi M là trung điểm của BC và E là giao điểm của đường thẳng AM với DC

a, CMR : ABEC là hình bình hành

b, Gọi F là điểm đối xứng của B qua C, CMR : BEFD là hình thoi

c, CMR C là trọng tâm AEF

d, Cho  , Gọi H là trung điểm của DF và K là giao điểm của AH với EF, CMR : AE=2. MK

Bài 100: Cho ABC nhọn có  , Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H, Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M

a, CMR : CI =BH và BIAB

b, Lấy K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI, CMR : F, M, K thẳng hàng

c, CMR : EF  EK

d, CMR : MEF đều

Bài 101: Cho ABC vuông tại A( AB<AC), trung tuyến AM, gọi D là điểm đối xứng của A qua M

a, CMR: ABCD là hình chữ nhật

b, Kẻ CH AD tại H, Gọi K là điểm đối xứng của C qua H, CMR tứ giác ABKD là hình thang cân

c, Gọi T là điểm đối xứng của D qua H, E là giao điểm của AC và KT, CMR : CK=2. EH

d, CMR : EH  BC

Bài 102: Cho MNP vuông tại N, biết MN=6cm, NP=8cm, đường cao NH, Qua H kẻ HC vuông góc với MN, HD vuông góc với NP

a, CMR : HDNC là hình chữ nhật

b, CMR : NH.MP=MN.NP

c, Tính độ dài CD

d, Tính diện tích NMH

Bài 103: Cho ABC vuông tại C, Gọi D là trung điểm của AB, Kẻ DM vuông góc với AC (M  AC), Gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, DE cắt BC tại N

a, CMR: CMDN là hình chữ nhật

b, Tứ giác BDCE là hình gì ?

c, CMR : 

d, ABC cần có thêm điều kiện gì để ABEC là hình thang cân

Bài 104: Cho ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HD  AB và HE  AC , Gọi O là giao điểm của AH và DE

a, CMR : AH =DE

b, Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của BH và CH, CMR: DEQP là thang vuông

c, CMR: O là trực tâm của ABQ

d, CMR : 

Bài 105: Cho HBH ABCD có AB=8cm, AD=4cm, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

a, CMR : AMCN là hình bình hành, Hỏi tứ giác AMND là hình gì ?

b, Gọi I là giao điểm của AN và DM, K là giao điểm của BN và CM, Tứ giác MINK là hình gì ?

c, CM : IK//CD

d, HBH ABCD cần thêm điều kiện gì thì tứ giác MINK là hình vuông? Khi đó diện tích của MINK là bao nhiêu?

Bài 106: Cho  ABC cân tại A, Có AB=5cm, BC=6cm, phân giác AM ( M  BC), Gọi O là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng với M qua O

a, Tính diện tích ABC

b, CM: AK//MC

c, Tứ giác AMCK là hình gì?

d, ABC có thêm điều kiện gì thì tứ giác AMCK là hình vuông

Bài 107: Cho ABC vuông tại A, E là 1 điểm thuộc cạnh BC, Gọi D, F lần lượt là các điểm đối xứng với E qua AB và AC

a, CMR: D và F đối xứng với nhau qua A

b, DEF là hình gì ?

c, CM BC=BD+CF

d, Tứ giác BDFC là hình gì, vì sao ?

e, Điểm E ở vị trí nào trên cạnh BC để tứ giác BDFC là HBH

f, ABC có thêm điều kiện gì và E ở vị trí nào trên BC để BDFC là hình chữ nhật

Bài 108: Cho HBH ABCD, AB=2AD, Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD

a, Tứ giác APQD là hình gì? Vì sao ?

b, Gọi I là giao điểm của AQ và PD, Gọi K là giao điểm của BQ và CP, CM IPKQ là hình chữ nhật

c, CM: IK=AD và IK//AB

d, HBH ABCD phải có thêm điều kiện gì để IPKQ là hình vuông?

Bài 109: Cho HV ABCD, trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho DN=BM, đường thẳng song song AN kẻ từ M và đường thẳng song song với AM kẻ từ N cắt nhau ở F

a, CMR: ANFM là hình vuông

b, Chứng minh F nằm trên đường phân giác của góc MCN

c, CM AC vuông góc với CF

d, Gọi O là trung điểm của AF, CMR 3 điểm B, D, O thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang

Bài 110: Cho HV ABCD có AC cắt BD tại O, Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC( M khác B và C), Tia AM cắt CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE=CM

a, CMR : OEM vuông cân

b, CM: ME song song với BN

c, Từ C kẻ CH vuông góc với BN tại H, CMR: O, M, H thẳng hàng

Bài 111: Cho  ABC, trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G, Gọi H và I lần lượt là trung điểm của GB và GC

a, CMR: DEHI là hình bình hành

b, lấy M, N lần lượt trên đoạn DE và HI sao cho DM= HN. CMR : M, G, N thẳng hàng

c, Lấy P và Q lần lượt trên BA và BC sao cho PA=QC,( Vẽ riêng hình ), Gọi K là trung điểm của PQ, CMR: KD tạo với các đường thẳng BA và BC các góc nhọn bằng nhau.

Bài 112: Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O, trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (M khác B và C), Tia AM cắt CD tại N, Trên cạnh AB lấy E sao cho BE=CM

a, CMR: OEM vuông cân

b, CMR: ME// BN

c, Từ C kẻ CHBN (H  BN), CMR: O, M, H thẳng hàng