**CHUYÊN ĐỀ TÌM MIN, MAX CỦA BIỂU THỨC**

DẠNG 1: ĐA THỨC ĐƠN GIẢN

Bài 1: Tìm GTNN của: 

Bài 2: Tìm GTNN của: 

Bài 3: Tìm min của: 

Bài 4: Tìm GTNN của: 

Bài 5: Tìm GTNN của: 

Bài 6: Tìm GTNN của : 

Bài 7: Tìm GTNN của: 

Bài 8: Tìm min của: 

Bài 9: Tìm max của: 

Bài 10: Tìm GTNN của: 

Bài 11: Tìm min của: 

Bài 12: Tìm min của:  với a+d = b+c

Bài 13: Tìm GTNN của: 

HD:



Bài 14: Tìm GTNN của: 

HD:



Bài 15: Tìm GTNN của: 

HD:



Bài 16: Tìm GTNN của: 

HD:

Đặt: 

Bài 17: Tìm GTNN của :

HD:

Đặt: 

Bài 18: Tìm GTLN của: 

Bài 19: Tìm min của: 

Bài 20: Tìm min của: 

Bài 21: Tìm min của: 

Bài 22: Tìm min của: 

Bài 24: Tìm max của: 

Bài 25: Tìm min của: 

Bài 26: Tìm min của: 

Bài 27: Tìm max của: 

Bài 28: Tìm min của: 

Bài 29: Tìm min của: 

Bài 30: Tìm max của: 

Bài 31: Tìm min của: 

Bài 32: Tìm min của: 

Bài 33: Tìm min của: 

Bài 34: Tìm min của: 

Bài 35: Tìm min của: 

Bài 36: Tìm max của :

Bài 37: Tìm max của: 

Bài 38: Tìm max cảu: 

Bài 39: Tìm max cảu: 

Bài 40: Tìm max của: 

Bài 41: Tìm max của: 

Bài 42: Tìm max của: 

Bài 43: Tìm min của: 

Bài 44: Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x: 

Bài 45: Tìm GTNN của: 

HD:

Ta có: 

Do: , Nên 

Bài 46: Tìm min của: 

Bài 47: Tìm GTNN của biểu thức: 

HD:

= dấu bằng khi a=1

Bài 48: Tìm GTNN của biểu thức : 

Bài 49: Tìm Min của: 

DẠNG 2: NHÓM ĐƯA VỀ TỔNG BÌNH PHƯƠNG

Bài 1: Tìm GTNN của: 

Bài 2: Tìm min của: 

Bài 3: Tìm min của: 

Bài 4: Tìm min của: 

Bài 5: Tìm min của: 

Bài 6: Tìm max của: 

Bài 7: Tìm min của: 

Bài 8: Tìm max của: 

Bài 9: Tìm min của: 

Bài 10: Tìm min của: 

Bài 11: Tìm min của: 

Bài 12: Tìm min của: 

Bài 13: Tìm min của: 

Bài 14: Tìm min của: 

Bài 15: Tìm min của: 

Bài 16: Tìm min của: 

Bài 17: Tìm min của: 

Bài 18: Tìm min của: 

Bài 19: Tìm max của: 

Bài 20: Tìm min của: 

Bài 21: Tìm GTNN của 

HD:

Ta có:  

Bài 22: Tìm min của: 

Bài 23: CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn:

Bài 24: Tìm min của: 

Bài 24: Tìm min của: 

Bài 25: Tìm min của: 

Bài 26: Tìm min của: 

Bài 27: Tìm min của: 

Bài 28: Tìm min của: 

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức : 

HD:



Bài 30: Tìm min của: 

Bài 31: Tìm min của: 

Bài 32: Tìm GTLN của biểu thức: 

Bài 33: Tìm GTNN của biểu thức: 

Bài 34: Tìm GTNN của biểu thức: 

DẠNG 3: PHÂN THỨC

Bài 1: Tìm min của: 

Bài 2: Tìm min của: 

Bài 3: Tìm max của: 

Bài 4: Tìm min hoặc max của: 

Bài 5: Tìm min hoặc max của: 

Bài 6: Tìm min hoặc max của: 

Bài 7: Tìm min hoặc max của: 

Bài 8: Tìm min hoặc max của: 

Bài 9: Tìm min hoặc max của: 

Bài 10: Tìm min hoặc max của: 

Bài 11: Tìm min hoặc max của: 

Bài 12: Tìm min hoặc max của: 

Bài 13: Tìm min hoặc max của: 

Bài 14: Tìm min hoặc max của: 

Bài 15: Tìm min hoặc max của: 

Bài 16: Tìm min hoặc max của: 

Bài 17: Tìm min hoặc max của: 

Bài 18: Tìm cả min và max của: 

Bài 19: Tìm min hoặc max của: 

Bài 20: Tìm min hoặc max của: 

Bài 21: Tìm min hoặc max của: 

Bài 22: Tìm min hoặc max của: 

Bài 23: Tìm min hoặc max của: 

Bài 24: Tìm min hoặc max của: 

Bài 25: Tìm min hoặc max của: 

Bài 26: Tìm min hoặc max của: 

Bài 27: Tìm min hoặc max của: 

Bài 28: Tìm min hoặc max của: 

Bài 29: Tìm min hoặc max của: 

Bài 30: Tìm min hoặc max của: 

Bài 31: Tìm min hoặc max của: 

Bài 32: Tìm min hoặc max của: 

Bài 33: Tìm min của: 

Bài 34: Tìm min hoặc max của: 

Bài 35: Tìm min hoặc max của: 

Bài 36: Tìm min hoặc max của: 

Bài 37: Tìm min hoặc max của: 

Bài 38: Tìm min hoặc max của: 

Bài 39: Tìm min hoặc max của: 

Bài 40: Tìm min hoặc max của: 

Bài 41: Tìm min hoặc max của:

Bài 42: Tìm min hoặc max của: 

Bài 43: Tìm min hoặc max của: 

Bài 44: Tìm min hoặc max của: 

Bài 45: Tìm min hoặc max của: 

Bài 46: Tìm min hoặc max của: 

Bài 47: Tìm min hoặc max của: 

Bài 48: Tìm min hoặc max của: 

Bài 49: Tìm min hoặc max của: 

Bài 50: Tìm min hoặc max của: 

Bài 51: Tìm min hoặc max của: 

Bài 52: Tìm min hoặc max của: 

Bài 53: Tìm min và max của: 

Bài 54: Tìm min hoặc max của: 

Bài 55: Tìm min hoặc max của: 

Bài 56: Tìm min hoặc max của: 

Bài 57: Tìm min hoặc max của: 

Bài 58: Tìm min hoặc max của: 

Bài 59: Tìm min và max của: 

Bài 39: Tìm min 

Bài 60: Tìm min hoặc max của: 

Bài 61: Tìm min hoặc max của: 

Bài 62: Tìm min hoặc max của: 

Bài 63: Tìm min hoặc max của: 

Bài 64: Tìm min hoặc max của: 

Bài 65: Tìm min hoặc max của: 

Bài 66: Tìm min hoặc max của: 

Bài 67: Tìm min hoặc max của: 

Bài 68: Tìm min hoặc max của: 

Bài 69: Tìm min hoặc max của: 

Bài 70: Tìm min hoặc max của: 

Bài 71: Tìm min hoặc max của: 

Bài 72: Tìm min hoặc max của: 

Bài 73: Tìm min hoặc max của: 

Bài 74: Tìm min hoặc max của: 

Bài 75: Tìm min hoặc max của: 

Bài 76: Tìm min hoặc max của: 

Bài 77: Tìm min hoặc max của: 

Bài 78: Tìm min hoặc max của: 

Bài 79: Tìm min hoặc max của: 

Bài 80: Tìm min hoặc max của: 

Bài 81: Tìm min hoặc max của: 

Bài 82: Tìm GTLN của biểu thức: , GTLN đó đạt được tại giá trị nào của x

HD:

Ta có : =>

Bài 83: Tìm GTNN của biểu thức: 

HD:

Ta có : 

Đặt  , ta có: 

Bài 84 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 

HD:

Ta có: 

Do  , Dấu bằng khi và chỉ khi x=0

Bài 85: Tìm GTNN của biểu thức : , với x#0

Bài 86: Tìm giá trị lớn nhất của 

Bài 87: Tìm giá trị lớn nhất của 

Bài 88: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 

Bài 89: Cho biểu thức , với x>0, Tìm x để M có GTNN

Bài 90: Tìm GTNN và GTLN của: 

Bài 91: Cho x, y là các số thực khác 0, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

Bài 92: Cho , Tìm GTNN của : 

Bài 93: Tìm GTNN của : 

Bài 94: Tìm GTNN của : 

Bài 95: Tìm GTLN của: 

Bài 96: Tìm GTLN của: 

Bài 97: Tìm GTLN của: 

DẠNG 4: TÌM MIN, MAX CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1: Tìm min của:  biết :

HD:

=

Bài 1: Cho các số x, y thỏa mãn:  , tìm GTNN của 

Bài 2: Tìm min của:  biết 

HD:



Bài 3: Tìm min của:  biết: a – b =1

HD:

 =

Bài 4: Tìm max của:  biết: 

HD:

Từ gt ta có: , thay vào 

Bài 5: Tìm min của:  biết: 

HD:

Từ gt=>  thay vào C ta được: 

Bài 6: Tìm min của:  biết: 

HD:

Từ gt=>  thay vào 

Bài 7: Tìm min của:  biết: 

HD:

Từ gt=>  thay vào E

Bài 8: Cho x+ y= 1, Tìm min của: 

Bài 9: Cho x+ y= 1, Tìm min của: 

Bài 9: Cho a, b>0 và a+b=4, tìm GTLN của 

Bài 10: Tìm min của: , biết: a+b=1 và a,b >0

HD:

Ta có: =



Bài 11: Cho x,y thỏa mãn: , Tìm max của: A= x.y

HD:

Từ gt ta có : => 

=> 

Bài 12: Cho hai số thực a,b 0, thỏa mãn: , Tìm min, max của: 

HD:

Từ gt ta có : 

=> 

Mặt khác : 

=> => 

Bài 13: Cho hai số x,y khác 0 thỏa mãn: , Tìm min, max của: 

HD:

Từ gt ta có : 

=> 

Mặt khác : 

=>

Bài 14: Cho 2 số x,y khác 0 thỏa mãn: , Tìm max, min của 

Bài 15: Cho x,y R khác 0 biết: , Tìm x,y để  đạt min và đạt max

HD:

Ta có : 

4 =

Mặt khác : 

Bài 16: Cho x,y là hai số thực thỏa mãn: . Tìm min của: 

Bài 17: Cho x,y >0 thỏa mãn: x+y =1, Tìm min của: 

HD:

Ta có : 

Vì x+y =1 nên , thay vào A

, Đặt xy=t khi đó : 

Bài 17: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: Tìm min của biểu thức: 

Bài 18: Cho x,y là hai số thực thỏa mãn: x+ 2y =3 tìm min của: 

HD:

Từ gt ta có :  thay vào 

Bài 19: Cho x,y là hai số thực thỏa mãn: , Tìm min và max của: 

HD:

Ta có : 

=> hay 

mặt khác : 

=>  hay 

Bài 20: Cho x,y thỏa mãn: x+ y =2, Tìm min của: 

HD:

Từ gt ta có :  thay vào A ta được : 

Bài 21: Cho các số thực x,y thỏa mãn: , Tìm max của: 

HD:

Ta có : x+y= - 4, nên ,

 thay vào 

Bài 21: Cho x, y là các số thực thỏa mãn:  , Tìm GTNN của 

Bài 22: Cho x, y, z  R, thỏa mãn: , Tìm max của: 

HD:

Từ giả thiết=>  thay vào A ta được :



Bài 23: Cho x,y,z  R thỏa mãn: . Tìm max của: 

HD:

Từ gt =>  thay vào 

Bài 24: Cho x,y  R thỏa mãn: , Tìm min và max của: 

HD:

Từ gt ta có :

=>=> 

=>=> 

Bài 25: Cho các số thực m,n,p thỏa mãn: , Tìm min, max của: 

HD:

Từ gt ta có : 

=> 

=> =>

Bài 26: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn: , Tìm min, max của: 

HD:

Ta có : , nên ta nhân 6 vào gt :



=> 



Bài 27: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt ta có : 

=> 

=> => 

Bài 28: Cho x,y,z thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt=>  thay vào =

Bài 29: Cho x,y,z thỏa mãn: x+y+z =3, Tìm min max của: 

HD:

Từ gt ta có :  => 

=>B=

Bài 30: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: , Tìm min max của 

HD:

Từ gt=>  thay vào 

Bài 31: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt ta có :  thay vào 

Bài 32: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: , tìm min của: 

HD:

Từ x + y= -2, ta có :  thay vào và y= - 2 - x thay vào 

Bài 33: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: , Tìm min của

HD:



Từ x+y= - 2, ta có: 

, , Thay vào b ta được : 

, thay 

Bài 34: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: , Tìm max của: 

HD:

Vì  nên  và thay vào 

Bài 35: Cho hai số x,y thỏa mãn: x+y =5, Tìm max của:



HD:



Vì x+y=5 nên , , 



Bài 36: Cho hai số x,y thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt=>=> => 

Bài 37: Cho các số thực x,y thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt=> => 

Bài 38: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: , Tìm min max của: 

HD:

Từ gt ta có: 

=> 

=> 

Bài 39: Cho các số x, y, z thỏa mãn: . Tìm min max của: 

HD:

Từ gt ta có:  =>khi đó :



Bài 40: Cho các số x, y, z thỏa mãn: x+y+z=1, Tìm max của: 

HD:

Từ gt =>  thay vào 

Bài 41: Cho x, y R, thỏa mãn: x+2y=1, Tìm max của: P = x.y

HD:

Từ gt=>  thay vào  

Bài 42: Cho x,y   thỏa mãn: x+y=10, Tìm min của: 

HD:

Ta có : 

Bài 43: Cho x,y  0, x+y=1, Tìm min, max của: 

HD:

Từ gt=>  thay vào 

Bài 44: Tìm min max của: , biết: 

HD:

Từ gt => 

=>

=> 

Bài 45: Cho , Tìm min, max của: 

HD:

Từ gt=> 

=> => 

Bài 46: Cho a,b,c không âm thỏa mãn: 3a+2c=51 và c+5b=21, Tìm max của A=a+b+c

HD:

Cộng theo vế giả thiết ta được : 

Do 

Bài 46: Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho 

a, CMR: 

b, Tìm GTNN của 

Bài 47: Cho a,b,c là các số không âm thỏa mãn: 2a+b=6-3c và 3a+4b=3c+4, Tìm min HD:

Cộng theo vế ta được :  do 

Khi đó: 

Bài 48: Cho , Tìm GTLN của biểu thức : 

HD:

Cộng theo vế của gt ta có:  do  nên 

Bài 49: Cho a+b+c=3, a,b,c>0, CMR: 

Bài 50: Cho x,y,z là các số thực nguyên dương thỏa mãn: , tìm min của: 

HD:

Ta có: 

MÀ , , , , , 

nên 

Bài 51: Cho Tìm max 

HD:

Ta có : 

=> , mặt khác 

Khi , dấu ‘=’ khi x = y = z = 3

Bài 52: Cho , Tìm min của: 

HD:

Ta có: 

=>, min 

Bài 53: Cho , , tìm min của: 

Bài 54: Cho a, b, c > 0, thỏa mãn: , Tìm min của: 

HD:



Vì 

Bài 55: Cho a,b,c>0, thỏa mãn: , CMR: 

Bài 56: Cho a+b+c+d=9, Tìm min của: 

HD:

Dự đoán dấu “=” , nên xét   =>

=>  dấu bằng xảy ra khi 

Bài 57: Cho ,Tìm max của: 

HD:

Ta có: 

, Max 

Bài 58: Cho , Tìm min của: 

HD:

Đặt , =>  và 

Bài 59: Cho a,b>0 thỏa mãn: , Tìm min của: 

HD:

Điểm rơi: ,=> 

mà => 

Bài 60: Cho a,b>0 thỏa mãn: , Tìm min của: 

HD:

Điểm rơi 

Khi đó: 

Bài 61: Cho x,y dương thỏa mãn: , tìm min của: 

HD :

Điểm rơi:  khi đó: , nên  khi đó:

, Mà: 

Bài 62: Cho a,b,c,d dương thỏa mãn: , Tìm min của: 

Bài 63: Cho x,y thỏa mãn: , Tìm min của: 

HD:

Từ gt ta có :  hoặc 

TH1: Ta có :  thay vào P

TH2: ta có:  thay vào P

Bài 64: Cho a,b,c dương và tổng bằng 3, Tìm max của: 

Bài 65: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: , Tìm min của: 

Bài 66: Cho a,b,c>0, thỏa mãn: , Tìm min 

Bài 67: Cho , tìm min của: 

Bài 68: Cho a,b,c dương thỏa mãn: , tìm min của: 

HD:

Ta có: , dấu “=” khi Vì đặt 

Bài 69: Cho , CMR P luôn dương với mọi x,y R

Bài 70: Cho x,y>0 thỏa mãn: , Tìm min của: 

Bài 71: Tìm min 

Bài 72: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn : , Tìm GTLN của :

HD:

Ta có : 

== 

Bài 73: Cho >0 Tìm GTNN của: 

HD :

Ta có:  dấu bằng khi  hay x=y=z

Bài 74: Cho x,y là các số thực khác 0 thỏa mãn: ,

Tính giá trị của biểu thức: 

Bài 75: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn : , Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

Bài 76 : Cho  , Tìm Min hoặc max của biểu thức : 

HD :

Ta có : 

Bài 77 : Cho , y > 0 , Tìm Min của 

HD :

Ta có : 

 , Điểm rơi cosi : 

Bài 78: Cho x > 0, tìm GTNN của: 

Bài 79: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:  , Tìm GTNN của: 

Dạng 5: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

Các BĐT phụ là:

+  dấu “=” khi a=b

+ 

+ 

Bài 1: Tìm min của biểu thức: 

HD:

Tách 

Dấu ‘’ = ’’ khi 

Bài 2: Tìm min của biểu thức:  với 

HD:

Tách 

Dấu ‘’=’’ khi 

Bài 3: Tìm min của: với x > 0

HD:

Tách , mà 

Bài 4: Tìm min của: 

Bài 5: Tìm min của:  với 

HD:

Ta có: , dấu bằng xảy ra khi 

Bài 6: Tìm min của:  với x >1

HD:

Ta có: , Dấu bằng khi 

Bài 7: Tìm min của:  với x > 0

HD:

Tách , dấu bằng xảy ra khi 

Bài 8: Tìm min của:  với 

HD:

Tách 

Dấu bằng khi 

Bài 9: Tìm min của: 

Bài 10: Tìm min của:  với 0 < x < 1

HD:

Ta có: , dấu bằng khi 

Bài 11: Tìm min của:  (x > 1)

HD:

, Dấu bằng khi 

Bài 12: Cho x,y >0, Tìm min của: 

HD:

Đặt , mà 

Bài 13: Cho a, b > 0. Tìm min của:  với x > 0

HD:

Ta có: 

Bài 14: Cho trước hai số dương a, b, các số dương x,y thay đổi sao cho , Tìm x,y để  đạt min, Tìm min S theo a,b

HD:

Ta có , min 

Dấu bằng khi  mà 

Bài 15: Tìm min của:  với 

HD:

Ta có: , dấu bằng khi 

Bài 16: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD:

Đặt => , thay vào VT

Ta được: 

Bài 17: Cho 0<x<1, Tìm min của: 

HD:

Ta có: , dấu bằng khi 

Bài 18: Cho x,y là số tự nhiên khác 0, sao cho x+y=11, Tìm min 

HD:

Từ gt ta có: , thay vào 

Bài 19: Cho , Thỏa mãn x+y=2016, Tìm min và max của: 

HD:

Ta có : ,

để xy lớn nhất thì  nhỏ nhất, do x,y mà x+y=2016 và x # y=>=> => Max B

Để xy nhỏ nhất thì  lớn nhất, mà , Giả sử : x < y=>

=> Min B

Bài 20: Tìm min của:  biết: x,y>0 và x+ y =1

HD:



Ta có : , và 

Khi đó : 

Bài 21 : Cho ba số dương a,b,c có tổng là 1, Tìm Min của : 

HD:

Ta có : , Từ 

 và 

mà =>

Vậy 

Bài 21: Cho a,b,c là các số dương, Tìm min của: 

Bài 22: Cho x,y,z , Thỏa mãn: , CMR: 

Bài 23: Cho a,b,c >0, thỏa mãn: , Tìm min của: 

Bài 24: Cho x,y > 0, thỏa mãn: x+ y= 1, Tìm min của: 

Bài 25: Cho x,y>0, 4xy=1 và x+y=1, Tìm min của: 

HD:

Ta có :, Co si =>  dấu bằng khi 

Bài 26: Cho x,y>0 và , Tìm min của: 

HD:

Gt=

Ta cm ngoặc vuông >0 với mọi x,y=> x+y+2=0

Mặt khác : , mà 

Bài 27: Tìm min của: 

Bài 28: Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 