**CHUYÊN ĐỀ TỈ SỐ THỂ TÍCH**

**GIẢI NHANH CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM THI TỐT NGHIỆP THPT**

**A. CÁC CÔNG THỨC GIẢI NHANH TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN**

**1. Tỉ số thể tích khối chóp tam giác**

Cho khối chóp tam giác  . Mặt phẳng  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  . Khi đó ta có .

**Ví dụ 1.** Cho khối chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  và  vuông góc với đáy. Gọi ,  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên các đường thẳng  và . Tính tỉ số thể tích .

**Lời giải**



Ta có .

Tương tự .

 

**2. Tỉ số thể tích khối chóp có đáy là hình bình hành**

Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm . Mặt phẳng  cắt các cạnh  lần lượt tại  và . Ta có

a) .

b) Đặt . Ta có .

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi là trung điểm , điểm  thuộc cạnh  sao cho . Mặt phẳng  cắt  tại . Tính tỷ số  .

**Lời giải**



Ta có 

Vậy 

**Ví dụ 3.** Cho khối chóp  có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng  chứa cạnh  và đi qua điểm  trên  chia khối chóp  thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỷ số .

**Lời giải**



Gọi  ta có  nên  .

Ta có 

Khi đó  .

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  có thể tích bằng , đáy là hình vuông;  và  hợp với đáy một góc bằng . Mặt phẳng  đi qua và vuông góc với , cắt các cạnh  lần lượt tại . Tính thể tích khối chóp .

**Lời giải**



Ta có . Tương tự  nên .

Mà  ( do  vuông tại ) nên 



**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  có đáy là hình bình hành; điểm *I* nằm trên  sao cho . Mặt phẳng  chứa cạnh cắt cạnh  lần lượt tại . Gọi  lần lượt là thể tích khối chóp  và . Tính giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích .

**Lời giải**



Đặt . Ta có . 

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi 

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm . Mặt phẳng  thay đổi luôn đi qua , trung điểm  của  và cắt các cạnh  và  lần lượt tại  và  Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỷ số .

**Lời giải**



Đặt .Ta có 

Nên . Từ đó 

Từ vì 

Xét 

Ta có  .

Vậy  đạt GTNN, GTLN lần lượt là .

**3. Tỉ số thể tích khối lăng trụ tam giác**

Cho lăng trụ  có các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho . Khi đó .

**Đặc biệt**: .

**Ví dụ 7.** Cho khối lăng trụ , có  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho . Đặt  là thể tích của khối đa diện,  là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số  .

**Lời giải**



Ta có 

 Đặt  . Suy ra 

**Ví dụ 8.** Cho khối lăng trụ  có thể tích bằng , các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho . Đặt  là thể tích của khối đa diện , tính giá trị của  để .

**Lời giải**



Ta có 

Suy ra 

**Ví dụ 9.** Cho khối lăng trụ  có thể tích bằng , các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho  Thể tích của khối đa diện .

**Lời giải**



Ta có 

Nên 

Mà .

Vậy 

***Nhận xét.*** Các bài toán dạng này sẽ xuất hiện nhiều khối không phải là các khối có công thức tính thể tích như chóp hay lăng trụ. Thay vì việc phải phân chia các khối này thành các khối có công thức tính, nay ta có ngay một kết quả rất nhanh và chính xác.

**Ví dụ 10.** Cho lăng trụ  có  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  và  . Mặt phẳng  cắt  lần lượt tại .

Chứng minh .

**Chứng minh**



Đặt ; 

Dễ thấy .

Ta có  . Tương tự ta có 

Cộng vế với vế cả 3 đẳng thức trên ta được 

Mà  nên . Ta được điều phải chứng minh.

Từ kết quả trên ta có 

***Nhận xét.*** Dựa vào kết quả trên ta thấy rẳng chỉ cần biết  cắt  tại vị trí điểm xác định là ta đã biết  chia lăng trụ thành hai phần với tỉ số bao nhiêu rồi.

**4. Tính chất 4: Tỉ số thể tích khối hộp**

Cho hình hộp . Mặt phẳng  cắt các cạnh lần lượt tại  sao cho . Khi đó ta có:

**a)** 

**b)**.

**Chứng minh**



**a.** Dễ thấy tứ giác là hình bình hành. Gọi  lần lượt là tâm của hình bình hành  và hình vuông . Ta có  là đường trung bình của hình thang  nên . Tương tự , do đó 

**b.** Áp dụng **Tính chất 3** ta có 

tương tự 

Do đó,

 

Chú ý : 

***Nhận xét.*** Một kết quả tương tự như **Tính chất 3.** Ở lăng trụ là tổng ba tỉ số chia ba, còn hình hộp là chia bốn.

Và cũng chỉ cần biết cắt đoạn thẳng nối hai tâm đáy ở đâu là ta đã tìm được tỷ số hai khối tạo thành do  cắt hình hộp. Tuy nhiên, **Tính chất 4** cũng khẳng định chỉ cần biết hai tỉ số ở hai cạnh bên đối diện của hình hộp mà cắt là ta cũng tìm được tỉ số thể tích các khối.

**Ví dụ 11.** Cho khối hộp chữ nhật  có thể tích bằng . Biết ;  và . Mặt phẳng  chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện nhỏ hơn.

**Lời giải**



 cắt  tại  . Từ giải thiết ta có .

Do đó 

Vậy .

**Ví dụ 12.** Cho hình lập phương  có  là trung điểm  Mặt phẳng  đi qua , cắt các cạnh  lần lượt tại ;  chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng  và . Tính tỉ số .

**Lời giải**



Từ giải thiết ta có . Nên .

**B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Cho khối chóp  đáy  là hình vuông cạnh ; . Gọi  lần lượt là trung điểm . Mặt phẳng  cắt  tại . Đặt , giá trị của  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 2:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành;  lần lượt là trung điểm của  và . Gọi  lần lượt là thể tích của các khối chóp  và  Tỷ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành,  là trung điểm của cạnh . Mặt phẳng  chứa  và song song với  lần lượt cắt các cạnh bên  và  tại  và . Tỷ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Điểm  nằm trên cạnh  sao cho . Mặt phẳng  chứa  cắt các cạnh  và  lần lượt tại  và . Gọi  và  lần lượt là thể tích của khối chóp  và . Giá trị nhỏ nhất của tỷ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành, điểm  thuộc cạnh , điểm  thuộc cạnh  sao cho . Mặt phẳng  thay đổi luôn chứa , cắt các cạnh  và  lần lượt tại  và  Biết thể tích của khối chóp  bằng , khi đó giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 6:** Cho khối chóp  có  là trọng tâm tam giác . Đường thẳng  đi qua , cắt các cạnh  lần lượt tại  và  Gọi  lần lượt là thể tích của các khối chóp  và . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỷ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 7:** Cho chóp . Trên các cạnh  lần lượt lấy các điểm . Gọi  là trọng tâm tam giác  và  cắt tại . Khi đó  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 8:** Cho khối lăng trụ . Gọi  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  và . Mặt phẳng  chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Đặt  là thể tích của khối chóp  và  là thể tích của khối đa diện . Tỷ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 9:** Cho khối lăng trụ  có thể tích bằng . Các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho . Thể tích của khối đa diện  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 10:** Cho khối lăng trụ đều . Gọi  là trung điểm của . Mặt phẳng  chia khối lăng trụ thành hai phần: phần chứa đỉnh  có thể tích bằng  và phần còn lại có thể tích bằng . Tỉ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 11:** Cho hình hộp . Trên các cạnh  lần lượt lấy ba điểm  sao cho . Biết mặt phẳng  cắt cạnh  tại. Tỉ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 12:** Cho hình hộp chữ nhật . Trên các cạnh  lần lượt lấy ba điểm  sao cho . Mặt phẳng  cắt cạnh  tại điểm. Tỉ số thể tích của khối  và khối  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 13:** Cho hình lập phương  có cạnh bằng . Mặt phẳng  cắt các cạnh  và  lần lượt tại . Biết . Thể tích của khối đa diện  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Câu 14:** Cho khối lập phương . Mặt phẳng  đi qua  cắt các cạnh  lần lượt tại  sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa đỉnh  bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tỉ số  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.D | 2.A | 3.A | 4.C | 5.D | 6.A | 7.A | 8.C | 9.D | 10.A |
| 11.A | 12.B | 13.A | 14.C |  |  |  |  |  |  |

**BÀI TẬP TỔNG HỢP**

**Câu 1:** Cho khối chóp  đáy  là hình vuông cạnh .. Gọi  lần lượt là trung điểm . Mặt phẳng  cắt  tại . Đặt , giá trị của  bằng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 2:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành.  lần lượt là trung điểm của  và . Gọi  lần lượt là thể tích của các khối chóp  và  Ttỷ số  bằng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành, gọi  là trung điểm của cạnh . Mặt phẳng  chứa  và song song với  lần lượt cắt các cạnh bên  và  tại  và . Tỷ số  bằng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 4:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Điểm  nằm trên cạnh  sao cho . Mặt phẳng  chứa cạnh  cắt các cạnh  và  lần lượt tại  và . Gọi  và  lần lượt là thể tích của khối chóp  và . Giá trị nhỏ nhất của tỷ số  bằng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 5:** Cho khối lăng trụ  có thể tích bằng . Các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho . Thể tích của khối đa diện  bằng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 