**CHUYÊN ĐỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG**

Bài 1: Cho ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H, CMR: 



HD:

Từ H kẻ 

Khi đó:

 (1)

Tương tự:

 (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:



Bài 2: Cho BHC có  tù, Vẽ BE vuông góc với CH tại E và CD vuông góc với BH tại D

CMR:



HD:

Kẻ: 

=> (1)

Tương tự ta có: 

=>  (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

VT

Bài 3: Cho ABC có góc A bằng 1200, AD là đường phân giác. CMR: 



HD:

Kẻ  là tam giác đều

 có :



(đpcm)

Bài 4: Cho A’, B’, C’ nằm trên các cạnh BC, AC, AB của ABC,

biết AA’, BB’, CC’ đồng quy tại M, CMR: 



HD:

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC

cắt BB’ tại D và cắt CC’ tại E, Khi đó:

 có  (1)

 có  (2)

Từ (2) và (2) ta có:

 (\*)

Chứng minh tương tự ta cũng có:

 có  (3)

 có: 

Từ (3) và (4) ta có:  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) =>  (đpcm)

Bài 5: Cho ABC, M là điểm tùy ý nằm trong tam giác các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắc các cạnh BC, AC, AB tại A’, B’, C’, CMR:



HD:

Từ A, M vẽ 

 có: 

Mặt khác: 



Chứng minh tương tự:



Cộng theo vế ta được đpcm

Bài 6: Cho ABC, M là điểm tùy ý nằm trong tam giác, đường thẳng đi qua M và trọng tâm G của tam giác cắt BC, CA, AB lần lượt tại A’, B’, C’, CMR : 

HD:

Gọi AM cắt BC tại A1, Từ M vẽ đường thẳng song song với AI cắt BC tại D,

với I là trung điểm BC

 có:  (1)

 có  (2)

Từ (1) và (2) ta có: 

Chứng minh tương tự ta có:



mà ta có: từ bài 6 =>

Bài 7: Cho ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

a, CMR: AEF đồng dạng ABC

b, H là giao các đường phân giác của DEF

c, 

HD:

a, Ta có: 

=> 

b, Chứng minh tương tự ta cũng có:

(c.g.c) và (c.g.c)

=> Do 

Mà: => HE là phân giác góc E

Chứng minh tương tự FH là phân giác góc F, HD là phân giác góc D

c,  (1)

và  (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được đpcm

Bài 8: Cho ABC, AD là đường phân giác của tam giác, CMR : 

HD:

Trên AD lấy điểm E sao cho:



 (1)

lại có:

 (2)

Lấy (1) - (2) theo vế ta được: 

Bài 10: Cho tứ giác ABCD, trong đó: , Gọi E là giao điểm của AB và CD, CMR: 

HD:

Trên nửa mặt phẳng bờ BE,

không chứa C vẽ tia Ex sao cho:

=> Ex cắt AC tại N => 

Ta có :

 (1)

Tương tự :  (2)

Lấy (2) - (1) theo vế ta được đpcm

Bài 11: Cho HBH ABCD đường chéo lớn AC, Từ C kẻ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD

CMR: Hệ thức: 

HD:

Vì AC là đường chéo lớn => ,

Kẻ 

=> 

 (1)

Tương tự kẻ 

 (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: 

Vì ( cạnh huyền - góc nhọn) => AK=HC

Bài 12: Cho ABC và 1 điểm O thuộc miền trong của tam giác, đường thẳng đi qua O và // với AB cắt BC tại D và cắt AC tại G, đường thẳng đi qua O và //BC cắt AB tại K và AC tại F, đường thẳng đia qua O và //AC cắt AB tại H và BC tại E

a, CMR:  b, CMR: 

HD:

a, 



Nên 

b, Ta có:

 và ,

Khi đó:



Bài 13: Cho ABC có đường trung tuyến BM cắt tia phân giác CD tại N, CMR : 

HD:

Vẽ DE / / BM ( )

 có  (\*)

 có DC là tia phân giác nên:  (1)

và  có DE//BM  (2)

Từ (1) và (2) ta có :  (\*\*)

Lấy (\*) - (\*\*), ta có : 

Bài 14: Cho ABC có các đường phân giác AD, BE, CF, CMR: 

HD:

 có AD là tia phân giác nên: ,

Tương tự: ,

Nhân theo vế ta được đpcm

Bài 15: Cho HBH ABCD đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC tại E, K, G

CMR:

a, 

b, 

c, Khi a thay đổi thì tích  có giá trị không đổi?

HD:

a,  có  (1)

 có  (2)

Từ (1) và (2) ta có: 

b, Từ: 

 có  (3)

Tương tự:  có  (4)

Khi đó: =>đpcm

c, ta có:  và 

Nhân theo vế ta được  không đổi

Bài 16: Cho ABC nhọn, H là trực tâm, CMR : 

HD:

Ta có:

 (1)

Tương tự: 

 (2)

 (3)

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được: đpcm

Bài 17: Cho ABC, M là điểm nằm trong ABC, Gọi D là giao điểm của AM và BC, E là giao điểm của BM và CA, F là giao điểm của CM và AB, đường thẳng đi qua M và // với BC cắt DE, DF lần lượt tại K và I, CMR : MI=MK

HD:

Gọi IK cắt AB. AC lần lượt tại N và Q

 có 

 có  (1)

 có ,

 có 

 (2)

Nhân (1) và (2) theo vế ta được:  (\*)

Tương tự ta cũng có:

 có  và  có 

Do đó:  (3)

Và:  có ,  có 

Do đó:  (4)

Nhân (3) với (4) ta được:  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) ta có MI = MK

Bài 18: Cho ABC, các đường trung tuyên BM, CN cắt nhau tại G, K là điểm trên cạnh BC, đường thẳng qua K và // CN cắt AB ở D, đường thẳng qua K và // với BM cắt AC ở E, Gọi I là giao điểm của KG và DE, CMR: I là trung điểm của DE

HD:

Gọi DK cắt BG tại H, KE cắt GC tại O và GK cắt HO tại J

Tứ giác HGOK có: => HGOK là hình bình hành

=> J là trung điểm của HO => HJ=OJ

 có  (1)

 có  (2)

Từ (1) và (2) ta có  (\*)

CMTT ta có:  có  (3)

 có  (4)

Từ (3) và (4) =>  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  có 

Lại có J là trung điểm HO=> I là trung điểm DE

Bài 19: Cho hình thang ABCD (AB//CD) có BC=BD, Gọi H là trung điểm của CD, đường thẳng đi qua H cắt AC, AD lần lượt tại E và F, CMR: 



HD:

Gọi BF cắt DC tại K, BE cắt DC tại I, và EF cắt AB tại G

 có  (1)

 có  (2)

Từ (1) và (2)

 (\*)

Tương tự:

 có  (3)

 có  (4)

Từ (3) và (4) ta có:  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) => , Mà DH=HC (gt)=>DK=IC

Mặt khác: BD=BC(gt)=>  cân=> 

=>  đpcm

Bài 20: Cho ABC có G là trọng tâm, một đường thẳng bất kỳ qua G, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N, CMR:

HD:

Gọi O là trung điểm của BC,

Kẻ BH, CK lần lượt // MN 



 có  (1)

 có  (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:



Bài 21: Cho tứ giác ABCD, có M, N lần lượt là trung điểm của các đường chéo BD và AC (M # N)

đường thẳng MN cắt AD, BC lần lượt tại E và F, CMR: AE.BF=DE.CF

HD:

Từ A kẻ đường thẳng song song với BD cắt EF tại H

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt EF tại G

 có  (1)

 có  (2)

Mặt khác:  (3) và 

Từ (1), (2) và (3) ta có: 

Bài 22: Cho tam giác ABC, AD là đường trung tuyến, M là điểm nằm trên đoạn AD, gọi E là giao điểm của BM và AC, F là giao điểm của CM và AB, CMR: EF //BC

HD:

Lấy N trên tia đối của tia DM sao cho MD= ND

=> Tứ giác BMCN là hình bình hành => 

 có  (1)

 có  (2)

Từ (1) và (2) => => 

Bài 23: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CB, O là giao điểm của AM và DN, biết , CMR: ABCD là hình bình hành



HD:

Vẽ đường thẳng đi qua O và //AD cắt DC tại H

Vẽ đường thẳng đi qua M và // BC cắt DN tại K

Vì M là trung điểm của DC nên K là trung điểm DN

 có  (1)

Vì 

Tương tự ta có:  có , mà  (2)

Từ (1) và (2) => 

Chứng minh tương tự=> AB//DC=> ABCD là hình bình hành

Bài 24: Cho tứ giác ABCD, có E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, đường thẳng EF cắt các đường thẳng AB, CD lần lượt tại M và N, CMR: MA.NC = MB.ND



HD:

Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt ME tại G

Từ D kẻ đường thẳng song song BC cắt EF tại H

=>  có 

 có  (1)

Ta lại có: 

Thay vào (1) ta được:

đpcm

Bài 25: Cho tam giác ABC đều, gọi M, N lần lượt là các điểm trên AB, BC sao cho BM =BN, gọi G là trọng tâm của tam giác BMN, I là trung điểm của AN, P là trung điểm của MN

a/ CMR: GPI và GNCđồng dạng

b/ CMR: IC vuông góc với GI

HD:

a, Vì G là trọng tâm nên ,

Lại có : MA=NC=>  và 

Vì ABC đều => BMN đều

=> 

Và 



b,  có  theo câu a=> GIC vuông tại I=> IC GI

Bài 26: Cho tam giác ABC nhọn, trên các đường cao BE, CF lấy các điểm theo thứ tự I, K sao cho 

a, CMR: AI=AK

b, Cho , Tính diện tích tam giác AEF

HD:

a,  (1)

Chứng minh tương tự:

 (2)

Lại có

 (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:



B, Vì 

=> 

Bài 27: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm của AC, F là hình chiếu của I trên BC, trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng chứa AC, vẽ tia Cx vuông góc với AC cắt IF tại E, Gọi giao của AH, AE với BI theo thứ tự tại G và K

a/ IHE và BHA đồng dạng

b, BHI và  AHE đồng dạng

c, AE vuông góc với BI

HD:

a, Ta có: AHC vuông cân tại H,

có I là trung điểm AC => 

=> I nằm trên đường trung trực của HC

=> IF là đường trung trực

=> EH=EC=>IHE=ICE ( c.c.c)

=> 

Mặt khác: 

b, Theo câu a ta có: IHEBHA

=> và 



c, Giả sử: AE giao với HI tại M => 

Từ câu b=> 

Bài 28: Cho HCN ABCD, nối AC, kẻ DE vuông góc với AC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE, DE, nối MN, ND, CP, CMR:

a,AND và DPC đồng dạng

b, ND và MN vuông góc với nhau

HD:

a, Ta có: ( cùng phụ  )

và 

mà AE= 2. AN và DE= 2. DP



b, Ta có : 

=> Tứ giác  là hình bình hành => 

Lại có :



Bài 29: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, Gọi P và Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH, CMR:

a, ABP và  ACQ đồng dạng

b, AP vuông góc với CQ



HD:

a, Ta có:  ( Phụ  )

=> 

mà AH=2. AQ, và BH= 2. BP

=> 

b, Gọi AP cắt CQ tại K, Vì 

mà 

Bài 30: Cho ABC cân tại A, H là trung điểm của BC, I là hình chiếu của H trên AC và O là trung điểm của HI

a, CMR: BIC và AOH đồng dạng

b, AO vuông góc với IC

HD:

a, Ta có:  (Cùng phụ ) (1)

lại có : 

Mà 

Thay vào ta được :  (2)

Từ (1) và (2) ta có : 

b, Vì theo câu a nên

 và 

Bài 31: Cho ABC có ba góc nhọn, các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, Gọi H, O G theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm ABC

a, Tìm các  đồng dạng với AHB

b, CMR: HAG đồng dạng với OMG

c, 3 điểm H, O, G thẳng hàng

HD:

a, Dự đoán ,

Chứng minh:

Vì 

Mặt khác:  ( cùng vuông góc BC)

=> 

Tương tự ta có:

BH//ON vì cùng vuông góc với AC

=> 

b, ta có: 

Mặt khác:  Và 

c, Vì 

Mà  thẳng hàng

Bài 32: Cho ABC vuông cân đỉnh A, BD là đường trung tuyến, Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E, CME: BE=2EC

HD:

Vẽ đường cao AH 

ABC vuông cân nên AH là đường trung trực

=> G là trọng tâm => BG=2. GD

Cần chứng minh GE// DC

ABE có G là giao 2 đường cao

=> G là trực tâm => 

BDC có GE// DC => 

Bài 33: Cho ABC, trên AC lấy 2 điểm D và E sao cho AD=DE=EC, trung tuyến AM cắt BD tại P và trung tuyến CN cắt BE tại Q

a, CMR: Q là trung điểm của CN

b, PQ//AC

c, 

HD :

a, Vì  và ND//BE => QE// ND

mà E là trung điểm DC nên Q là trung điểm NC

b, Chứng minh tương tự => P là trung điểm của AM,

Gọi G là trọng tâm của ABC => PG=AG - AP =



Tương tự 

c, Tự chứng minh

Bài 34 : Cho ABC cân tại A, đường thẳng vuông góc với BC tại B, cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C là điểm D, vẽ BE vuông góc với CD tại E, Gọi M là giao của AD và BE, vẽ EN vuông góc với BD tại N, CMR : MN//AB, M là trung điểm của BE

HD :

ta có : AC// BE =>  (1)

lại có : NE//BC =>  (2)

từ (1) và (2) ta có :

Giả sử : AC cắt BD tại I

Ta có: 

mà  => ABI cân tại A

=> BA là đường trung trực => AI =AC

Dễ dàng chứng minh được M là trung điểm BE

Bài 35 : Cho hình vuông ABCD, Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, AD và P là giao điểm của BN, CM

a, CMR : BN vuông góc với CM

b, CMR: DP=DC

c, DP cắt AB tại F, CMR: F là trung điểm của MB

HD:

a, Ta có: BAN = CBM (c.g.c) => mà



b, Kéo dài BN cắt DC tại I

=>  có 

=>I là trung điểm IC,

PIC vuông có D là trung điểm IC => PD =PC

c, Tự chứng minh

Bài 36: Cho ABC (AB<AC) qua trung điểm M của cạnh BC, kẻ đường thẳng // với đường phân giác góc A, đường thẳng này cắt đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại D và E, CMR: BD=CE

HD:

Giả sử AK là tia phân giác góc A

ADE cân tại A => AD = AE

Ta có: BDM có AK// DM => ,

Mặt khác CAK có 

Mà BM= CM =>  và 

Bài 37: Cho HCN có AD = 2.DC, M alf điểm trên AB, tia phân giác của góc  cắt BC tại E, CMR: CM = AM+2EC

HD:

Lấy N trên tia đối tia CB sao cho AM= 2CM

=> 

Lại có: DM=2.DN (1)

và  cân tại N

=> ND=EN=EC+CN

=> AM+2. EC=2CN+2.EC=2.ND (2)

từ (1) và (2) ta có : DM = 2.DN= AM+2EC

Bài 38: Cho hình vuông ABCD, gọi O là giao của hai đường chéo, lấy G trên BC, H trên CD sao cho , Gọi M là trung điểm của AB, CMR:

a, HOD đồng dạng với OGB

b, MG // AH



HD:

a, ta có: , Mặt khác:



=> 

b, Theo câu a, 

=> , Đặt MB=a, AD=2a

=> 



=> , mà

 ( đồng vị) => AH//MG

Bài 39: Cho HCN ABCD, từ 1 điểm P thuộc đường chéo AC, dựng HCN AEPF (E AB, FAD), CMR:

a, EF//DB

b, BF và DE cắt nhau tại Q nằm trên AC



HD:

a, Ta có: EP//BC =>  và



b, Gọi I, O lần lượt là tâm của 2 HCN

,

Mà 2.IE = EF, 2. DO= DB=> 

và 

Mà => A, Q, O thẳng hàng=> Q nằm trên AC

Bài 40: Cho hình vuông ABCD, trên BC lấy E sao cho , trên tia đối của CD lấy điểm F sao cho , M là giao AEvà BF, CMR: AM vuông góc với CM

HD:



Gọi G là giao AM và DC,

H là giao của AB và CM

GAD có 



Lại có: AB//DG=> 

Khi đó: ABE =  CBH (c.g.c) => 

Bài 41: Cho tứ giác lồi ABCD, từ 1 điểm E thuộc cạnh AD và G thuộc cạnh AB, ta kẻ các đường thẳng song song với đường chéo AC, các đường thẳng này cắt CD, BC lần lượt tại F và H

a, So sánh các tỉ số các đoạn thẳng do BD định ra trên EF và GH

b, CMR: EG và HF cắt nhau tại I nằm trên BD



HD:

a, Gọi O là giao điểm 2 đường chéo AC, BD

BD cắt EF, GH lần lượt tại N và M

=> 

Tương tự ta cũng có: 

Từ hai điều trên ta có: 

b, Giả sử : GE cắt BD tại I’

=>  (1),

Tương tự Giả sử HF cắt BD tại I’:  (2)

Theo câu a ta có:  (3)

Từ (1), (2) và (3) => , hay I là giao điểm GE, HF, DB

Bài 42: Cho hình vuông ABCD, trên AB lấy điểm M, vẽ BH vuông góc với CM, nối DH, vẽ HN vuông góc với DH (N BC)

a, CMR: DHC và NHB đồng dạng

b, CMR: AM.NB=NC.MB

HD:

a, Ta có: 

lại có:  ( Phụ  )

và  =>

b, Ta có: ,

Mà 

mà BC= DC => MB = NB

=> AM = NC => AM.NB=NC.MB đpcm

Bài 43: Cho hình vuông ABCD cạnh a, một đường thẳng d bất kỳ đi qua C cắt AB tại E và AC tại F

a, CMR tích BE.DF không đổi khi d di chuyển

b, CMR: 

c, Xác định vị trí của d để DF=4.BE

HD:

a, 

=> BE. DF không đổi

b, Ta có:

 (1)

 (2)

Nhân (1) và (2) theo vế ta được: ,

Vì BC= DC

c, Để 

Bài 44: Cho ABC có AB=4cm, AC=8cm, BC=6cm, hai tia phân giác trong AD và BE cắt nhau tại O, CMR đoạn nối điểm O với trọng tâm G của ABC thì song song với BC

HD:

 có AD là đường phân giác nên:





ABD có OB là tia phân giác nên:

 (1)

Gọi AM là đường trung tuyến của ABC,

G là trọng tâm của ABC => 

Từ (1) và (2) => 

Bài 45: Cho ABC vuông tại A, vẽ ra phía ngoài tam giác đó các ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C, Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao của AC và BF, CMR:

a, AH=AK

b, 

HD:

a, Ta có: AC//BD ( cùng vuông góc với AB)

=>  (1)

Tương tự:

AB // CF ( cùng vuông góc với AC)

 (2)

Từ (1) và (2) ta có: AH=AK

b, ta có :

 (3)

Và  (4)

Từ (3) và (4)=> , mà AH=AK=> đpcm

Bài 46: Cho tam giác ABC nhọn, Các đường cao AD, BE, CF, Gọi I, K, M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA, CMR: 4 điểm I, K, M, N thẳng hàng



HD:

Ta có:



Tương tự:



Mặt khác: ,

Khi đó I, K, M, N thẳng hàng

Bài 47: Cho ABC vuông tại A, đường cao AH, E là điểm bất kỳ trên AB, kẻ HF vuông góc với HE (F trên AC)

a, CMR: BEH và AFH đồng dạng

b, CMR: HE.BC=EF.AB

c, Cho AB = 6cm, AC=8cm, diện tích HEF =6cm2, Tính các cạnh của HEF



HD:

a, Ta có:  và => 

b, Theo câu a ta có:



=>  (1)

Mặt khác:



 (2)

Từ (1) và (2) => 

và 

c, 

mặt khác: 

Mà BC=10=> 

Bài 48: Cho ABC vuông tại A, đường cao AD, đường phân giác BE, giả sử AD cắt BE tại F, CMR: 

HD:

 có BF là tia phân giác

=>  (1)

ABC có BE là phân giác :

 (2)

Mà  ADBCAB ( g . g )

=>  (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: 

Bài 49: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC của hình chữ nhật, E là điểm trên tia DC, K là giao EM và AC, CMR: MN là tia phân giác 

HD:

Gọi H là giao KN với DC

O là giao MN với AC

Khi đó MO=ON

=>

=>

=> NEH cân tại N => 

mà  ( Góc ngoài) = đpcm

Bài 50: Cho ABC vuông tại A, AH là đường cao, D, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, đường thẳng vuông góc AB tại D cắt CE ở F, CMR BCF vuông

HD:

Lấy M là giao của DE với AC => M là trung điểm AC

ta có :

 (1)

Mặt khác :

FD// AC ( cùng vuông góc với AB)

=>  (2)

Từ (1) và (2) ta có :

, Mà  vuông

Bài 51: Cho tam giác ABC (AB<AC), D và E lần lượt trên các cạnh Ab và AC sao cho BD=CE

Gọi K là giao điểm của DE và BC, CMR: 



HD:

Từ E vẽ EF / / AB (F nằm trên BC)

KBD có EF// BD =>  (1)

tương tự ta có: ABC có EF // AB

=>  (2)

Từ (1) và (2) => đpcm

Bài 52: Cho ABC nhọn, AD là đường cao, H là điểm trên đoạn AD, Gọi E là giao điểm của BH và AC, F là giao điểm của CH và AB,

CMR: DA là tia phân giác của 

Qua H vẽ đường thẳng // BC cắt AB tại M,

Cắt DF tại N, DE tại I, AC tại K

=> NI //BC, AD => DH NI

Xét các FDC, FBC, EBC, EBD, ABD, ADC, ABC ta có :

 , , , , 

, , , 



 có HD vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên=> NDI cân

Vậy DH là tia phân giác

Bài 53 : Cho ABC có AD là đường trung tuyến, Trọng tậm là điểm G, một đường thẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm E, và F, CMR :

HD :

Kẻ BM// EF, CN//EF

Khi đó ta có :





Bài 54 : Cho hình thang ABCD, đáy lớn CD và O là giao điểm của hai đường chéo, đường thẳng qua B và //AD cắt AC tại E, đường thẳng qua C //AD cắt BD tại F, CMR :

a, 

b, 

HD :

a, Ta có : AB//CD =>  (1)

 (2)

Từ (1), (2) => 

b,  (3)

và 

Bài 55 : Cho ABC, Lấy E trên BC sao cho EC=2.BE, Lấy điểm F trên AB sao cho AF=2BF

a, CMR : EF//AC và EF =AC

b, Gọi I là giao điểm của AE và CF, CMR: 

c, Thay điều kiện EC=2BE và AF=2.BF bằng điều kiện AE, CF thứ tự là hai tia phân giác của góc A và C của ABC thì ABC cần có điều kiện gì để EF //BC

HD:

a, Ta có: , Do đó:



b, Vì 

c,  Khi  (1)

Mà AE là tia phân giác góc A  (2)

CF là tia phân giác góc C  (3)

Từ (1), (2) và (3)=> => ABC cân tại B

Bài 56 : Cho ABC, kẻ tia phân giác AD, trên tia đối của tia BA, lấy điểm E sao cho BE=BD và trên tia đối của tia CA, lấy điểm F sao cho CF=CD

a, CMR : EF //BC

b, CMR : ED là tia phân giác góc , FD là tia phân giác góc 

HD :

a, Vì AD là tia phân giác góc A nên: 

Theo gt ta lại có: BD=BE, DC= CF

=> 

b,  cân => ,

mà 

vậy ED là tia phân giác góc 

Chứng minh tương tự cho FD là tia phân giác góc 

Bài 57 : Cho ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, Gọi D và E theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua AB và AC

a, CMR : Tứ giác BCED là hình thang

b, CMR: 

c, Cho AB =3cm, AC= 4cm, Tính DE và Diện tích DHE



HD:

a, Dễ dàng chứng minh 3 điểm D, A, E thẳng hàng và



Vậy BCED là hình thang

b, 

A là trung điểm DE

nên 

c, Theo định lý Pi ta go thì :





 Vì DE=2.AH=> DE=4,8

ABC HDE, Mà 

Bài 58: Cho HCN ABCD, Trên tia đối của tia AD lấy điểm F sao cho AF =AB, Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE=AD, Gọi N là giao điểm FC với AB và M là giao điểm EC và AD

CMR: MD=BN

HD:

ta có:



 (1)



 (2)

Từ (1) và (2) => NB= MD

Bài 59: Cho ABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm AC, F là hình chiếu của I trên BC,

Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng chứa AC vẽ tia Cx vuông góc AC cắt IF tại E, Gọi giao điểm AH, AE với BI theo thứ tự là G, K, CMR:

 a, IHEBHA

b, BHIAHE

c, AE vuông góc với BI

HD:

a, Chứng minh 

Ta có: =>IF là trung trực HC



 (1)

ta lại có :  ( Cùng phụ góc A )

=>  (2)

Từ (1) và (2) => 

b, Từ câu a, 

Mà  => 

c, Vì 

Xét  có  =>  tại K => 

Bài 60 : Cho HCN ABCD (AB<BC), kẻ , Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AE, DE

a, Tứ giác MNPC là hình gì ?

b, CMR : 

c, CMR : NA.PC=ND.PD

d, Khi ABCD là hình vuông hãy xác định hình dạng của MND

e, Tính diện tích của HCN ABCD biết đường chéo là 4cm và góc nhọn tạo bởi hai đường chéo là 



HD:

a, Ta có:

MNPC là hình bình hành vì NP // MC ( do cùng // AD)

và 

b, Gọi F là trung điểm AD

=> NF là đường trung bình => 

Mà DE

=> NFC vuông có I là trung tuyến

=>  vuông tại N

=> 

c, 

d, ABCD là hình vuông thì NMD là vuông cân tại N

e, Diện tích ABCD bằng 4cm 2

Bài 61 : Cho hình vuông ABCD có cạnh a, Gọi I là trung điểm AB, Trên tia đối của tia CD đặt điểm M sao cho CM=a, Trên tia đối của tia CB đặt điểm N sao cho CN =2a, trên tia đối của tia DC đặt điểm P sao cho DP =2a, trên tia đối của tia AD đặt Q sao cho AQ=3a, Gọi E,F, R lần lượt là trung điểm PN, QM, PQ, Gọi S là giao điểm QM và PN

a, CMR : 

b, MPQ là tam giác gì ? Tứ giác MNPQ là tứ giác gì ?

c, CMR : 4 điểm E, D, I, F thẳng hàng

d, CMR: I là trung điểm NQ

e, CMR: 3 đường thẳng SR, QN, CD đồng quy

HD:

a, 

b,  cân tại Q

( vì QD vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

=> Tứ giác MNPQ là hình thang

c,  (1)

EF là đường trung bình của hình thang MNPQ

=> EF//PQ (2)

DF là đường trung bình của MPQ

=> DF// PQ (3)

Từ (1), (2) và (3) => E, D, I, F thẳng hàng

d, Do AQ =BN và AQ // BN

Nên AQBN là hình bình hành,

=> AB và QN cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường mà I là trung điểm của AB

=> I là trung điểm QN

e, Theo cmt ta có: MNPQ là hình thang, Gọi O là giao điểm MP và NQ

Ta lại có NP giao MQ tại S => S, O, R thẳng hàng

=> SR, Qn, CD đồng quy tại O

Bài 62: Cho HBH ABCD, một đường thẳng d quay quanh A, cắt BC, CD lần lượt tại E và F, CMR: tích BE.DF không đổi



HD:

Từ F vẽ đường thẳng song song với AD cắt AB tại I

 có 

 ( không đổi)

Bài 63: Cho ABC (AB<AC) trên AC lấy điểm D sao cho CD = AB, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC: CMR: 

HD:

Vẽ tia phân giác góc A cắt BC tại E

Lấy F đối xứng với E qua N

AE là tia phân giác => ,

Mà 



=> ADFE là hình thang có MN là đường trung bình => 

Bài 64 : Cho Tứ giác ABCD, O là giao điểm của AC và BD, CMR : 

HD :

Vẽ 

ta có :

 (1)

Mặt khác  (2)

Từ (1) và (2) => đpcm

Bài 65 : Cho hình thang ABCD (AB//CD), Có AB=a, CD= b, M, N trên các cạnh AD và BC sao cho MN//CD và , cmr : 

HD :

Qua M vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD lần lượt tại N và I

Khi đó MNCI là hình bình hành

=> DI= b - MN

Tương tự : NA = MN - a

Xét MDI có 







 đpcm

Bài 66 : Cho ABC nhọn, các đường cao AD, BE cắt nhau tại H, đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt BE ở K, CMR : 



HD :

Vì AD cắt BE tại H=> H là trực tâm

=> 



Bài 67: Chứng minh rằng ABC vuông nếu các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I thỏa mãn: 

HD:

Nối AI=> AI là tia phân giác góc A

 có AI là tia phân giác

=>  (1)

Mặt khác : 



Thay vào (1) ta được :



Tương tự :  Với gt 

=> 

Vậy ABC vuông tại A

Bài 68 : Cho hình thoi ABCD có , P là 1 điểm thuộc cạnh AB, N là giao điểm của hai đường thẳng AD và CP

a, CMR : 

b, Gọi M là giao điểm của Bn và DP, Tính 

c, CMR : 

HD :

a, Ta có



Do AB =BC=CD=> 

b, Ta chứng minh được 

c, 

đpcm.

Bài 69: Cho  ABC nhọn có AB=AC, và hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H, CH cắt DE tại I

1. CMR : HIE DIC
2. Đường thẳng đi qua E song song với BC cắt CH ở F, CMR :  và  AB

Bài 70: Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O, AB=6cm, BC=8cm, Kẻ AE vuông góc với BD, Tia AE cắt BC tại F

1. Tính BD, AE, BE, BF và diện tích BÈ
2. CMR: CD.AB=BE.BD=BF.BC
3. Kẻ EH vuông góc với AB, EK vuông góc với AD, CMR: AE=HK và AH.AB=AK.AD
4. Tia KH cắt DB ở T, CM AC vuông góc với HK và TH.TK=TD.TB

HD:

1. Xét ADB và BAF có :





 , => ADB BAF (g.g) => 

Xét ABD vuông tại A: 

Xét ABF vuông tại B: có BE  AF 

Chứng minh tương tự: =>

Và 

1. ABD vuông tại A có AE vuông góc với BD tại E=> 

Vì ( AB=CD)

Có: BF.BC=4,5.8=36=AB2  =>AB.CD=BF.BC=BE.BD( đpcm)

1. Ta có:  (1)

Mà:  => (2)

Từ (1) và (2) => AHEK là hình chữ nhật=> AE=HK

Xét AKH vuông vag HEA vuông có:

AK=HE

AH cạnh chung

=>AKH=HEA (Hai cạnh góc vuông)=> 

Vì EH  AB, BC AB=>EH // BC=>

Mà  ( Cùng phụ  ) => 

Xét HAK và BAD có:

Góc A chung



=>HAK DAB (g.g)=>  (đpcm)

d) Ta có:  (3)

Xét BDA vuông và CAD vuông có:

AD cạnh chung

AB=DC

=>BDA=CAD =>  (4)

Từ (3) và (4) ta được: 

Mà 

Gọi M là giao điểm của HK và AC.

AMK có: 

Ta có:  ( đối đỉnh)

 => hay 

Xét THB và TDK có:

Góc T chung

 => ( đpcm)

Bài 71: Cho ABC nhọn có các đường cao AD< BE, CF cắt nhau tại H

1. CMR: BDH  BEC suy ra BH.BE+CH.CF=BC2
2. Chứng minh H cách đều ba cạnh cảu DEF
3. Tính tổng: 
4. Trên các đoạn thẳng HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho HM= CN. CMR đường trung trực của MN luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài 72: Cho  ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

1. CMR: ABD và ACE đồng dạng
2. CMR: BH.HD=CH.HE
3. Nối D với E, Biết BC=a, AB=AC=b, Tính DE theo a và b

HD:

1. Xét  ABD và  ACE

Có  là góc chung





1. Xét BHE và CHD có :

 (đối đỉnh)



 

1. Khi AB=AC=b, thì ABC cân tại A => 

Gọi giao điểm của AH và BC là F

 , 



Bài 73: Từ ba đỉnh A, B, C của ABC ta vẽ ba đường thẳng song song với nhau, Chúng lần lượt cắt BC và các đường thẳng CA, AB tại D, E, F, CHứng minh rằng:

a) 

b) 

HD:

1. Theo hệ quả của định lí ta let ta có:

 , Cộng từng vế ta được:

 , chi hai vế cho AD ta được:



1. Từ AD//BE//CF, lập luận chứng minh được:



Suy ra 

Bài 74: Cho ABC vuông cân tại A, CM là đường trung tuyến (M nằm trên AB), Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H, Tỉnh tỉ số 

HD:

Giả sử: AH cắt MC tại I

Gọi trung điểm của BH là K thì MK//AH

Dễ thấy ba tam giác vuông  AMC, IAC, IMA đồng dạng mà AC=2. AM

Nên IC=2. IA=4. IM

Suy ra: 

Bài 75: Cho hình thang (AD//BC). Một điểm M di động trên đường chéo AC, Chứng minh :



HD:

Kẻ Cx // AB cắt tia BM tại P => 

Ta có: 

Ta lại có:  ,

Vậy 

Bài 76: Cho ABC đều, Gọi M là trung điểm cảu BC, Dựng góc  , quay quanh điểm M sao cho hai cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E, CMR:

1. 
2. DM, EM lần lượt là tia phân giác góc: 
3. Chu vi ADE không đổi

HD:

1. Trong  BDM, ta có: 

Vì  =>

Ta chứng minh được: BMD và CEM đồng dạng

 (1)

Vì 

b) Từ (1) suy ra:  , Mà BM=CM nên ta có: 

Ta chứng minh được:  =>  . do đó: DM là phân giác 

Chứng minh tương tự ta có:  là phân giác góc 

1. Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC,

Chứng minh DH=DI, EI=EK

Tính chu vi ADE bằng 2. AH không đổi

Bài 77: Cho hình thang ABCD có AB//CD và AB<CD, Qua A vẽ đường thẳng AK//BC  , Qua B vẽ đường thẳng BI//AD  , BI cắt AC ở F, AK cắt BD ở E, CMR:

1. EF//AB

b) 

HD:

a)  AEB KED (g.g) 

AFB CFI (g.g)  , Mà KD = CI (= CD - AB)



Bài 78: Cho hình thang ABCD (AB//CD) Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của AD với BC, Gọi M và N là trung điểm của AB và CD

a) CMR: 

b) Chứng tỏ rằng: I, M, O, N thẳng hàng

c) Giả sử  và diện tích hình thang ABCD bằng a. Hãy tính diện tích của tứ giác IAOB theo a

HD :

a)  OAB OCD =>

IAB IDC =>



b)  và  =>OAM OCN

 => M, O, N thảng hàng

 và  là góc chung =>IAM IDN=> I, M, N thẳng hàng

 , Vậy I, M, O, N thẳng hàng

c) Vì  

Lại có:  





Bài 79: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD, Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC, Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống AB và AD

1. Tứ giác BEDF là hình gì?

b) CMR: 

c) Chứng minh rằng: 

HD:

a) Ta có: 

Dễ thấy BEO=DFO (g.c.g) => BE=DF

Suy ra BEDF là hình hình hành

b) Ta có:  =>CBH  CDK (g.g)



c) Chứng minh: AFD  AKC (g.g)



Lại có:  CFD AHC (g.g)

 Mà 



Bài 80: Cho ABC có  , Các phân giác trong lần lượt là AD, BE, CF

a) CHứng minh rằng: 

b) Tính 

HD:

a) Từ B kẻ BK//AC, cắt AD tại K, ta có:  ABK đều, dó đó: 



b) Áp dụng tính chất đường phân giác: ta có:  ,

Từ câu a , Nên DE là phân giác 

Chứng minh tương tự DF là phân giác  , từ đó suy ra : 

Bài 81: Cho ABC, trên các cạnh AB và AC lấy các điểm M và N sao cho:  , Gọi D là giao điểm của Bn và Cm, E là giao điểm của MN và BC

a) Tính 

b) Tính tỉ số diện tích tứ giác AMDN và ABC

HD:

a) Kẻ CK //AB cắt ME tại K

Chứng minh 

b) Chứng minh được: 

Từ M kẻ MF// AC cắt BN tại F

Ta chứng minh được:  , Từ đó suy ra: 

Ta cũng có: 



Bài 82: Cho hình thoi ABCD, Có  , Gọi M là 1 điểm nằm trên cạnh AB, Hia đường thẳng DM và BC cắt nhau tại N, CM căt AN tại E, chứng minh rằng:

a) AMD và CDN đồng dạng và 

b) AME và CMB đồng dạng

HD:

a) Xét AMD và CDN có:

 ( so le trong)

 (so le trong) => AMD  CDN (g.g)

 , Vì  đều=> 



b) Vì 

Chứng minh 

Mà 

Xét AME và CMB có:

 ( đối đỉnh)



Bài 83: Cho ABC vuông tại A, đường cao AH, Cho biết AB=15cm và AC =20cm

a) Chứng minh rằng:  , Tính BC và AH

b) Kẻ  , Chứng minh rằng AMN và ACB đồng dạng

c) Trung tuyến AK của ABC cắt MN tại I, Tính diện tích AMI

HD:

a) Ta có: ABH  CBH 

Từ đó ta có : 

b) Chứng minh ACB HCA, HCA NHA

NHA=AMN=>AMN ACB

c) Ta có :  ( AKC cân tại K)

Và  mà 

=>AIN vuông cân tại I, và NHA  ACB (cmt)





Và IMAAMN=>IMA ACB => 

