# BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

**I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

**1. Hệ tọa độ**

Trong không gian, xét ba trục ; ; vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi lần lượt là các vectơ đơn vị các trục ; ; . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc  trong không gian hay hệ tọa độ .

Điểm  được gọi là gốc tọa độ.

***Chú ý*:**  và .

**2. Tọa độ của một điểm**

**a) Định nghĩa:***(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

***Chú ý:*** *•*

***•****.*

**b) Tính chất:** Cho 

•

•

• Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: 

• Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:



• Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:



**3. Tọa độ vectơ**

**Định nghĩa:**

**Nhận xét:**

**II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TOÁN VECTƠ**

**Định lý:**Trong không gian cho 

•

•

**Hệ quả:** Trong không gian cho 

•

•

• cùng phương 



•Cho hai điểm thì:

\* 

\*Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là 

**III. TÍCH VÔ HƯỚNG**

**1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

**Định lý:**Trong không gian , tích vô hướng của hai vectơ và  được xác định bởi:

**2. Ứng dụng**

•

•

•

• (với )

**IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

**Định lý:** Trong không gian , mặt cầu tâm  bán kính r có phương trình là: .

**Nhận xét:** Phương trình mặt cầucòn có thểviết dưới dạng: với .

**V. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ**

**1. Định nghĩa**

Trong không gian  cho hai vectơ và . Tích có hướng của hai vectơ  và  kí hiệu là , được xác định bởi



***Chú ý:*** *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

**2. Tính chất**

•

•

•

•(**Chương trình nâng cao**)

**3. Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)**

•***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** và  đồng phẳng 

•***Diện tích hình bình hành :*** **

*•****Diện tích tam giác :*** **

*•****Thể tích khối hộp :*** **

*•****Thể tích tứ diện********:*** **

***Chú ý:***

***– Tích vô hướng***của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

*–* ***Tích có hướng***của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### Dạng 1: Các bài toán liên quan tọa độ điểm, tọa độ của vectơ

{*Tìm tọa độ điểm, tọa độ vecto thỏa tính chất nào đó, tìm tọa độ trung điểm, trọng tâm, trực tâm, đỉnh của hình bình hành, đỉnh của một hình đa diện,…}*

***PHẦN 1: CÁC VÍ DỤ***

**Ví dụ1.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba vectơ: , , . Tìm tọa độ vectơ .

**Lời giải**

Ta có: 





Suy ra: 





. Vậy .

**Ví dụ2.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba điểm .

1/ Tìm tọa độ điểm  để tứ giác  là hình bình hành.

2/ Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành .

**Lời giải**

1/ Tứ giác  là hình bình hành 

2/ Điểm I là tâm hình bình hành 

I là trung điểm của AC .

**Ví dụ3.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba điểm . Tìm tọa độ điểm *M*thuộc mặt phẳng  và cách đều các điểm *A, B, C* ?

**Lời giải**

Gọi là điểm cần tìm.

Vì  cách đều nên ta có: 



.

Vậy .

**Ví dụ4.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho điểm , gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên trục . Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng ?

**Lời giải**

Vì  là hình chiếu vuông góc của lên trục  nên 

Gọi  là trung điểm  Suy ra 

**Ví dụ5.** Trong không gian với hệ tọa độcho , . Tìm các giá trị của  để tam giác  đều?

**Lời giải**

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có:  ,, 

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi 

Vậy:  là các giá trị cần tìm.

**VẬN DỤNG THẤP VÀ VẬN DỤNG CAO**

**Ví dụ6.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho tam giác  có . Gọi là chân đường phân giác trong góc của tam giác Tìm tọa độ điểm 

**Lời giải**

A

B

C

D

Theo tính chất phân giác trong, ta có:



Mà: 

Từ .

**Ví dụ7.** Cho hình hộp 

1/ Chứng minh: 

2/ Cho . Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

**Lời giải**

1/ Ta có: ;  và 

Suy ra:  (đpcm)

2/ Sử dụng công thức hai vecto bằng nhau ta được: 

**Ví dụ8.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho tam giác đều  có và điểm  nằm trong mặt phẳng  có tung độ nhỏ hơn .

1/ Tìm tọa độ điểm .

2/ Tìm tọa độ điểm  biết  là tứ diện đều.

**Lời giải**

1/ Vì  nên .

Ta có: 

Tam giác  đều nên 

.

Vì  có tung độ nhỏ hơn 3 nên .

2/ Gọi .

Khi đó: .

Vì tam giác ABC đều nên tứ diện ABCD đều khi và chỉ khi 



.

Vậy: .

***PHẦN 2: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM***

1. **[2H3-1.1-1]** Trong không gian , gọi  là các vectơ đơn vị, khi đó với  thì  bằng:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

.

1. **[2H3-1.1-1]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba vectơ: ,,. Tọa độ vectơ  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Có 







.

Vậy .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác  với và . Trọng tâm của tam giác  có tọa độ là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tọa độ trọng tâm .

Vậy .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho hình bình hành  có  ( là gốc toạ độ) . Toạ độ tâm hình bình hành  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có .

.

Gọi I là tâm hình bình hành  Suy ra I là trung điểm .

1. **[2H3-1.1-2]**Cho điểm , hình chiếu vuông góc của điểm trên trục  là điểm

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với  hình chiếu vuông góc của lên trục  là .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho điểm , gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên trục , khi đó trung điểm  có toạ độ là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì  là hình chiếu vuông góc của lên trục  nên .

Gọi  là trung điểm  Suy ra .

1. **[2H3-1.1-2]** Cho điểm , hình chiếu vuông góc của điểm trên mặt phẳng là điểm

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với  hình chiếu vuông góc của lên mặt phẳng là .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian, cho 2 điểm ,. Nếu  là điểm thỏa mãn đẳng thức  thì tọa độ điểm  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

, từ .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho 3 điểm . Nếu  là hình bình hành thì toạ độ của điểm  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: .

Để tứ giác là hình bình hành thì .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Toạ độ điểm là trung điểm  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì *M* là trung điểm của *AB* nên .

*N* là trung điểm của *CD* nên .

Do đó .

1. **[2H3-1.1-1]** Trong không gian với hệ toạ độ , vectơ đơn vị cùng hướng với vec tơ  có tọa độ là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta thấy với  ;  là vectơ đơn vị cùng hướng với .

1. **[2H3-1.1-2]**Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho ba điểm , ,. Điểm là đỉnh thứ tư của hình bình hành , khi đó  có giá trị bằng

**A.. B.. C. . D..**

**Lời giải**

**Chọn C**

,  là hình bình hành thì

.

1. **[2H3-1.1-2]**Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba điểm . Để ba điểm *A, B, C* thẳng hàng thì tổng giá trị là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Có .

Để ba điểm *A, B, C* thẳng hàng thì  cùng phương .





Vậy .

1. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho hai điểm . Điểm M chia đoạn *AB* theo tỉ số  có tọa độ là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử  là điểm cần tìm.

Vì M chia đoạn AB theo tỉ số  nên ta có: .

.

Vậy .

1. **[2H3-1.1-2]**Cho điểm , điểm đối xứng của  qua mặt phẳng là điểm

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Với  điểm đối xứng của qua mặt phẳng  là 

1. **[2H3-1.1-3]** Cho điểm , điểm  đối xứng của M qua trục , khi đó  bằng

**A. **. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với  điểm đối xứng của qua trục  là 

.

1. **[2H3-1.1-3]** Trong không gian , cho tứ diện có . Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện 

**A.. B.. C.. D..**

**Lời giải**

**Chọn B**

1. **[2H3-1.1-3]** Trong không gian , cho hai điểm . Điểm  trên trục và cách đều hai điểm  có tọa độ là

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

.

 cách đều hai điểm  nên .

.

1. **[2H3-1.1-4]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba điểm . Điểm *M* thuộc mặt phẳng (Oxy) và cách đều các điểm *A, B, C* có tọa độ là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi là điểm cần tìm.

Vì cách đều , ,  nên ta có: 



 Vậy .

1. **[2H3-1.1-4]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho  điểm  thuộc  và thể tích của tứ diện  bằng 5. Toạ độ của  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điểm  thuộc trục  có tọa độ . Ta có ,  và . Dễ thấy

,

,

nên  hoặc .

### Dạng 2: Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

*{ Tích vô hướng hai vt, góc giữa hai vt, độ dài vt, độ dài đường trung tuyến, phân giác,đường cao, diện tích tam giác, chu vi tam giác…}*

***PHẦN 1: CÁC VÍ DỤ***

**Ví dụ 1.** Trong không gian cho tam giác ABC có .Tính 

**Lời giải**

Ta có: 

Suy ra: .

**Ví dụ 2.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác ABC biết , *B* đối xứng với *A* qua mặt phẳng (), *C* đối xứng với *B* qua gốc tọa độ *O*. Tính diện tích tam giác ABC ?

**Lời giải**

Theo đề bài: B đối xứng với A qua mặt phẳng ()

C đối xứng với B qua gốc tọa độ O

.

**Ví dụ 3.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác  có , , . Gọi  là điểm trên cạnh  sao cho . Tính độ dài đoạn thẳng.

**Lời giải**

Vì điểm  thuộc cạnh  nên , suy ra tọa độ điểm  là

.

Vậy độ dài  bằng:

.

**Ví dụ 4.**Trong không gian với hệ toạ độ  cho hai vecto  thỏa mãn 

1) Tính .

2) Tính góc giữa hai vecto  và .

**Lời giải**

1) Ta có: 

.

2) Ta có:  và .

.

**Ví dụ 5.**Trong không gian với hệ tọa độcho , . Tìm các giá trị của  để tam giác  đều?

**Lời giải**

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng .

Ta có:  ,, .

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi .

Vậy:  là các giá trị cần tìm.

**Ví dụ 6.**Trong không gian , cho hình hộp chữ nhậtcó đỉnh A trùng với gốc , , . Gọi M là trung điểm của cạnh .Tính thể tích của khối tứ diện .

**Lời giải**

Ta có : .



Vậy thể tích của khối tứ diện là: .

***PHẦN 2: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM***

1. **[2H3-1.2-1]** Tích vô hướng của hai vectơ  trong không gian bằng:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

1. **[2H3-1.2-1]**Trong không gian cho hai điểm , độ dài đoạn bằng

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

.

1. **[2H3-1.2-1]**Cho điểm , khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng  bằng

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với .

1. **[2H3-1.2-1]**Cho điểm , khoảng cách từ điểm  đến trục bằng

**A.**25. **B.**5. **C.** 4. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với 

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba vectơ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

.

.

.

.

1. **[2H3-1.2-2]** Cho 3 điểm  Tam giác  là

**A.**Tam giác có ba góc nhọn. **B.** Tam giác cân đỉnh .

**C.** Tam giác vuông đỉnh . **D.** Tam giác đều.

**Lời giải**

**Chọn A**

 . Ta thấy không vuông.

không cân.

1. **[2H3-1.2-1]** Gọi  là góc giữa hai vectơ  và , với  và  khác , khi đó  bằng:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba vectơ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng** ?

**A.**. **B.** cùng phương . **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

 Nên đáp án A và B sai.



.

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian  cho ba điểm . Để 4 điểm  đồng phẳng thì tọa độ điểm  là

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét .

Ta có: ; . 

Do đó: ;

Suyra :.

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tứ diện  biết . Độ dài đường cao AH của tứ diện  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Có 

; 





Mà 

Vậy .

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác  có , , . Gọi  là điểm trên cạnh  sao cho . Độ dài đoạn  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì điểm  thuộc cạnh  nên , suy ra tọa độ điểm  là

.

Vậy .

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho ba điểm và . Diện tích tam giác  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có 



.

Vậy .

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác  có . Độ dài đường cao của tam giác kẻ từ  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**



Độ dài đường cao kẻ từ  của tam giác  là :.

1. **[2H3-1.2-2]** Cho . Thể tích của tứ diện  bằng

**A. **. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tính .

.

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian  cho tứ diện . Độ dài đường cao vẽ từ  của tứ diện  cho bởi công thức nào sau đây:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì nên .

1. **[2H3-1.2-2]** Trong không gian tọa độ , cho bốn điểm . Độ dài đường cao của tứ diện  hạ từ đỉnh  xuống mặt phẳng  là

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tính 



****, với , 

.

áp dụng công thức ở câu trên ta được: .

1. **[2H3-1.2-3]** Cho hai vectơ  và  tạo với nhau góc  và  . Khi đó  bằng

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có .

1. **[2H3-1.2-3]** Cho  và . Để góc giữa hai vectơ  có số đo bằng  thì bằng

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

.

1. **[2H3-1.2-3]** Cho  góc giữa hai vectơ  và  bằng ,  Để  vuông góc với  thì  bằng

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

.

****.

1. **[2H3-1.2-3]** Trong không gian với hệ toạ độ,cho tam giác có  . Độ dài đường phân giác trong của góc *B* là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi D là chân đường phân trong của góc B thuộc tam giác ABC, khi đó ta có tỷ lệ:

.

Vậy .

1. **[2H3-1.2-3]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tam giác *ABC* có , . Độ dài trung tuyến *AM* là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:.

.

1. **[2H3-1.2-4]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho hình chóp *S.OAMN* với , trong đó  và . Thể tích hình chóp *S.OAMN* là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có 



.

### Dạng 3: Xác định phương trình mặt cầu, tìm các thuộc tính của mặt cầu

*{các bài toán tìm tâm I, bán kính R, xác định xem một phương trình có phải là phương trình mặt cầu hay không, tìm điều kiện (có chứa tham số m) để một phương trình là phương trình mặt cầu, các bài toán về họ mặt cầu, bài toán quỹ tích….}*

***PHẦN 1: CÁC VÍ DỤ***

**Ví dụ1.** Xác định tọa độ tâm I, bán kính R của mặt cầu ?

**Lời giải**

Mặt cầu  có tâm , bán kính .

**Ví dụ2.** Cho mặt cầu . Chứng minh rằng:Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng . Tìm tọa độ tiếp điểm .

**Lời giải**

Mặt cầu  có tâm , bán kính .

Ta có  nên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

Tiếp điểm  là hình chiếu của  trên mặt phẳng .

Gọi  thì  nên

.

**Ví dụ3.** Trong khoâng gian với hệ tọa độ , cho bốn điểm , . Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Lời giải**

Ta có:  là VTPT của . Suy ra phương trình .

Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

Suy ra . Vậy .

**Ví dụ4.** Trong không gian với hệ toạ độ  cho mặt phẳng có phương trình :  và mặt cầu : . Chứng minh rằng mặt phẳng  cắt mặt cầu theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

**Lời giải**

Mặt cầu  có tâm , bán kính .

Khoảng cách từ  đến 

Suy ra mặt phẳng  cắt mặt cầu  theo một đường tròn.

Gọi  lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đó, suy ra  là hình chiếu vuông góc của  lên mặt phẳng  nên tọa độ của  là nghiệm của hệ:

. Bán kính .

**Ví dụ5.** Cho mặt phẳng  và mặt cầu . Tìm  để mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu . Với  vừa tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm.

**Lời giải**

Mặt cầu  có tâm , bán kính .

Gọi  là đường thẳng đi qua , vuông góc với .

Suy ra phương trình .

Mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu 

.

Khi đó . Tọa độ tiếp điểm  là nghiệm của hệ:

, giải hệ này ta được .

***PHẦN 2: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM***

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Trong không gian với hệ tọa độ , mặt cầu  có tọa độ tâm và tính bán kính là:

**A.**và . **B.**và .

**C.**và . **D.**và .

**Lời giải**

**Chọn A**

Tâm  và bán kính .

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Trong không gian với hệ tọa độ , mặt cầu có phương trình  có tâm I và bán kính R lần lượt là:

**A.**và . **B.**và .

**C.**và . **D.**và .

**Lời giải**

**Chọn D**

Mặt cầu có tâm , bán kính .

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Biểu thức nào sau đây **không** là phương trình mặt cầu.

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Cho mặt phẳng  và mặt cầu . Khi đó mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai:

**A. ** có điểm chung với (S). **B.** cắt (S) theo một đường tròn.

**C.** tiếp xúc với (S). **D. ** đi qua tâm của (S).

**Lời giải**

**Chọn C**

Mặt cầu  có tâm , bán kính.

Ta có:  nên  cắt (S) theo một đường tròn.

Tâm thuộc mặt phẳng .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , tọa độ tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng  và mặt cầu  là:

**A.** và . **B.** và .

**C.**và . **D.**và .

**Lời giải**

**Chọn A**

*Do bốn đáp án là khác nhau về bán kính nên ta chỉ tính bán kính cho đơn giản.*

Mặt cầu có tâm , bán kính là .

Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là :

.

Vậy bán kính đường tròn giao tuyến là : .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho mặt cầu  và mặt phẳng . Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  tại điểm có tọa độ là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  tại điểm ****tọa độ  thỏa  và 

Lần lượt thế tọa độ  ở  phương án vào  và  thì chỉ có phương án A thỏa vì  và 

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-1]** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu ?

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-3]** Cho các điểm  và đường thẳng . Gọi  là mặt cầu đi qua  và có tâm thuộc đường thẳng . Bán kính mặt cầu  bằng:

**A.** **B.** **C.**3**. D.**

**Lời giải**

**Chọn A**

**•**Tâm .

**•**

**•**Vì  đi qua  nên ta có



**•**Vậy bán kính mặt cầu : 

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Cho mặt phẳng  và mặt cầu  có phương trình lần lượt là . Giá trị của  để  tiếp xúc  là:

**A.** hoặc . **B.** hoặc .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

•có tâm  và bán kính .

• tiếp xúc 





1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Cho đường thẳng và mặt cầu (*S*) :. Tọa độ giao điểm của  và là:

**A.**. **B.** .

**C.**. **D.** và (*S*) không cắt nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tọa độ giao điểm là nghiệm hệ phương trình:



1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Cho các điểmvà . Mặt cầu đi qua hai điểm *A, B* và tâm thuộc trục *Oy* có đường kính là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  trên *Oy* vì 

 đường kính bằng **.**

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , mặt cầu tâm tiếp xúc với trục có bán kính là:

**A.**5. **B.**4. **C.**2. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  là hình chiếu của tâm  lên trục 



Vậy mặt cầu có bán kính : .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , bán kính của mặt cầu tâm  và tiếp xúc với trục  bằng:

**A.**4. **B.**5. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  là hình chiếu của  lên .  .

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , bán kính của mặt cầu tâm  và tiếp xúc với đường thẳng  là :

**A.**. **B.**14. **C.** . **D.**7.

**Lời giải**

**Chọn C**



1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho là mặt cầu tâm và tiếp xúc với mặt phẳng  . Bán kính là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**



1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ toạ độ , mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  với  có bán kính là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi phương trình mặt cầu  ngoại tiếp tứ diện  có dạng:



Vì  thuộc mặt cầu  nên ta có hệ phương trình:





1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ toạ độ , với giá trị nào của m thì phương trình  là phương trình mặt cầu ?

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi 

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Biết điểm  thuộc mặt cầu  sao cho khoảng cách từ  đến mặt phẳng  lớn nhất . Khi đó tọa độ điểm  là:

**A. **. **B. ** . **C.**. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn C**

♦**Tự luận:** Mặt cầu có tâm , bán kính 

nên mặt phẳng  và mặt cầu  không có điểm chung.

Gọi  là đường thẳng qua  và vuông góc với  , 

giao điểm của  và  là hai điểm có tọa độ  . Vì khoảng cách từ  đến lớn nhất nên .

♦**Trắc nghiệm:**Thử 4 phương án thấy điểm có tọa độ  không thuộc mặt cầu nên loại.

Khoảng cách từ điểm  đến là:  .

Khoảng cách từ điểm  đến là:  .

Khoảng cách từ điểm  đến là:  .

1. **[2H3-1.3-4] [2H3-1.3-4]** Cho điểm và mặt cầu  mặt phẳng  đi qua  và cắt  theo thiết diện là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Bán kính nhỏ nhất đó là:

**A.** 3. **B.**2. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mặt cầu có tâm , bán kính . Dễ thấy điểm  nằm trong mặt cầu nên mặt phẳng cần tìm đi qua  và vuông góc với .

Do đó :  .

Bán kính đường tròn là : .

1. **[2H3-1.3-4] [2H3-1.3-4]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho tứ diện  với . Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  là:

**A.**. **B.**. **C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện , ta có:



 là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện 



Vậy .

**Cách 2:** Phương trình mặt cầu có dạng , 

Thay tọa độ  vào  ta được 4 phương trình.

Sử dụng MTCT giải hệ phương trình 4 ẩn . Lúc đó .

### Dạng 4: Viết phương trình mặt cầu

*{Viết phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính, biết tâm và đi qua điểm, biết đường kính, mặt cầu đi qua 2 điểm và có tâm thuộc trục tọa độ, mặt cầu đi qua 3 điểm có tâm thuộc mặt phẳng tọa độ, mặt cầu đi qua 3 điểm và có bán kính, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện,. mặt cầu có tâm và tiếp xúc với trục tọa độ, có tâm và tx với mặt phẳng tọa độ, có tâm và tiếp xúc với mặt cầu khác,…}*

***PHẦN 1: CÁC VÍ DỤ***

**Ví dụ1.** Lập phương trình mặt cầu  biết mặt cầu  có tâm  bán kính .

**Lời giải**

Phương trình mặt cầu .

**Ví dụ2.** Mặt cầu  có tâm nằm trên  và đi qua 

**Lời giải**

Gọi  là tâm mặt cầu. Vì .

Ta có .

Suy ra tâm  và bán kính .

Vậy phương trình mặt cầu .

**Ví dụ3.** Có tâm  và tiếp xúc với .

**Lời giải**

Vì mặt cầu  tiếp xúc với  nên suy ra .

Vậy phương trình .

**Ví dụ4.** Có tâm  và tiếp xúc với mp.

**Lời giải**

Ta có, bán kính mặt cầu .

Vậy phương trình mặt cầu .

**Ví dụ5.**  Có tâm nằm trên đường thẳng  và tiếp xúc với hai mặt phẳng  và .

**Lời giải**

Vì mặt cầu  có tâm .

Mặt cầu  tiếp xúc với hai mp  và  nên 

 và .

Vậy phương trình mặt cầu .

**Ví dụ6.**  Mặt cầu có tâm  và cắt  tại hai điểm  sao cho 

**Lời giải**

Đường thẳng  qua điểm  và có véc tơ chỉ phương là .

Ta có  nên  do đó

.

Vì mặt cầu cắt  tại hai điểm  nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : .

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: .

***PHẦN 2: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM***

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình mặt cầu tâm  và có bán kính  là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình mặt cầu tâm  và có bán kính  là: .

Vậy: Mặt cầu tâm , bán kính  có phương trình là:

.

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Trong không gian với hệ tọa độ , mặt cầu tâm , bán kính  có phương trình là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mặt cầu tâm , bán kính  có phương trình là:

.

1. **[2H3-1.3-1] [2H3-1.3-1]** Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình mặt cầu có tâm  và đi qua điểm  là:

**A.**. **B.**.

**C. **. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tâm , bán kính mặt cầu là .

nên phương trình mặt cầu : .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , mặt cầu tâm  đường kính bằng 10 có phương trình là:

**A. **. **B.** .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Mặt cầu tâm  đường kính bằng 10 nên có bán kính  có phương trình:

.

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ tọa độ , mặt cầu có đường kính AB với  và có phương trình là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tâm  là trung điểm của đường kính , bán kính mặt cầu là 

nên phương trình mặt cầu : .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ tọa độ , cho điểm . Viết phương trình mặt cầu tâm  và tiếp xúc với trục .

**A.**. **B.**.

**C.**. **D**..

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi là hình chiếu của  lên , ta có: .

 là bán kính mặt cầu cần tìm.

PT mặt cầu cần tìm là:.

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , mặt cầu  có tâm và tiếp xúc với mặt phẳng có phương trình:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mặt cầu  có tâm và tiếp xúc với mặt phẳng  nên có bán kính  có phương trình: 

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , mặt cầu tâm  tiếp xúc với mặt phẳng  có phương trình là:

**A.** . **B.** .

**C. **. **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

 . Vây .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ , phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục  và đi qua hai điểm là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn C**

Lần lượt thế tọa độ điểm  vào  phương án. Chỉ có phương án A thỏa vì

 và 

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-2]** Trong không gian với hệ toạ độ ,viết phương trìnhmặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng và đi qua ba điểm .

**A.**. **B.**.

**C.**. **D**..

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  là mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng  có tâm .

Suy ra  có dạng: .

Ta có .

.

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ toạ độ ,viết phương trìnhmặt cầu  có tâm và tiếp xúc với đường thẳng : .

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi có bán kính .

Ta có  qua , có VTCP .

 tiếp xúc với đường thẳng.

.

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ , cho điểm . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu đường kính  ?

**A.**. **B. **.

**C. **. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mặt cầu đường kính  có tâm là trung điểm . Bán kính .

1. **[2H3-1.3-2] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm  và tiếp xúc với mặt phẳng ?

**A. **. **B. **.

**C.**. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn C**

.

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng: .

Cách 2: theo công thức phương trình mặt cầu có tâm  bán kính  có dạng . Ta loại câu A và D.

Bán kính . Nên ta chọn câu C.

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*) có tâm và mặt phẳng (*P*): . Biết mặt phẳng (*P*) cắt mặt cầu (*S*) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Phương trình của mặt cầu (*S*) là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có .

Bán kính mặt cầu là .

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ , cho ba điểm  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm  và có tâm thuộc mặt phẳng .

**A. **. **B. ** .

**C. **. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

**•**Phương mặt cầu  có dạng: , ta có



**•** Lấy vế trừ vế của  cho ; cho; kết hợp (4) ta được hệ

.

**•**Vậy phương trình mặt cầu là .

**♦Trắc nghiệm:**

**•**Thay tọa độ  vào từng phương trình mặt cầu ở từng đáp án loại được đáp án A và đáp án B.

**•**Thay tọa độ  vào phương trình mặt cầu loại được đáp án C.

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ , cho mặt phẳng  và . Gọi  là mặt cầu tâm  và cắt mặt phẳng  theo một đường tròn có chu vi bằng . Viết phương trình mặt cầu (S).

**A. **. **B. **.

**C. **. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn D**

Bán kính của đường tròn giao tuyến của  và  là .

.

Bán kính mặt cầu  là .

Phương trình mặt cầu  tâm  và bán kính  là.

1. **[2H3-1.3-3] [2H3-1.3-3]** Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình mặt cầu  qua ba điểm , , và có tâm nằm trên mp là:

**A.**. **B**. .

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn B**

\* Gọi là tâm mặt cầu .

\* Vì I thuộc mp  nên 

\* Mặt khác  qua ba điểm , , .

Nên 

. .

\* Vậy có tâm bán kính .

\* P.trình mặt cầu : .

1. **[2H3-1.3-4] [2H3-1.3-4]** Trong không gian với hệ toạ độ , cho hai đường thẳng :  và : . Mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của  và  làm đường kính có phương trình là:

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

**Lời giải**

**Chọn A**

 có vtcp .

 có vtcp .

.

.

.

 là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  và 

 .

Khi đó: .

Mặt cầu đường kính  có tâm  và bán kính  có phương trình:

.

1. **[2H3-1.3-4] [2H3-1.3-4]** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho đường thẳng  và hai điểm , .Viết phương trình mặt cầu đi qua ,  và có tâm  thuộc đường thẳng .

**A. **. **B.**.

**C. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình tham số đường thẳng .

Ta có: .

Vì mặt cầu  đi qua hai điểm ,  nên: .



.

Phương trình mặt cầu  cần tìm là: .

1. **[2H3-1.3-4]**Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình mặt cầu  có tâm nằm trên đường thẳng :  và tiếp xúc với hai mặt phẳng , .

**A.**  và .

**B.** và .

**C.** và .

**D**. và .

**Lời giải**

**Chọn D**

\* Gọi là tâm mặt cầu .

\* Vì  thuộc đường thẳng  nên .

\* Mặt khác  tiếp xúc với  và  nên: 



.

\* Với  tâm  bán kính .

ta được .

\* Với  tâm  bán kính .

ta được .

**PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG**

**NỘI DUNG**

1. **LÝ THUYẾT**

## MỘT SỐ BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG THƯỜNG GẶP.

**Bài toán 1: Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  và có vtpt **

**Bài toán 2:** **Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua điểm *M* và có cặp véctơ chỉ phương**  **cho trước.**

**Bài toán 3: Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua ba điểm**  **không thẳng hàng**

**Bài toán 4: Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện cho trước:**

**Bài toán 5: Mặt phẳng** **và mặt cầu.**

**Bài toán 6: Mặt phẳng** **liên quan đến góc.**

**Bài toán 7: Mặt phẳng** **liên quan đến khoảng cách.**

1. **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Đề - Đáp án – Hướng dẫn giải chi tiết – Phân tích phương án nhiễu**

**Số lượng 50 câu, trong đó**

**NB: 10 TH: 15 VDT: 15 VDC: 10**

**A –** **LÝ THUYẾT CẦN NẮM**

**1) Véctơ pháp tuyến, cặp véctơ chỉ phương**

* Véctơ  là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng  nếu giá  vuông góc với 
* Hai véctơ  không cùng phương là **cặp véctơ chỉ phương** của mặt phẳng  nếu giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng 

*P*



* Nếu  là một cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng  thì  là 1 véctơ pháp tuyến của mặt phẳng 
* Nếu  là 1 véctơ pháp tuyến của mặt phẳng  thì  cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng 

**2) Phương trình tổng quát của mặt phẳng: **

* Nếu mặt phẳng  có phương trình  thì  là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng 
* Để viết phương trình mặt phẳng  ta cần xác định 1 điểm đi qua và 1 véctơ pháp tuyến.

**3) Các trường hợp đặc biệt:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Các hệ số | Phương trình mặt phẳng | Tính chất mặt phẳng |
|  |  | đi qua gốc tọa độ *O* |
|  |  | hoặc |
|  |  | hoặc |
|  |  | hoặc |
|  |  | hoặc |
|  |  | hoặc |
|  |  | hoặc |

★ **Lưu ý**:

* Nếu trong phương trình của mặt phẳng  không chứa ẩn nào thì  song song hoặc chứa trục tương ứng.
* Phương trình mặt phẳng  cắt các trục tọa độ tại các điểm  là  (gọi là phương trình mặt theo đoạn chắn).
* Khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  được xác định bởi công thức: 

## B – MỘT SỐ BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG THƯỜNG GẶP.

**Bài toán 1: Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  và có vtpt **

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

**Áp dụng:**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình  đi qua *M* và vuông góc với đường thẳng *d* đi qua 2 điểm *A* và *B*,

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

với:

a)  b) 

c)  d) 

**Ví dụ 2: Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* với tọa độ *A, B* cho trước:**

*Mặt phẳng trung trực  của đoạn AB là mp đi qua và vuông góc tại trung điểm I của A****B.***

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

**Vận dụng**

a)  b)  c) 

**Ví dụ 3: Viết phương trình**  **đi qua**  **và song song với** 

|  |  |
| --- | --- |
| **hương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

**Vận dụng:**

**1.** Viết ptmp (P) đi qua M và song song với mp(Q) trong các trường hợp sau:

a)  và  b)  và 

c)  và  d)  và 

**2.*(ĐH D – 2013 NC)*** Trong không gian với hệ trục  cho điểm  và mặt phẳng  Tính khoảng cách từ *A* đến  Viết phương trình mặt phẳng  đi qua *A* và song song với ?

Đáp số.  và 

**3.**Viết phương trình mặt phẳng  song song với  và khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  bằng ?

Đáp số. 

**Bài toán 2:** **Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua điểm *M* và có cặp véctơ chỉ phương**  **cho trước**

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

**Vận dụng:**

**Ví dụ 1:**

a)  b) 

c)  d) 

**Ví dụ 2:**Viết phương trình  đi qua  vuông góc  và 

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

a)   

b)   

**Ví dụ 3:** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  và vuông góc với :



a)  b) 

c)  d) 

**Ví dụ 4: *(ĐH A, A1 – 2014)*** Trong không gian với hệ trục tọa độ  cho  và đường thẳng  Tìm tọa độ giao điểm của *d* và  Viết phương trình mặt phẳng  chứa *d* và vuông góc với 

Đáp số.  và 

**Ví dụ 5: *(CĐ – 2010 – Chương trình nâng cao)*** Trong không gian với hệ trục tọa độ  cho đường thẳng  và mặt phẳng .

a) Viết phương trình mặt phẳng  chứa *d* và .

b) Tìm tọa độ điểm  sao cho *M* cách đều *O* và mặt phẳng 

Đáp số.  và 

**Ví dụ 6:** Viết phương trình của mặt phẳng  đi qua điểm *M* và chứa đường thẳng :

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
| ***Trên đường thẳng Δ lấy điểm A và xác định VTCP***  ***Khi đó*** |  |

a)  b) 

c)  d) 

**Ví dụ 7: *(TNTHPT – 2010 – Chương trình nâng cao)*** Trong không gian với hệ trục tọa độ  cho đường thẳng có phương trình 

a) Tính khoảng cách từ *O* đến đường thẳng 

b) Viết phương trình mặt phẳng  chứa điểm *O* và chứa đường thẳng 

Đáp số.  và 

**Ví dụ 8:** Viết phương trình của mặt phẳng  đi qua hai đường thẳng cắt nhau 

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

a)  

b)  

c)  

**Ví dụ 9:** Cho 2 đường thẳng chéo nhau  Hãy viết phương trình  chứa  và song song 

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

a)  

b)  

c)  

**Ví dụ 10:** Viết phương trình  qua *M* và vuông góc với hai mp:

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

a)   

b)   

**Ví dụ 11: *(CĐ – 2009 – Chương trình chuẩn)*** Trong không gian với hệ trục tọa độ  cho đường các mặt phẳng  và . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  vuông góc hai mặt phẳng  và .

Đáp số. .

**Ví dụ 12: *(ĐH D – 2010 – Chương trình chuẩn)*** Trong không gian với hệ trục tọa độ  cho hai mặt phẳng  và . Viết phương trình mặt phẳng  sao cho  vuông góc với  và đồng thời .

Đáp số. .

**Ví dụ 13:** Viết phương trình mặt phẳng  biết rằng  vuông góc với hai   và khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  bằng ?

Đáp số. 

**Bài toán 3: Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua ba điểm**  **không thẳng hàng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Phương pháp** | **Minh họa** |
|  |  |

**Vận dụng:**

**Ví dụ 1:**

a)  b) 

c)  d) 

**Ví dụ 2: *(THPT – 2011 NC)*** Trong không gian với hệ trục  cho  Viết phương trình mặt phẳng  Tính độ dài đường cao của  kẻ từ 

Đáp số.  và 

**Ví dụ 3:**Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm *M* và giao tuyến của hai mặt phẳng 

 ***Chọn  thuộc giao tuyến hai mặt phẳng  và . Cụ thể:***

***Cho: ***

***Cho: ***

***Khi đó ***

a)   

b)   

**Bài toán 4: Viết phương trình mặt phẳng**  **đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện cho trước:**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình mặt phẳng  qua giao tuyến của hai mặt phẳng  đồng thời song song với mặt phẳng  cho trước

a)   

b)   

**Ví dụ 2:** Viết phương trình mặt phẳng  qua giao tuyến của hai mặt phẳng  đồng thời vuông góc với mặt phẳng  cho trước

a)   

b)   

**Ví dụ 3:** Viết phương trình mặt phẳng  qua giao tuyến của hai mặt phẳng  và  đồng thời cách điểm  một khoảng 

Đáp số.  hoặc 

**Bài toán 5: Mặt phẳng** **và mặt cầu**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  cho trước tại điểm 

a)  tại 

b)  tại 

**Ví dụ 2: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA-LẦN 2-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ , cho mặt cầu  và các điểm , . Gọi  là mặt phẳng đi qua hai điểm ,  sao cho thiết diện của  với mặt cầu  có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình  dưới dạng . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn B**

****

Mặt cầu có tâm  bán kính là .

Ta có ,  nằm trong mặt cầu. Gọi  là hình chiếu của  trên  và  là hình chiếu của  lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng . Do đó diện tích thiết diện nhỏ nhất khi  lớn nhất. Mà  suy ra  qua  và vuông góc với .

Ta có  suy ra  là trung điểm của . Vậy  và .

Vậy .

Vậy .

**Ví dụ 3:** Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng d:  và mặt cầu (S): . Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với *d* và trục *Ox*, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

*• (S) có tâm I(1; 1; 2), bán kính R = 2. d có VTCP .*

*(P) // d, Ox ⇒ (P) có VTPT  ⇒ PT của (P) có dạng: .*

*(P) tiếp xúc với (S) ⇔  ⇔  ⇔  ⇔ *

*⇒ (P):  hoặc (P): .*

**Ví dụ 4:** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S):  và mặt phẳng (*P*):. Viết phương trình mặt phẳng (*Q*) đi qua điểm  vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S).*

*• (S) có tâm I(–1; 2; 0) và bán kính R = 3; (P) có VTPT .*

*PT (Q) đi qua M có dạng: *

*(Q) tiếp xúc với (S)  (\*)*

* (\*\*)*

*Từ (\*), (\*\*)  *

*Với . Chọn B = 1, A = 2, C = –2 PT (Q): *

*Với . Chọn B = –7, A = 4, C = –4 PT (Q): *

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với , .*

*ĐS:  hoặc .*

**Ví dụ 5:** Trong không gian với hệ trục O*xyz*, cho mặt cầu . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục O*x* và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính .

*• (S) có tâm I(1; –2; –1), bán kính R = 3. (P) chứa Ox ⇒ (P): ay + bz = 0.*

*Mặt khác đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (P) đi qua tâm I.*

*Suy ra: –2a – b = 0 b = –2a (a0) ⇒ (P): y – 2z = 0.*

**Ví dụ 6:** Trong không gian với hệ trục O*xyz*, cho mặt cầu (S):  và đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa *d* và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính .

*• (S) có tâm , bán kính R = 2.*

*PT mặt phẳng (P) có dạng: .*

*Chọn .*

*Ta có:  *

*+ Với (1) (P):  + Với (2) (P): *

**Ví dụ 7:** Trong không gian với hệ toạ độ , cho hai đường thẳng ,  và mặt cầu  . Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu , biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng  và .

*•* (P):  hoặc (P): 

**Ví dụ 8:** Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình  và mặt phẳng (*α*) có phương trình  . Viết phương trình mặt phẳng (*β*) song song với (*α*) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng .

*• Do (β) // (α) nên (β) có phương trình 2x + 2y – z + D = 0 (D17)*

*(S) có tâm I(1; –2; 3), bán kính R = 5. Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính r = 3.*

*Khoảng cách từ I tới (β) là h = *

*Do đó *

*Vậy (β) có phương trình .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) , , .*

*ĐS: *

**Bài toán 6: Mặt phẳng** **liên quan đến góc.**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình  chứa trục *Oz* và tạo với  một góc ?

Đáp số.  hoặc 

**Ví dụ 2:** Viết  đi qua  và  tạo với  góc  thỏa mãn ?

Đáp số.  hoặc 

**Ví dụ 3:** Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng ():  và tạo với mặt phẳng (P):  một góc 600. Tìm tọa độ giao điểm M của mặt phẳng (α) với trục *Oz*.

*• () qua điểm  và có VTCP . (P) có VTPT .*

*Giao điểm  cho . (α) có VTPT *

*(α) và (P):  tạo thành góc 600 nên:*

*⇔ hay *

*Kết luận:  hay *

**Ví dụ 4:** Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng *(P)* đi qua giao tuyến *d* của hai mặt phẳng , ** và tạo với mặt phẳng  một góc *ϕ* mà 

*• Lấy . (P) qua A PT (P) có dạng: .*

*(P) qua B nên:  *

**

* ⇔ .*

*Chọn .*

*+ Với  *

*+ Với  .*

**Ví dụ 5:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và tạo với mặt phẳng (P) một góc thoả mãn .

*• PT mặt phẳng (Q) có dạng: .*

*Ta có:   *

*Phương trình mp(Q):  hoặc (Q): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) , .*

*ĐS: (Q):  hoặc (Q): .*

**Ví dụ 6:** Trong không gian với hệ tọa độ , cho đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng và . Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng  một góc .

*• ĐS:  hoặc *

**Ví dụ 7:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai mặt phẳng  và . Lập phương trình mặt phẳng  đi qua điểm M trùng với gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc .

*• Giả sử PT mặt phẳng (R): .*

*Ta có:  (1);*

* (2)*

*Từ (1) và (2) *

*Với : chọn  PT mặt phẳng *

*Với : chọn  PT mặt phẳng *

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với .*

*ĐS:  hoặc *

**Ví dụ 8:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng có phương trình:  và . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  và tạo với  một góc .

*• Đáp số: (P): hoặc (P): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với , , .*

*ĐS: (P):  hoặc (P): *

*b) , , .*

*ĐS: (P): *

*hoặc (P): *

**Ví dụ 9:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm  và tạo với các trục O*x*, O*y* các góc tương ứng là .

*• Gọi  là VTPT của (P). Các VTCP của trục Ox, Oy là .*

*Ta có:  *

*PT mặt phẳng (P):  hoặc *

**Ví dụ 10:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (Q):  và đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

*• PT mặt phẳng (P) có dạng: . Gọi .*

*Chọn hai điểm . Ta có: *

*(P):  *

*TH1: Nếu a = 0 thì  .*

*TH2: Nếu a 0 thì . Đặt  và *

*Xét hàm số .*

*Dựa vào BBT, ta thấy *

*Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức a = 0. Khi đó chọn .*

*Vậy: (P): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với (Q): , . ĐS: .*

*b) Với . ĐS: .*

*c) Với , . ĐS: .*

**Ví dụ 11:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

*• ĐS: .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) . ĐS: .*

**Ví dụ 12:** Trong không gian với hệ tọa độ , cho đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và tạo với trục  một góc lớn nhất.

*• PT mặt phẳng (P) có dạng: . Gọi .*

*Chọn hai điểm . Ta có: *

*(P):  .*

*TH1: Nếu b = 0 thì .*

*TH2: Nếu b 0 thì . Đặt  và .*

*Xét hàm số . Dựa vào BBT, ta được  .*

*Vậy lớn nhất khi . Chọn *  *(P): .*

**Ví dụ 13:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng  và . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng  là lớn nhất.

*•  đi qua  và có VTCP .Vì  nên .*

*PT mặt phẳng (P) có dạng:  *

*Ta có: .*

*Gọi  *

*TH1: Với B = 0 thì *

*TH2: Với B 0. Đặt , ta được: *

*Xét hàm số . Dựa vào BBT ta có:  khi  *

*Khi đó .*

*So sánh TH1 và TH2 lớn nhất với  khi .*

*Phương trình mặt phẳng (P): .*

**Ví dụ 13:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với *d* và tạo với mặt phẳng (O*xy*) một góc nhỏ nhất.

*• ĐS: .*

**Ví dụ 14:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (Q):  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A, vuông góc với mặt phẳng (Q) và tạo với trục O*y* một góc lớn nhất.

*• ĐS:  hoặc .*

**Bài toán 7: Mặt phẳng** **liên quan đến khoảng cách.**

**Ví dụ 1:** Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q):  và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng .

*• PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng:  (với ).*

*• Vì (P) ⊥ (Q) nên:  ⇔  (1)*

*•  ⇔  ⇔  (2)*

*Từ (1) và (2) ta được:  ⇔ *

*• Từ (3): B = 0 ⇒ C = –****A.*** *Chọn A = 1, C = –1 ⇒ (P): *

*• Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 ⇒ C = 3 ⇒ (P): .*

**Ví dụ 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng Δ :  và điểm M(0; –2; 0). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với đường thẳng Δ, đồng thời khoảng cách *d* giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 4.

***• Phương trình mp (P) đi qua M(0; –2; 0) có dạng:  ()***

***Δ đi qua điểm A(1; 3; 0) và có một VTCP ***

***Ta có:  .***

***Với . Chọn  Phương trình (P): .***

*Với . Chọn  Phương trình (P): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với .*

*ĐS:  hoặc .*

**Ví dụ 13:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (*d*) sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.

*• (d) đi qua điểm  và có VTCT . Gọi  với  là VTPT của (P).*

*PT mặt phẳng (P):  (1).*

*Do (P) chứa (d) nên:  (2)*

**

* (3)*

*Từ (2) và (3), chọn   PT mặt phẳng (P): .*

**Ví dụ 4:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho các điểm . Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng .

*• PT mặt phẳng (P) có dạng: .*

*Ta có:  .*

*+ Với (1) PT mặt phẳng (P): *

*+ Với (2) PT mặt phẳng (P): .*

**Ví dụ 5:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho tứ diện ABCD với , , , . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

*• PT mặt phẳng (P) có dạng: .*

*Ta có:  *

**

*+ Với  (P): .*

*+ Với  (P): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với .*

*ĐS:  hoặc .*

**Ví dụ 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho các điểm , , . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  và gốc tọa độ  sao cho khoảng cách từ  đến  bằng khoảng cách từ  đến .

*• Vì O (P) nên , với .*

*Do A (P)  (1) và  (2)*

*Từ (1) và (2)  hoặc .*

*Với thì   Với  thì  *

*Câu hỏi tương tự:*

*a) Với . ĐS:  hoặc .*

**Ví dụ 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho ba điểm , ,  và mặt phẳng (P): . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho .

*• PT có dạng: , với *

*Do nên:  (1);  nên  (2)*

   **

**

*Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau:*

*TH1: .*

*Chọn  : *

*TH2: .*

*Chọn  : *

*Vậy: : hoặc : *

**Ví dụ 8:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng  lần lượt có phương trình , . Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng .

*• Ta có  đi qua A(2;2;3), có ,  đi qua  và có .*

*Do (P) cách đều  nên (P) song song với  *

*PT mặt phẳng (P) có dạng: *

*Do (P) cách đều suy ra *

**

*Phương trình mặt phẳng (P): *

**Ví dụ 9:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng  lần lượt có phương trình , . Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với  và , sao cho khoảng cách từ  đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ  đến (P).

*• Ta có:  đi qua  và có VTCP *

* đi qua  và có VTCP là *

*Gọi  là VTPT của (P), vì (P) song song với  và  nên *

*Phương trìnht (P): .*

*; *

* *

*+ Với   + Với *

**Ví dụ 10:** Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm ,  và tiếp xúc với mặt cầu (S): .

*• (S) có tâm , bán kính .*

*PT mặt phẳng (P) có dạng: *

*Ta có:  *

*+ Với (1) Phương trình của (P): *

*+ Với (2) Phương trình của (P): *

**Ví dụ 11:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

*• Ta có . Do đó  xảy ra nên mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với O****A.*** *Ta có *

*Vậy phương trình mặt phẳng (P): .*

**Ví dụ 12:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng d có phương trình: . Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

*• Gọi H là hình chiếu của A trên d ⇒ d(d, (P)) = d(H, (P)). Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có  HI lớn nhất khi . Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận  làm VTPT ⇒ (P): .*

**Ví dụ 13:** Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng (*d*) có phương trình tham số . Gọi là đường thẳng qua điểm A(4;0;–1) song song với (*d*) và I(–2;0;2) là hình chiếu vuông góc của A trên (*d*). Viết phương trình của mặt phẳng chứa Δ và có khoảng cách đến (*d*) là lớn nhất.

*• Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ, thì  hoặc . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta luôn có  và .*

*Mặt khác *

*Trong (P), ; do đó . Lúc này (P) ở vị trí (P0) ⊥ IA tại* ***A.***

*Vectơ pháp tuyến của (P0) là , cùng phương với .*

*Phương trình của mặt phẳng (P0) là: .*

**Ví dụ 14:** Trong không gian với hệ tọa độ , cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  sao cho khoảng cách từ  đến  là lớn nhất.

*• PT mặt phẳng (P) có dạng: .*

*(P) có VTPT , d đi qua điểm  và có VTCP .*

*Vì (P) d nên   . Xét 2 trường hợp:*

*TH1: Nếu b = 0 thì (P): . Khi đó: .*

*TH2: Nếu b 0. Chọn  ta được (P): .*

*Khi đó: *

*Vậy  . Khi đó: (P): .*

*Câu hỏi tương tự:*

*a) . ĐS: *

*b) . ĐS: *

**Ví dụ 15:** Trong không gian toạ độ O*xyz*, cho hai điểm  và . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng  là lớn nhất.

*•* ***PT (P) có dạng: ,***

****** *; *

*Nếu B = 0 thì d(K, (P)) = 0 (loại)*

*Nếu thì *

*Dấu “=” xảy ra khi B = –****C.*** *Chọn C = 1. Khi đó PT (P): .*

**C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Phần I: 10 CÂU NHẬN BIẾT**

1. Trong không gian tọa độ , mặt phẳng đi qua điểm  nhận  với  làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, phương trình của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng cắt các trục tọa độ  lần lượt tại  với  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Khẳng định nào đúng?

**A. ** và  cắt nhau. **B. **

**C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây chứa trục :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây song song với trục :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng ?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, khoảng cách từ gốc tọa độ  đến mặt phẳng  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Phần II: 15 CÂU THÔNG HIỂU**

1. Giả sử  là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng . Khẳng định nào sai?

**A.** Giá của  vuông góc với . **B. ** là vectơ pháp tuyến của 

**C. ** là một vectơ khác . **D. ** không phải là vectơ pháp tuyến của .

1. Cho  là hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng . Khẳng định nào đúng?

**A. ** là một vectơ pháp tuyến của .

**B. ** là một vectơ pháp tuyến của  nếu  không cùng phương.

**C. ** là một vectơ pháp tuyến của  khi và chỉ khi 

**D. ** là một vectơ pháp tuyến của  khi  cùng phương.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* có hai giá trị của tham số  để hai mặt phẳng  và  vuông góc với nhau. Tính tổng các bình phương của hai số đó.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng đi qua  và vuông góc với trục  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng đi qua  và chứa trục  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và hai mặt phẳng  và . Mặt phẳng  đi qua  đồng thời vuông góc với cả  và có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Mặt phẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  với . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên các mặt phẳng tọa độ . Phương trình của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ  và song song với mặt phẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  song song với mặt phẳng  và cách  một khoảng bằng 3 có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. **  **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua điểm  và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  song song với hai đường thẳng  và  nhận vectơ nào sau đây làm vectơ pháp tuyến?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua  và cắt các trục tọa độ  lần lượt tại  sao cho  là trọng tâm tam giác . Phương trình của  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm . Phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M*, cắt các trục tọa độ lần lượt tại *I, J, K* mà *M* là trực tâm của tam giác *IJK* là

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Phần III: 15 CÂU VẬN DỤNG THẤP**

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua điểm , cắt các tia *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho biểu thức  có giá trị nhỏ nhất là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và điểm . Mặt phẳng  đối xứng với  qua điểm  có phương trình . Giá trị của  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Phương trình mặt phẳng  là . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt cầu  và  cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn . Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường tròn :

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng (*P*): . Mặt phẳng (*Q*) đi qua hai điểm *A, B* và vuông góc với mặt phẳng (*P*) có phương trình là

**A.  B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 đường thẳng  và có phương trình: , . Mặt phẳng (*P*) chứa (*d*) và  có phương trình là

**A.** Không tồn tại **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ trục *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*): . Phương trình mặt phẳng (*P*) chứa trục *Ox* và cắt mặt cầu (*S*) theo một đường tròn có bán kính  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, Gọi  là mặt phẳng chứa hai đường thẳng  và . Khoảng cách từ điểm  đến  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng *d*:  và mặt cầu (*S*): . Lập phương trình mặt phẳng (*P*) song song với *d* và trục *Ox*, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (*S*).

**A. ** **B. ****C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình  và mặt phẳng (*α*) có phương trình 2*x* + 2*y* – *z* + 17 = 0. Mặt phẳng (*β*) song song với (*α*) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng  có phương trình . Giá trị của  bằng:

**A. ** **B. **

**C. ****D. ** hoặc 

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q):  và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* với , , , . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A, B* sao cho khoảng cách từ *C* đến (*P*) bằng khoảng cách từ *D* đến (*P*).

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng  lần lượt có phương trình , . Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng .

**A. ****B. **

**C. ****D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa *d* sao cho khoảng cách từ *A* đến (*P*) là lớn nhất.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm  và đường thẳng d có phương trình: . Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

**A. ****B. ** **C. ** **D. **

**Phần IV: 10 CÂU VẬN DỤNG CAO**

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S):  và mặt phẳng (*P*):. Phương trình mặt phẳng (*Q*) đi qua điểm  vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S)* có dạng . Giá trị của  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** hoặc  **D. ** hoặc 

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Gọi  là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ *O*, không chứa trục , vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tạo với mặt phẳng (*Q*) một góc . Khoảng cách từ  đến  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. ** hoặc 

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (*Q*):  và đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (*Q*) một góc nhỏ nhất.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng  và . Phương trình mặt phẳng (*P*) chứa  sao cho góc giữa mặt phẳng (*P*) và đường thẳng  là lớn nhất là: . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian toạ độ  cho hai điểm ,  và mặt cầu . Mặt phẳng  đi qua  và cắt  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian toạ độ  cho điểm  và mặt phẳng . Gọi  là mặt phẳng song song với (*P*) và cắt hai tia   tại 2 điểm *B, C* sao cho tam giác *ABC* có diện tích bằng 6. Giả sử phương trình của  là: . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* mặt phẳng (*P*) đi qua điểm , cắt các tia *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho thể tích tứ diện *OABC* có giá trị nhỏ nhất có phương trình . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho hai điểm , . Gọi  là mặt phẳng sao cho khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng  bằng 15 và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng  bằng 2. Mặt phẳng  đi qua điểm nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho đường thẳng , với . Khi  thay đổi thì  luôn nằm trong một mặt phẳng cố định . Tính ?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho các điểm , ,  với  thỏa mãn . Biết rằng khi  thay đổi thì quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  thuộc một mặt phẳng  cố định. Tính khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**------------------------HẾT---------------------------**

**ĐÁP ÁN**

**Phần I: 10 CÂU NHẬN BIẾT**

1. Trong không gian tọa độ , mặt phẳng đi qua điểm  nhận  với  làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **.

**Hướng dẫn giải:**

Chọn đáp án D: 

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, phương trình của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Chọn đáp án C

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Chọn đáp án C

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Chọn đáp án D

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng cắt các trục tọa độ  lần lượt tại  với  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Chọn đáp án A

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Khẳng định nào đúng?

**A. ** và  cắt nhau. **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Vì  nên . Chọn đáp án C

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây chứa trục :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Mặt phẳng chứa trục  có phương trình dạng: . Chọn đáp án A

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây song song với trục :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Mặt phẳng song song với trục  có phương trình dạng: . Chọn đáp án B

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng ?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Mặt phẳng song song với mặt phẳng  có phương trình dạng . Chọn đáp án D

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, khoảng cách từ gốc tọa độ  đến mặt phẳng  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:** Ta có . Chọn đáp án C

**Phần II: 15 CÂU THÔNG HIỂU**

1. Giả sử  là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng . Khẳng định nào sai?

**A.** Giá của  vuông góc với . **B. ** là vectơ pháp tuyến của 

**C. ** là một vectơ khác . **D. ** không phải là vectơ pháp tuyến của .

**Hướng dẫn giải:**

Vì  là vectơ pháp tuyến của  nên  cũng là vectơ pháp tuyến của . Chọn đáp án D

1. Cho  là hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng . Khẳng định nào đúng?

**A. ** là một vectơ pháp tuyến của .

**B. ** là một vectơ pháp tuyến của  nếu  không cùng phương.

**C. ** là một vectơ pháp tuyến của  khi và chỉ khi 

**D. ** là một vectơ pháp tuyến của  khi  cùng phương.

**Hướng dẫn giải:** Chọn đáp án B

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* có hai giá trị của tham số  để hai mặt phẳng  và  vuông góc với nhau. Tính tổng các bình phương của hai số đó.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Ta có 

Suy ra . Chọn đáp án **B.**

**Phương án nhiễu:**

A, C, D là các phương án gây nhiễu hoặc do tính toán sai.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng đi qua  và vuông góc với trục  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là  nên phương trình mặt phẳng là: . Chọn đáp án **C.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm tọa độ điểm thành tọa độ vectơ pháp tuyến.

**B.** Nhầm phương trình mặt phẳng vuông góc với  thành phương trình mặt phẳng song song với 

**D.** Một phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng đi qua  và chứa trục  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Phương trình mặt phẳng chứa trục  là . Thay tọa độ  vào pt được . Suy ra phương trình . Chọn đáp án **C.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm mặt phẳng chứa  với mặt phẳng vuông góc với .

**B.** Nhầm vectơ pháp tuyến với điểm đi qua.

**D.** Một phương án gây nhiễu khi kiểm tra điểm đi qua.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  và hai mặt phẳng  và . Mặt phẳng  đi qua  đồng thời vuông góc với cả  và có phương trình là:

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Ta có vectơ pháp tuyến của  và  lần lượt là .

Suy ra vectơ pháp tuyến của  là . Suy ra pt . Chọn **C.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Tính nhầm vectơ pháp tuyến thành .

**B.** Tính nhầm  nên được vtpt .

**D.** Một phương án gây nhiễu thêm do nhầm như **B.**

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Trung điểm của  là , vectơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực là  nên phương trình mặt phẳng trung trực là . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, **B.** Tính được  là vectơ pháp tuyến, nhưng lại thay điểm đi qua là  hoặc .

**C.** Học sinh nghĩ mặt phẳng trung trực của  phải chứa cả  và  nên thay cả tọa độ  vào đều thỏa mãn.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Mặt phẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Dùng phương trình đoạn chắn ta được . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, B, C là các phương án gây nhiễu khi học sinh chỉ biết thử tọa độ điểm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm  với . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên các mặt phẳng tọa độ . Phương trình của mặt phẳng  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Cách 1: Thay tọa độ  vào các pt ta được đáp án **C.**

Cách 2: Mặt phẳng  cắt các trục tọa độ  tại các điểm  nên phương trình là .

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm tọa độ hình chiếu trên mặt phẳng tọa độ với tọa độ hình chiếu trên các trục tọa độ.

B và D là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua gốc tọa độ  và song song với mặt phẳng  có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Vì (*P*) đi qua *O* nên loại **A.** Vì (*P*) song song với (*Q*) nên chọn được **D.**

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  song song với mặt phẳng  và cách  một khoảng bằng 3 có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Vì  nên phương trình của  là .

Khoảng cách giữa  và  bằng .

Suy ra phương trình của  là  hoặc .

**Phương án nhiễu:**

A, **B.** Nhầm công thức tính khoảng cách không có dấu trị tuyệt đối trên tử thức.

**D.** Không biết công thức tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng. Cộng thêm 3 vào pt của .

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua điểm  và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất có phương trình là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Khoảng cách  do đó  cần tìm nhận  làm vectơ pháp tuyến. Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

Các phương án A, B, C đều gây nhiễu nếu dùng phép thử. Cả 4 đáp án đều thỏa mãn điều kiện  đi qua . Việc thử bằng công thức khoảng cách sẽ mất nhiều thời gian.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  song song với hai đường thẳng  và  nhận vectơ nào sau đây làm vectơ pháp tuyến?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

 lần lượt có các vectơ chỉ phương là . Suy ra 

Vì  nên . Chọn  ta được . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, B, C do tính sai công thức nên nhầm dấu.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, mặt phẳng  đi qua  và cắt các trục tọa độ  lần lượt tại  sao cho  là trọng tâm tam giác . Phương trình của  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Gọi  suy ra trọng tâm là .

Phương trình đoạn chắn của  là: . Chọn đáp án **C.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm trọng tâm  thành trực tâm của tam giác .

**B.** Nhầm A, B, C là hình chiếu của M trên các trục tọa độ.

**D.** Một phương án nhiễu dựa trên suy đoán trọng tâm thường gắn với tỉ lệ 1:1:1.

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm . Phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M*, cắt các trục tọa độ lần lượt tại *I, J, K* mà *M* là trực tâm của tam giác *IJK* là

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

Hướng dẫn giải:

*M là trực tâm tam giác IJK suy ra  hay  có vectơ pháp tuyến là *

*Vậy phương trình mặt phẳng (P): . Chọn đáp án* ***D.***

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm trực tâm và trọng tâm. Suy ra .

**B.** Hiểu  là hình chiếu của  trên các trục tọa độ.

**C.** Một phương án gây nhiễu thêm.

**Phần III: 15 CÂU VẬN DỤNG THẤP**

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua điểm , cắt các tia *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho biểu thức  có giá trị nhỏ nhất là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Gọi  là hình chiếu của  trên mặt phẳng . Ta có .

Để  nhỏ nhất thì  lớn nhất. Mặt khác  nên  lớn nhất bằng  khi . Hay , nghĩa là  có vectơ pháp tuyến là . Suy ra phương trình của  là: . Chọn đáp án (C).

**Phương án nhiễu:**

**A.** Nhầm lẫn khi sử dụng bất đẳng thức Cô si:  và dựa vào điều kiện xảy ra đẳng thức suy ra  nhỏ nhất bằng  khi .

Từ đó suy ra vectơ pháp tuyến là .

B và D là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng  và điểm . Mặt phẳng  đối xứng với  qua điểm  có phương trình . Giá trị của  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Cách 1: Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm  là:  thay vào pt của  được

 hay pt . Chọn đáp án **C.**

Cách 2: Ta có  nên phương trình . Điểm . Điểm đối xứng của  qua  là . Vì  nên .

**Phương án nhiễu:**

A, B, D là các phương án gây nhiễu.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm . Phương trình mặt phẳng  là . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Cách 1: ,

suy ra .

Do đó pt . Chọn đáp án **D.**

Cách 2: Thay tọa độ các điểm  vào phương trình của  suy ra 

Do đó . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Do tính nhầm tích có hướng được vectơ pháp tuyến là  nên pt .

**B.** Do giải hệ phương trình  bằng MTBT nhưng quên chuyển các hệ số tự do sang bên phải dấu bằng nên kết quả đổi dấu 

**C.** Một đáp án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt cầu  và  cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn . Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường tròn :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Vì khoảng cách giữa hai tâm  nên  và  cắt nhau theo một đường tròn. Mặt phẳng chứa đường tròn này là mặt phẳng đẳng phương của  và .

Lấy phương trình  trừ phương trình  ta được . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, B, C đều có vectơ pháp tuyến cùng phương với  nên không loại ngay được phương án nào cả.

Vấn đề tìm điểm giao của mặt phẳng  với  làm mất thời gian.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm  và mặt phẳng (*P*): . Mặt phẳng (*Q*) đi qua hai điểm *A, B* và vuông góc với mặt phẳng (*P*) có phương trình là

**A.  B. ** **C. ** **D. **

Hướng dẫn giải:

***(Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) ⇒ (Q) có VTPT ***

***⇒ .*** Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Thử tọa độ A và B thấy thỏa mãn.

**B.** Thử thấy vuông góc với .

**C.** Vội vàng chọn đáp án khi tính được ***.***

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 đường thẳng  và có phương trình: , . Mặt phẳng (*P*) chứa (*d*) và  có phương trình là

**A.** Không tồn tại **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  đi qua có vectơ chỉ phương .

 đi qua  có vectơ chỉ phương .

Vì  và  cùng phương,  và  không cùng phương nên .

Vectơ pháp tuyến của  là . Suy ra phương trình  là: . Chọn (D).

**Phương án nhiễu**:

**A.** Do tính  nên kết luận không tồn tại .

**B.** Thay nhầm tọa độ vectơ chỉ phương bằng tọa độ điểm đi qua: 

**C.** Vì  nên chọn luôn .

1. Trong không gian với hệ trục *Oxyz*, cho mặt cầu (*S*): . Phương trình mặt phẳng (*P*) chứa trục *Ox* và cắt mặt cầu (*S*) theo một đường tròn có bán kính  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*(S) có tâm I(1; –2; –1), bán kính R = 3. (P) chứa Ox ⇒ (P): ay + bz = 0.*

*Mặt khác đường tròn giao tuyến có bán kính bằng 3 cho nên (P) đi qua tâm I.*

*Suy ra: –2a – b = 0 b = –2a (a0) ⇒ (P): y – 2z = 0. Chọn đáp án* ***A.***

**Phương án nhiễu:**

**B.** Nhầm mặt phẳng chứa trục  là: 

**C.** Tính nhầm hệ số của  và  thành .

**D.** Một phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, Gọi  là mặt phẳng chứa hai đường thẳng  và . Khoảng cách từ điểm  đến  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

* qua  và có ,  qua  và có .*

*,    đồng phẳng.*

*(P) có VTPT  và đi qua M1 nên có phương trình .*

Khoảng cách . Chọn đáp án **A.**

**Phương án nhiễu:**

**B.** Tính sai vectơ pháp tuyến thành  nên được pt 

C, D là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng *d*:  và mặt cầu (*S*): . Lập phương trình mặt phẳng (*P*) song song với *d* và trục *Ox*, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (*S*).

**A. ** **B. ****C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*(S) có tâm I(1; 1; 2), bán kính . d có VTCP .*

*(P) // d, Ox ⇒ (P) có VTPT  ⇒ PT của (P) có dạng: .*

*(P) tiếp xúc với (S) ⇔  ⇔  ⇔  ⇔ *

*⇒ (P):  hoặc (P): .*

*Vì điểm  và  nên mặt phẳng cần tìm là *

**Phương án nhiễu**:

A: Thử bằng máy tính thấy 

**C.** Quên kiểm tra tính song song của (P) và d.

**D.** Tính nhầm được *.*

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình  và mặt phẳng (*α*) có phương trình 2*x* + 2*y* – *z* + 17 = 0. Mặt phẳng (*β*) song song với (*α*) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng  có phương trình . Giá trị của  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ****D. ** hoặc 

**Hướng dẫn giải:**

*Do (β) // (α) nên (β) có phương trình 2x + 2y – z + D = 0 (D17)*

*(S) có tâm I(1; –2; 3), bán kính R = 5. Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính r = 3.*

*Khoảng cách từ I tới (β) là h = *

*Do đó *

*Vậy (β) có phương trình . Suy ra . Chọn* ***C.***

**Phương án nhiễu:**

**A.** Không để ý  trong phương trình .

**B.** Không để ý đến phương trình  nên từ pt suy ra .

**D.** Không để ý điều kiện song song của  và  dẫn đến không có điều kiện .

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q):  và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng:  (với ).*

*Vì (P) ⊥ (Q) nên:  ⇔  (1)*

* ⇔  ⇔  (2)*

*Từ (1) và (2) ta được:  ⇔ *

*Từ (3): B = 0 ⇒ C = –****A.*** *Chọn A = 1, C = –1 ⇒ (P): *

*Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 ⇒ C = 3 ⇒ (P): . Chọn đáp án* ***C.***

**Phương án nhiễu:**

A, B, D là các phương án gây nhiễu về mặt hình thức, hoặc làm tốn thời gian khi sử dụng cách thử các điều kiện trong đề bài.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* với , , , . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A, B* sao cho khoảng cách từ *C* đến (*P*) bằng khoảng cách từ *D* đến (*P*).

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Cách 1: *PT mặt phẳng (P) có dạng: .*

*Ta có:  *

**

*+ Với  (P): .*

*+ Với  (P): .*

Cách 2: Ta có , . Trung điểm của  là .

Mặt phẳng  đi qua  và cách đều  nên:

TH1:  chứa  và song song với  

TH2:  đi qua 3 điểm 

**Phương án nhiễu:**

A: Chỉ xét được TH1.

**B.** D là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng  lần lượt có phương trình , . Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng .

**A. ****B. ** **C. ****D. **

**Hướng dẫn giải:**

Cách 1*: Ta có  đi qua A(2;2;3), có ,  đi qua  và có .*

*Do (P) cách đều  nên (P) song song với  *

*PT mặt phẳng (P) có dạng: *

*Do (P) cách đều suy ra *

**

*Phương trình mặt phẳng (P): *

Cách 2*: Ta có  đi qua A(2;2;3), có ,  đi qua  và có .*

*Do (P) cách đều  nên (P) song song với  *

*Mặt khác (P) đi qua trung điểm của đoạn  là  nên pt (P) là: *

**Phương án nhiễu:**

A, B, C là các phương án nhiễu về hình thức hoặc do tính sai tích có hướng.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa *d* sao cho khoảng cách từ *A* đến (*P*) là lớn nhất.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Ta có .

Suy ra  lớn nhất bằng  khi  hay .

Suy ra .

Ta có  đi qua  và có vtcp là .

. Suy ra 

. Suy ra pt .

Phương án nhiễu:

**B.** Mặt phẳng này đi qua  và vuông góc với  nên nếu thử tính khoảng cách thì được kết quả bằng .

**C.** Là mặt phẳng chứa A và d.

**D.** Một phương án gây nhiễu thêm. Đây là mặt phẳng qua  và vuông góc với .

1. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng d có phương trình: . Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

**A. ****B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*Gọi H là hình chiếu của A trên d ⇒ d(d, (P)) = d(H, (P)). Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có  HI lớn nhất khi . Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận  làm VTPT ⇒ (P): .*

**Phương án nhiễu:**

B, C, D là các phương án nhiễu làm mất nhiều thời gian để thử các điều kiện nếu chọn cách thử.

**C.** Nhầm mặt phẳng song song với *d* thành mặt phẳng vuông góc với *d*

**D.** Nếu tính khoảng cách thì đáp án D cho kết quả lớn nhất, tuy nhiên mặt phẳng ở đáp án D không đi qua ***A*.**

**Phần IV: 10 CÂU VẬN DỤNG CAO**

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S):  và mặt phẳng (*P*):. Phương trình mặt phẳng (*Q*) đi qua điểm  vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S)* có dạng . Giá trị của  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** hoặc  **D. ** hoặc 

**Hướng dẫn giải:**

*(S) có tâm I(–1; 2; 0) và bán kính R = 3; (P) có VTPT .*

*PT (Q) đi qua M có dạng: *

*(Q) tiếp xúc với (S)  (\*)*

* (\*\*)*

*Từ (\*), (\*\*)  *

*Với . Chọn B = 1, A = 2, C = –2 PT (Q): *

*Với . Chọn B = –7, A = 4, C = –4 PT (Q): *

Chọn đáp án **C.**

**Phương án nhiễu:**

**A.** Vì  nên dự đoán vectơ pháp tuyến của  là .

B và D là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Gọi  là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ *O*, không chứa trục , vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tạo với mặt phẳng (*Q*) một góc . Khoảng cách từ  đến  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. ** hoặc 

**Hướng dẫn giải:**

*Giả sử PT mặt phẳng (R): .*

*Ta có:  (1);*

* (2)*

*Từ (1) và (2) *

*Với : chọn  PT mặt phẳng (loại)*

*Với : chọn  PT mặt phẳng (thỏa mãn)*

*Suy ra . Chọn đáp án* ***A.***

**Phương án nhiễu:**

**B.** Thay sai điểm .

**C.** Chỉ giải được  cho pt .

**D.** Không loại được pt .

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (*Q*):  và đường thẳng . Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (*Q*) một góc nhỏ nhất.

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*Ghi nhớ*: Góc giữa  và  lớn nhất bằng  và nhỏ nhất bằng góc giữa  và .

Gọi , , ,  lần lượt là hình chiếu của  trên  và .

Khi đó góc giữa  và  bằng , góc giữa  và  bằng .

Vì  nên , suy ra 

Do đó . Suy ra  nhỏ nhất bằng  khi  hay .

Suy ra  hay vectơ pháp tuyến của  là vectơ chỉ phương của .

Do đó ta có  và .

Cụ thể: Ta có  đi qua  và có vectơ chỉ phương . Mặt phẳng  có vectơ pháp tuyến .

Suy ra . .

Vậy . Chọn đáp án **A.**

**Phương án nhiễu:**

**B.** Tính tích có hướng một lần đã cho là vectơ pháp tuyến của (P) (Trường hợp này góc là lớn nhất ).

**C.** Nếu thử bằng cách tính góc giữa hai mặt phẳng thì đáp án này cho góc nhỏ nhất bằng .

**D.** Phương án nhiễu cho việc thử xem mặt phẳng có chứa đường thẳng  hay không.

1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng  và . Phương trình mặt phẳng (*P*) chứa  sao cho góc giữa mặt phẳng (*P*) và đường thẳng  là lớn nhất là: . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Từ điểm  bất kỳ trên  kẻ đường thẳng  song song với . Lấy  thuộc  không thuộc . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên  và . Gọi  lần lượt là góc giữa  và ,  và .

Ta có  suy ra .

Do đó  lớn nhất bằng  khi  hay .

Ta có  *đi qua  và có VTCP . * có vectơ chỉ phương .

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  là .

Vectơ pháp tuyến của  là .

*Phương trình mặt phẳng (P): .*

**Phương án nhiễu:**

**B.** Do nghĩ góc giữa  và  lớn nhất bằng  khi . Do đó suy ra phương trình của . Suy ra .

**C.** Sau khi tính tích có hướng của  và  được  thì nghĩ đó là vectơ pháp tuyến của  nên được pt 

**D.** Sau khi viết được pt  thì vội vàng tính 

1. Trong không gian toạ độ  cho hai điểm ,  và mặt cầu . Mặt phẳng  đi qua  và cắt  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Để đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất thì khoảng cách lớn nhất. Mà  nên  lớn nhất khi  hay mặt phẳng  chứa  và vuông góc với .

Suy ra .

Ta có .

Suy ra .

Do đó phương trình của . Suy ra . Chọn đáp án **B.**

**Phương án nhiễu:**

A, D là các phương án gây nhiễu thêm.

**C.** Nhầm  là vectơ pháp tuyến của . Do chỉ tính theo quán tính một lần tích có hướng thì công nhận luôn là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Do đó được .

1. Trong không gian toạ độ  cho điểm  và mặt phẳng . Gọi  là mặt phẳng song song với (*P*) và cắt hai tia   tại 2 điểm *B, C* sao cho tam giác *ABC* có diện tích bằng 6. Giả sử phương trình của  là: . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

*Vì (Q) // (P) nên (Q): . Giả sử *

*.  *

*. Chọn đáp án* ***B.***

**Phương án nhiễu**:

A: Sau khi tìm được pt  thì vội vàng tính .

C, D là các phương án nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* mặt phẳng (*P*) đi qua điểm , cắt các tia *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho thể tích tứ diện *OABC* có giá trị nhỏ nhất có phương trình . Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Giá sử  .

Khi đó PT mặt phẳng (P) có dạng: .

Ta có:   (1);  (2)

(1)  ≥  

Dấu "=" xảy ra  (P): 

Suy ra 

**Phương án nhiễu:**

B, C, D do cộng sai .

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho hai điểm , . Gọi  là mặt phẳng sao cho khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng  bằng 15 và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng  bằng 2. Mặt phẳng  đi qua điểm nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Giả sử ta xác định được mặt phẳng (*P*) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A, B* trên (*P*). Ta có : 

Mà . Như vậy dấu đẳng thức ở (1) phải xảy ra

Điều đó tương đương với tại điểm *H* thỏa mãn 

Gọi  

Vậy phương trình mặt phẳng (*P*) là mặt phẳng đi qua *H* nhận làm vtpt, nên có phương trình . Suy ra điểm  thuộc .

Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, B, C là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho đường thẳng , với . Khi  thay đổi thì  luôn nằm trong một mặt phẳng cố định . Tính ?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

.

. Suy ra . Chọn đáp án **D.**

**Phương án nhiễu:**

A, B, C là các phương án gây nhiễu thêm.

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho các điểm , ,  với  thỏa mãn . Biết rằng khi  thay đổi thì quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  thuộc một mặt phẳng  cố định. Tính khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng .

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Hướng dẫn giải:**

Dễ dàng suy ra được tọa độ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  là

.

Từ giả thiết . Do đó  thuộc mặt phẳng cố định . Suy ra . Chọn **A.**

**Phương án nhiễu:**

**B,** **C.** Vì  nên nếu HS không biết làm có thể chọn thiên về số  và .

**D.** Do HS có thể nhầm pt là  lấy ngay từ giả thiết, do không tìm được đúng tọa độ điểm .

----------------------------------------------------Hết----------------------------------------------------