**CHUYÊN ĐỀ**

**CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz**

**I. PHƯƠNG PHÁP**

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

**Cách 1:** Sử dụng phương pháp hình học

**Cách 2:** Sử dụng phương pháp đại số.

**Bài toán 1:** Trong không gian cho các điểm và mặt phẳng Tìm điểm sao cho



**1**. nhỏ nhất.



**2**. lớn nhất với



**Phương pháp:**

Xét vị trí tương đối của các điểm so với mặt phẳng



Nếu thì hai điểm cùng phía với mặt phẳng



Nếu thì hai điểm nằm khác phía với mặt phẳng



**1**. nhỏ nhất.



Trường hợp 1: Hai điểm ở khác phía so với mặt phẳng



Vì ở khác phía so với mặt phẳng nên nhỏ nhất bằng  khi và chỉ khi



Trường hợp 2: Hai điểm ở cùng phía so với mặt phẳng 



Gọi đối xứng với qua mặt phẳng khi đó và ở khác phía và nên



Vậy nhỏ nhất bằng khi



**2**. lớn nhất.



Trường hợp 1: Hai điểm ở cùng phía so với mặt phẳng .



Vì ở cùng phía so với mặt phẳng nên lớn nhất bằng  khi và chỉ khi



Trường hợp 2: Hai điểm ở khác phía so với mặt phẳng .



Gọi đối xứng với qua mặt phẳng , khi đó và ở cùng phía và



nên



Vậy lớn nhất bằng khi



**Bài toán 2:** Lập phương trình mặt phẳng biết



**1**. đi qua đường thẳng và khoảng cách từ đến lớn nhất



**2**. đi qua và tạo với mặt phẳng một góc nhỏ nhất



**3**. đi qua và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.



**Phương pháp:**

**Cách 1:** Dùng phương pháp đại số

**1**. Giả sử đường thẳng và



Khi đó phương trình có dạng:



Trong đó () (**1**)



Khi đó (**2**)



Thay (1) vào (2) và đặt , ta đươc



Trong đó , khảo sát hàm ta tìm được . Từ đó suy ra được sự biểu diễn của qua rồi cho giá trị bất kì ta tìm được .



**2.** và **3**. làm tương tự

**Cách 2:** Dùng hình học

**1**. Gọi lần lượt là hình chiếu của lên và , khi đó ta có:



, mà không đổi. Do đó lớn nhất



Hay là mặt phẳng đi qua , nhận làm VTPT.



**2**. Nếu nên ta xét và (Q) không vuông góc với nhau.



Gọi là một điểm nào đó thuộc , dựng đường thẳng qua và vuông góc với . Lấy điểm cố định trên đường thẳng đó. Hạ Góc giữa mặt phẳng và mặt phẳng là Ta có



Mà không đổi, nên nhỏ nhất khi



Mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng chứa và vuông góc với mặt phẳng . Suy ra là VTPT của .



**3**. Gọi là một điểm nào đó thuộc , dựng đường thẳng qua và song song với . Lấy điểm cố định trên đường thẳng đó. Hạ Góc giữa mặt phẳng và đường thẳng là . Ta có



Mà không đổi, nên lớn nhất khi



Mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng chứa và vuông góc với mặt phẳng . Suy ra là VTPT của .



**II. CÁC VÍ DỤ**

**Ví dụ 1. 8** Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc cho và đường thẳng . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của lên và viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng sao cho khoảng cách từ đến lớn nhất.



**Lời giải.**

Đường thẳng có là VTCP.



Gọi là hình chiếu của lên .



Do .



Gọi là hình chiếu của lên .



Khi đó, ta có: lớn nhất



Suy ra là VTPT của và đi qua .



Vậy phương trình .



**Ví dụ 2.8** Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc cho bốn điểm với là tham số.



**1**. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng và khi ;



**2**. Gọi là hình chiếu vuông góc của trên . Tìm các giá trị của tham số để diện tích tam giác đạt giá trị lớn nhất.



**Lời giải.**

Ta có:



**1**. Với ta có: và



Do đó



Vậy .



**2**. Đặt



Suy ra .



Đẳng thức xảy ra



Ta có:



Do đó



Vậy là giá trị cần tìm.



**Ví dụ 3.8** Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm và cắt các trục tọa độ tại các điểm (khác gốc tọa độ) sao cho:



**1**. là trực tâm của tam giác ;



**2**. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  là lớn nhất;



**3**. ;



**4**. và .



**Lời giải.**

Giả sử mặt phẳng cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là



với



Phương trình mặt phẳng có dạng



Mặt phẳng đi qua điểm nên



**1**. Ta có:



Điểm  là trực tâm tam giác  khi và chỉ khi



.



Phương trình mặt phẳng cần tìm là



**2**.

**Cách 1**: Ta có:



Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của với các số thực



thỏa mãn



Ap dụng bđt Bunhiacopski ta có:



Nên suy ra . Dấu đẳng thức xảy ra khi



Phương trình mặt phẳng cần tìm là



**Cách 2:** Gọi là hình chiếu của trên mặt phẳng .



Vì mặt phẳng luôn đi qua điểm cố định nên



Dấu đẳng thức xảy ra khi khi đó là mặt phẳng đi qua và có véc tơ pháp tuyến là  nên phương trình là



**3**. Vì nên do đó xảy ra bốn trường hợp sau:



Trường hợp 1:



Từ  suy ra nên phương trình là:



Trường hợp 2: Từ  suy ra nên phương trình là



Trường hợp 3: Từ  suy ra nên phương trình là



Trường hợp 4: Từ  có nên phương trình là



Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là và các mặt phẳng



**4**. Vì nên do đó



Nếu nên từ  ta có



Vì nên phương trình mặt phẳng cần tìm là



Nếu nên từ  ta có



Vì nên không có giá trị thỏa mãn.



Vậy phương trình mặt phẳng



**Ví dụ 4.8** Cho mặt cầu và mặt phẳng có phương trình



**1**. Chứng minh rằng mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó;



**2**. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm và (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.



**Lời giải.**

Mặt cầu có tâm , bán kính .



**1**. Ta có , suy ra cắt mặt cầu theo đường tròn tâm bán kính



là hình chiếu của lên mặt phẳng , suy ra phương trình của là:



Tọa độ điểm là nghiệm của hệ



Vậy tâm .



**2**. Ta có nên phương trình đường thẳng



Vì nên mặt phẳng đi qua luôn cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính .



Do đó nhỏ nhất lớn nhất.



Gọi lần lượt là hình chiếu của lên và , ta luôn có



nên suy ra lớn nhất



Do



Vì



Vậy phương trình .



**Ví dụ 5.8** Trong không gian với hệ tọa độ , cho và mặt cầu



**1**. Viết phương trình mặt phẳng chứa trục và cắt theo một đường tròn có bán kính bằng ;



**2**. Tìm tọa độ điểm thuộc mặt cầu sao cho khoảng cách từ đến mặt phẳng (P) lớn nhất.



**Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm và bán kính .



**1**.Trục Ox có phương trình: phương trình (Q): .



Mặt cầu (S) cắt (Q) theo một đường tròn có bán kính



, chọn .



Vậy phương trình mp(Q): .



**2**. Gọi  là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(P) . Suy ra phương trình của



cắt mặt cầu tại hai điểm .



Khi đó nếu lớn nhất .



Tọa độ giao điểm của và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:



.



Giải hệ này ta được hai giao điểm.



Ta có:.



Vậy lớn nhất.



**Ví dụ 6.8** Trong không gian cho mặt phẳng và hai điểm . Tìm điểm thuộc sao cho:



**1**. nhỏ nhất  **2**. lớn nhất



**Lời giải.**

Mặt phẳng có là VTPT



Thay tọa độ hai điểm vào vế trái phương trình của ta được và nên hai điểm nằm về cùng một phía so với .



**1**. Gọi là điểm đối xứng với qua , khi đó và ở khác phía so với và với mọi điểm , ta có .



Do đó , mà không đổi và đẳng thức xảy ra khi , suy ra nhỏ nhất .



Ta có:



Tọa độ giao điểm của và là nghiệm của hệ:



là trung điểm của



Suy ra , phương trình



Tọa độ là nghiệm của hệ



Vậy là điểm cần tìm.



**2**. Vì nằm về cùng một phía so với nên với mọi ta luôn có



, đẳng thức xảy ra khi .



Phương trình



Tọa độ . Vậy .



**Ví dụ 7.8** Trong không gian cho điểm , đường thẳng có phương trình và mặt phẳng



**1**. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng và khoảng cách từ đến lớn nhất;



**2**. Viết phương trình mặt phẳng chứa và tạo với một góc nhỏ nhất;



**3**. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai điểm và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.



**Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có là VTPT



Đường thẳng đi qua và có là VTCP.



**1**. **Cách 1:** Giả sử là VTPT của , suy ra phương trình của có dạng: (1)



Do nên .



Do đó:



Nếu



Nếu thì ta đặt , ta có:



Xét hàm số với ta có:



Suy ra , do đó , đạt được khi



Chọn ta tìm được .



Vậy phương trình .



**Cách 2:** Gọi lần lượt là hình chiếu của lên và , khi đó



, mà không đổi nên lớn nhất



Dẫn tới là mặt phẳng đi qua và nhận làm VTPT.



Vì



Vậy phương trình .



**2**. **Cách 1:** Tương tự như trên ta có



Gọi , .



Ta có: .



Nếu



Nếu , đặt thì ta có:



Khảo sát hàm số ta tìm được



Suy ra đạt được khi , chọn



Vậy phương trình .



**Cách 2:** Gọi là đường thẳng đi qua và vuông góc với



Ta có phương trình , lấy





Gọi lần lượt là hình chiếu của lên và , khi đó và



.



Mà không đổi, nên suy ra nhỏ nhất hay là mặt phẳng đi qua và vuông góc với mặt phẳng .



Mặt phẳng đi qua và vuông góc với nên là VTPT của .



Do đi qua và vuông góc với nên là VTPT của , suy ra phương trình của .



**3**. **Cách 1:** Giả sử phương trình mặt phẳng có dạng:



Do nên



Ta viết lại dạng phương trình của như sau:



Suy ra là VTPT của . Gọi



Ta có:



Nếu , với , đặt



Xét hàm số ta tìm được .



Do đó , chọn



Vậy phương trình của .



**Cách 2:** Ta có: là VTCP của , suy ra phương trình đường thẳng . Gọi là đường thẳng đi qua , song song với . Suy ra phương trình



Trên ta lấy điểm . Gọi lần lượt là hình chiếu của lên và , khi đó .



Ta có: , mà không đổi nên lớn nhất



Hay là mặt phẳng đi qua và vuông góc với mặt phẳng



Ta có: là VTPT của



Suy ra là VTPT của



Vậy phương trình của .





**Ví dụ 8.8** Trong không gian cho mặt phẳng và điểm . Lập phương trình đường thẳng nằm trong và



**1**. đi qua và khoảng cách từ đến lớn nhất, nhỏ nhất;



**2**. đi qua và khoảng cách giữa và lớn nhất.



**Lời giải.**

Mặt phẳng có là VTPT



Gọi là VTCP của , do (1)



**1**. Ta có:



Do đó:



Nếu , với đặt



Xét hàm số , khảo sát hàm số ta tìm được



Khoảng cách từ đến lớn nhất khi , chọn , suy ra phương trình đường thẳng :



Khoảng cách từ đến nhỏ nhất khi , chọn , suy ra phương trình đường thẳng :.



**2**. Đường thẳng đi qua và có là VTCP



Do đó



Đẳng thức xảy ra khi



Vậy phương trình .



**Ví dụ 9.8** Lập phương trình đường thẳng đi qua và cắt đường thẳng  sao cho:



**1**. Khoảng cách từ đến đường thẳng là lớn nhất, nhỏ nhất;



**2**. Khoảng cách giữa và là lớn nhất.



**Lời giải.**

Giả sử cắt tại điểm thì



là VTCP của đường thẳng .



**1**. Ta có nên



Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng là



Ta có nên



Từ đó ta tìm được



Do đó:

đạt được khi nên phương trình đường thẳng cần tìm



đạt được khi nên phương trình đường thẳng cần tìm



**2**. đi qua và có véc tơ chỉ phương



Ta có



Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:



Vì nên



Từ đó ta tìm được , khi đó



Vậy đường thẳng  có phương trình là



**CC BÀI TỐN DNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC**

**Bài 1**

**1.** Trong không gian cho 2 điểm và mặt phẳng .



a) Viết phương trình mặt phẳng chứa và vuông góc với .



b) Tìm toạ độ điểm thuộc sao cho nhỏ nhất.



**2.** Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc cho tứ diện với . Tính góc giữa hai đường thẳng và . Tìm tọa độ trên sao cho tam giác có chu vi nhỏ nhất.



**3.** Trong không gian với hệ toạ độ , cho mặt phẳng có phương trình: và hai điểm . Trong các đường thẳng đi qua và song song với , hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.



**4.** Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm và cắt các tia lần lượt tại các điểm (khác gốc tọa độ) sao cho



a) Thể tích khối tứ diện có giá trị nhỏ nhất.



b) đạt giá trị nhỏ nhất.



**5.** Cho đường thẳng và các điểm



Tìm điểm thuộc đường thẳng sao cho



a) nhỏ nhất.



b) nhỏ nhất.



**Bài 2**

**1.** Trong không gian với hệ tọa độ cho hình hộp chữ nhật



có trùng với gốc tọa độ, với. Gọi là trung điểm của .



a) Tính thể tích của khối tứ diện .



b) Cho . Tìm .



**2.** Cho các điểm



a) Tìm điểm thuộc mặt phẳng sao cho là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc.



b) Tìm điểm trên trục hoành sao cho tam giác có diện tích nhỏ nhất.



**3.** Cho hai điểm



a) Đường thẳng cắt mặt phẳng tại Điểm chia đoạn theo tỉ số nào?



b) Tìm tọa độ điểm trên mặt phẳng sao cho có gia trị nhỏ nhất.



c) Cho điểm có các thành phần tọa độ bằng nhau. Xác định biết rằng đạt giá trị lớn nhất



**4.** Cho mặt phẳng và đường thẳng



Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm



đồng thời

a) và khoảng cách giữa và là lớn nhất.



b) và góc giữa và là lớn nhất, bé nhất.



c) vuông góc với đường thẳng và khoảng cách từ điểm đến đường thẳng là lớn nhất, bé nhất.



**Bài 3** Trong không gian cho đường thẳng và ba điểm . Tìm sao cho:



**1**. nhỏ nhất **2**. nhỏ nhất.



**Bài 4** Lập phương trình mặt phẳng đi qua sao cho cắt các tia lần lượt tại 3 điểm thỏa:



**1**. là trọng tâm tam giác ;



**2**. Tứ diện có thể tích lớn nhất;



**3**. Khoảng cách từ đến lớn nhất;



**4**. và .



**Bài 5** Cho với và



**1.**  Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện . Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính .



**2.**  Gọi là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện . Chứng minh rằng: .



**Bài 6** Cho các điểm .



**1**. Tìm tọa độ điểm thuộc mặt phẳng sao cho : đạt giá trị nhỏ nhất.



**2**. Tìm thuộc mặt cầu sao cho : đạt giá trị lớn nhất.



**Bài 7**

**1.** Cho mặt cầu và mặt cầu Lập phương trình mặt cầu có tâm nằm trên đường nối tâm của hai mặt cầu và tiếp xúc với hai mặt cầu đó và có bán kính lớn nhất



**2.** Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm điểm và



cắt đường thẳng sao cho



a) Khoảng cách từ đến là lớn nhất, bé nhất.



b) Khoảng cách giữa và lớn nhất.



c) Góc giữa và mặt phẳng lớn nhất.



**Bài 8.** Cho và Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng và



**1**. Góc giữa mặt phẳng và mặt phẳng nhỏ nhất.



**2**. Góc giữa mặt phẳng và đường thẳng lớn nhất.



**Bài 9** Trong không gian cho hai điểm và đường thẳng: .



**1**. Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho khoảng cách từ đến lớn nhất.



**2**. Viết phương trình chứa vào tạo với mặt phẳng một góc nhỏ nhất.



**3**. Viết phương trình mặt phẳng chứa và tạo với một góc lớn nhất.



**Bài 10**

Cho các điểm và mặt phẳng có phương trình Tìm điểm thuộc sao cho



**1**. có giá trị nhỏ nhất



**2**. có giá trị lớn nhất.



**3**. có giá trị nhỏ nhất



**4**. có giá trị lớn nhất.



**Bài 11.**

**1**. Cho và đường thẳng đường thẳng Lập phương trình đường thẳng qua vuông góc với và cách khoảng lớn nhất.



**2**. Cho các điểm và đường tròn (C) là giao của mặt phẳng và mặt cầu có phương trình . Tìm tọa độ điểm sao cho đạt giá trị lớn nhất.



**Bài 12.** Cho các điểm lần lượt nằm trên các trục (khác gốc tọa độ). Lập phương trình mặt phẳng biết



**1.** Điểm là trọng tâm của tam giác



**2.** Điểm là trực tâm của tam giác



**3.** Mặt phẳng qua và lớn nhất.



**4.** Mặt phẳng qua và



**5.** Mặt phẳng qua điểm có hoành độ bằng đồng thời



**Bài 13.** Cho mặt phẳng và ba điểm



**1.** Tìm tọa độ điểm có tung độ bằng nằm trong mặt phẳng và thỏa mãn



**2.** Tìm điểm thuộc mặt phẳng sao cho đạt giá trị nhỏ nhất.



**Bài 14.**

**1.** Cho mặt phẳng và các điểm Lập phương trình đường thẳng nằm trong đi qua và cách một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?.



**2.** Lập phương trình đường thẳng đi qua song song với mặt phẳng đồng thời tạo với đường thẳng một góc nhỏ nhất, lớn nhất?.



**3.** Lập phương trình đường thẳng đi qua và cắt đường thẳng sao cho góc giữa đường thẳng và đường thẳng là lớn nhất, nhỏ nhất?



**Bài 15.** Cho đường thẳng và điểm



Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng và



**1.** Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng là lớn nhất.



**2.** Góc giữa mặt phẳng và mặt phẳng là nhỏ nhất.



**3.** Góc giữa mặt phẳng và trục là lớn nhất.



***Chú ý:*** Trong không gian cho điểm .



**1**. Tìm sao cho



a) Nhỏ nhất khi



b) Lớn nhất khi



**2**. Tìm sao cho nhỏ nhất hoặc lớn nhất , trong đó .



**Phương pháp giải:**

Gọi là điểm thỏa mãn: điểm tồn tại và duy nhất nếu . Khi đó :



**1.**



Do không đổi nên:



Nếu thì nhỏ nhất nhỏ nhất



Nếu thì lớn nhất nhỏ nhất



**2.**



Do đó nhỏ nhất hoặc lớn nhất nhỏ nhất hoặc lớn nhất.



Nếu thuộc đường thẳng (hoặc mặt phẳng ) thì lớn nhất khi và chỉ khi là hình chiếu của lên (hoặc ).



Nếu thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua và tâm của (S), cắt (S) tại hai điểm ( thì nhỏ nhất (lớn nhất) ().



**Ví dụ 10.8** Cho và ba điểm .



**1**. Tìm tọa độ điểm sao cho và ;



**2**. Tìm sao cho nhỏ nhất.



**Lời giải.**

**1**. Gọi , ta có:



Suy ra



. Vậy .



**2**. Gọi là điểm thỏa mãn (\*)



Ta có:



Nên . Suy ra



Khi đó:



;



Do đó



Do không đổi nên nhỏ nhất khi và chỉ khi nhỏ nhất hay là hình chiếu của lên mặt phẳng .



Gọi , là VTPT của



Vì (1)



Do nên thay vào (1), ta có được:



Vậy .



**Ví dụ 11.8** Trong không gian cho ba điểm



**1**. Tìm thuộc mặt phẳng sao cho biểu thức sau nhỏ nhất ;



**2**. Tìm thuộc đường thẳng sao cho biểu thức sau lớn nhất: ;



**3.** Tìm thuộc mặt cầu sao cho biểu thức đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.



**Lời giải.**

**1**. **Cách 1:**

Gọi là điểm thỏa mãn: (\*)



Mà



Do đó



Khi đó:



.



Do không đổi nên nhỏ nhất nhỏ nhất là hình



chiếu của lên . Ta có



Tọa độ của là nghiệm của hệ:



Vậy là điểm cần tìm.



**Cách 2:** Gọi



Suy ra:



Suy ra



Đẳng thức xảy ra hay là điểm cần tìm



**2**. **Cách 1:** Gọi là điểm thỏa mãn:



(\*)



Mà ,



Nên (\*)



Khi đó:



Do đó nhỏ nhất nhỏ nhất là hình chiếu của lên



Vì



Vậy là điểm cần tìm.



**Cách 2:** Ta có



Suy ra



Do đó



Nên



Đẳng thức xảy ra . Vậy là điểm cần tìm.



**3**. Gọi là điểm thỏa mãn:



Ta tìm được .



Khi đó



Vì không đổi nên lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi nhỏ nhất, lớn nhất.



Mặt cầu (S) có tâm ,



Tọa độ các giao điểm của với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ



.



Do nên ta có được:



lớn nhất khi và chỉ khi



nhỏ nhất khi và chỉ khi .



**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Trong không gian cho ba điểm .



**1**. Lập phương trình mặt phẳng ;



**2**. Tìm để mặt phẳng song song với ;



**3**. Tìm sao cho nhỏ nhất;



**4**. Tìm sao cho nhỏ nhất.



**Bài 2** Cho các điểm . Tìm tập hợp các điểm trong không gian thỏa mãn



**1**. **2**.



**Bài 3** Trong không gian cho các điểm và mặt phẳng Tìm điểm thuộc mặt phẳng sao cho



**1**. có giá trị nhỏ nhất.



**2**. có giá trị lớn nhất.



**Bài 4** Cho và Tìm điểm thuộc đường thẳng sao cho



**1**. nhỏ nhất



**2**. nhỏ nhất.



**3**. Diện tích tam giác nhỏ nhất.



**Bài 5** Cho tam giác có Điểm



có các thành phần tọa độ bằng nhau.



**1.** Chứng minh rằng tam giác là tam giác nhọn.



**2.** Tìm tọa độ điểm sao cho đạt giá trị nhỏ nhất.



**3.** Tìm điểm sao cho đạt giá trị lớn nhất.



**Bài 6.** Cho ba điểm và mặt phẳng



**1.** Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm của tam giác trên mặt phẳng



**2.** Tìm tọa độ điểm đối xứng với điểm qua mặt phẳng



**3.** Tìm tọa độ điểm thuộc mặt phẳng sao cho biểu thức có giá trị nhỏ nhất với



**Bài 7.** Cho các điểm và đường thẳng



Tìm điểm thuộc đường thẳng sao cho



a) lớn nhất.



b) nhỏ nhất.



**Bài 8.** Cho đường thẳng là tham số.



Tìm giá trị của sao cho



**1.** Khoảng cách từ gốc tọa độ đến là lớn nhất, nhỏ nhất.



**2.** tạo với mặt phẳng một góc lớn nhất.



**3.** Khoảng cách giữa và trục lớn nhất.

