**CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC**

**DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA: A>B TA XÉT HIỆU A-B >0, CHÚ Ý BĐT **

Bài 1: CMR : với mọi x,y,z thì 

**HD:**

Xét hiệu ta có:



Dấu bằng xảy ra khi x = y = z

Bài 2: CMR : với mọi x,y,z thì 

**HD:**

Xét hiệu ta có:



Dấu bằng xảy ra khi x+z=y

Bài 3: CMR : với mọi x,y,z thì 

**HD:**

Xét hiệu ta có:



Dấu bằng khi x=y=z=1

Bài 4: CMR : với mọi a,b ta có : 

**HD :**

Xét hiệu ta có :

 <=>



Dấu bằng khi a=b

Bài 5: CMR : với mọi a,b,c ta có : 

**HD:**

Ta có:







, Dấu bằng khi a=b=c

Bài 6: CMR : 

**HD:**

Ta có:





, Dấu bằng khi a=b=c

Bài 7: CMR : 

**HD:**

Ta chứng minh:





Dấu bằng khi a=b

Ta chứng minh 



Dấu bằng khi a=b

Bài 8: Cho a,b,c là các số thực, CMR: 

**HD:**

Ta có:



Dấu bằng khi b=2a

Bài 9: Cho a,b,c là các số thực, CMR : 

HD:

Ta có:









Dấu bằng khi a=b=1

Bài 10: Cho a,b,c,d là các số thực : CMR : 

HD:

Ta có:









Dấu bằng xảy ra khi a=2b=2c=2d=2e

Bài 11: Cho a,b thỏa mãn: a+b = 1, a>0, b>0 CMR: 

HD:

ta có: VT 



Dấu bằng khi 

Bài 12: Cho 

HD:

Ta có:

, Dấu bằng khi x=y

Bài 13: Cho a > 0, b > 0, CMR: 

HD:

Ta có:





Dấu bằng khi a=b

Bài 14: Cho  CMR: 

HD:

Xét hiệu:







Dấu bằng khi a=b hoặc a=b=1

Bài 15: CMR : với mọi số thực x,y,z,t ta luôn có : 

HD:

Ta có:







Dấu bằng khi x= 2y=2z=2t=0

Bài 17: CMR : 

HD:

Ta có:









Bài 19: CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 20: CMR : 

HD:

Ta có:







Dấu bằng khi x=z=1, y=

Bài 21: CMR : 

HD:

Ta có :







Bài 22: CMR : 

HD:

ta có:

 

Bài 23: CMR : 

HD:

Ta có:



Bài 24: CMR : 

HD:





Đặt 

Khi đó ta có: 

Bài 25: CMR : 

HD:

Ta có:









Bài 26: CMR : 

HD:

Ta có:

 

 

Bài 27: Cho a,b > 0, CMR : 

HD:

Ta có:









Bài 28: Cho a, b > 0, CMR: 

HD:

Ta có:









Bài 29: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD:

Ta có:









Bài 30: CMR: 

HD:

Ta có:









Bài 31: CMR: 

HD:

ta có:









Bài 32: CMR: 

HD:









Bài 33: CMR: 

HD:

Ta có:





 

Bài 34: CMR: 

HD:

ta có:









Bài 35: CMR: 

HD:

ta có:





Không xảy ra dấu bằng

Bài 36: CMR: 

HD:

Ta có:





Bài 37: CMR: 

HD:

ta có: 



, Vì x > 0

Bài 39: CMR: 

HD:





Đặt 

Khi đó ta có: 

, Dấu bằng khi t=0

Bài 40: CMR: 

HD:

Ta có : 

x

 ( ĐPCM)

Bài 41: CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 42: CMR :  với a, b, c >0

HD:

Ta có:













Bài 43: CMR:  với a,b,c>0

HD:

Ta có:





Vì , Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 44: CMR: Với mọi x, y # 0 ta có: 

HD:

Ta có:











Bài 45: CMR : Nếu , thì 

HD:

Ta có:





Bài 46: Cho a,b,c > 0, CMR : 

HD:

Ta có:





Bài 47: CMR : 

HD:

Ta có:





Nên VT > 0

Bài 48: CMR : 

HD:

Ta có:



. đặt 





, Dấu bằng khi 

Bài 49: CMR : 

HD:

Ta có:



Bài 50: CMR : , Với a,b > 0

HD:

Ta có:



Bài 51: CMR : 

HD:

Ta có: 





Bài 52: CMR : 

HD:

Ta có:













Bài 53: Cho a+b+c=0, CMR : 

HD:

Ta có: 



Dấu bằng khi a=b=c=0

Bài 54: Cho x,y,z , CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 55: CMR : Với mọi x,y khác 0, ta luôn có : 

HD:

Ta có: 











Bài 56: CMR : 

HD:

Ta có: 





Bài 57: CMR : 

HD:

ta có:







Bài 58: CMR : 

HD:

Ta có:





Bài 59: CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 60: CMR : 

HD:

Ta có:





Đặt  => 



Bài 61: CMR : , Với 

HD:

Ta có:









Bài 62: Cho a,b dương có tổng 1, CMR : 

HD:

Ta có:

Quy đồng 



 ( đúng)

Bài 63: CMR : Với a,b,c > 0 thì 

HD:

Ta có: 





Bài 64: CMR : 

HD:

Ta có: 





Bài 65: CMR : 

HD:

Ta có: 









Bài 66: Cho a,b,c dương có abc=1, và , CMR : 

HD:

Ta có: ,

Xét 

= 

Bài 67: Cho a,b>0, thỏa mãn : , CMR : 

HD:

Ta có:



 

Bài 68: CMR : 

HD:

Ta có: 





, Giả sử a > b =>  => ĐPCM

Nếu a<b =>  => ĐPCM

Bài 79: CMR : 

HD:

Ta có:







Cộng theo vế ta được:





Bài 70: Cho a+b=2, CMR : 

HD:

Ta có: 



Giả sử  Nếu 

Bài 71: CMR : 

HD:

Ta có:



Giả sử :  và  => ĐPCM

Bài 72: CMR : Với mọi a,b,c > 0 thì 

HD:

Xét 

Giả sử => Các ngoặc đều dương => ĐPCM

Bài 73: Cho a, b là hai số dương, CMR : 

HD:

Ta có: 





Bài 74: Cho a,b là hai số dương, CMR : 

HD:

Ta có: 





 

Bài 75: CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 76: Cho a,b là hai số có tổng bằng 2, CMR : 

HD:

Ta có:







Bài 77: Cho a,b,c là ba số thỏa mãn : a+b+c=3, CMR : 

HD:

Ta có:





Bài 78: Cho , CMR : 

HD:

Ta có:

Xét tích 

mà 

mà 

Bài 79: Cho  và x+y+z=0, CMR : 

HD:

Ta có:

Xét , Cộng theo vế ta có:



Bài 80: Cho x > 0, y > 0, z > 0, CMR : , Với 

HD:

Ta có:









Bài 81: Cho 0 < a,b,c < 1, CMR : 

HD:

Do 

=>  

Mặt khác: 0< a, b<1=> 

Vậy , Chứng minh tương tự => ĐPCM

Bài 82: CMR : 

HD:

Chuyển vế ta có: 







Bài 83: Cho a,b,c,d > 0 thỏa mãn: , , CMR: 

HD:

Ta có: , Nhân vào ta được ĐPCM

Bài 84: Cho , CMR : 

HD:

Ta có:  ( do ab >0)

Do 

Chứng minh tương tự => ĐPCM

Bài 85: Cho a.b.c=1, , CMR : 

HD:

Xét hiệu  

, Do  ĐPCM

Bài 86 : Chứng minh rằng : Nếu  và a,b,c,d là các số dương thì

a= b= c= d

Bài 87: Cho hai số a, b thỏa mãn:  Chứng minh rằng: 

HD:

Ta có: 







 (ĐPCM)

Bài 88: Cho  hãy so sánh :  , và 

HD:

Vì 

 , lại có: 



Bài 89: Cho x, y > 0 thỏa mãn điều kiện:  , Chứng minh rằng:  , Dấu bằng xảy ra khi nào?

HD:

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có:

 , Do vậy

,()

Mà:  , nên 

Do vậy 

Dấu bằng xảy ra khi: 

Bài 90: Chứng minh BĐT sau: 

HD:

Ta có: 

 

Bài 91: Cho a, b là các số dương thỏa mãn:  , Chứng minh rằng: 

HD:

Ta có: 





Bài 92: Cho các số a, b, c  , chứng minh rằng: 

HD:

Do a, b,c  , nên:





Do  , từ đó ta có:



**DẠNG 2 : SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ**

Các BĐT phụ hay dùng :

  

Bài 1: Cho a+b > 1, CMR : 

HD:

Ta có: 

=> 

Vậy 

Bài 2: Cho a+b = 1, CMR : 

HD:

Ta có: 

Bài 3: Cho a+b > 2, CMR : 

HD:

Ta có: 

Bài 4: Cho , CMR: 

HD:

Ta có:



Cộng theo vế ta được: 

Bài 5: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD:

Ta có: Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên ta có:



Bài 6: Cho a,b là hai số thực bất kỳ có tổng bằng 1, CMR: 

HD:

Ta có: 

=> 



Bài 7: Cho , CMR : 

HD:

Ta có: , Nhân theo vế ta được: 

Bài 8: Cho a,b,c > 0, CMR : 

HD:

Ta có: , Do 

Khi đó 

Chứng minh tương tự ta có:

 và 

Khi đó ta có: 

Bài 9: CMR: Với mọi a,b,c > 0 thì 

HD:

Ta có:  và 

Nhân theo vế ta có: 

Bài 10: Cho a,b,c > 0, CMR : 

HD:

Ta có:

Từ , Đặt 

=> 

<=>=> 

Bài 11: Cho a,b > 0, CMR : 

HD:

Ta có: 

Bài 12: Cho a,b,c là ba số dương, CMR : 

HD:

Ta có: 



Bài 13: Cho a,b,c > 0, CMR : 

HD:

Ta có: 

Bài 14: CMR: với a,b,c > 0 thì : 

HD:

Ta có: 

Bài 15: CMR : 

HD:

Ta có: 

Bài 16: Cho a,b,c dương có tổng là 1, CMR : 

HD:

Vì 

Bài 17: Cho a,b,c là các số không âm và ,CMR :



HD:

Ta có: 

Đặt  => ,

Khi đó: 

Bài 18: Cho x,y,z > 0, CMR : 

HD:

Ta có: , Tương tự  và 

Cộng theo vế ta có: 

Bài 19: Cho a,b là các số dương thỏa mãn: a+b < ab, CMR : a+b > 4

HD:

Ta có:

 Do 

Bài 20: Cho a,b,c > 0, CMR : 

HD:

Ta có:



Mà: 

Tương tự => 

Khi đó VT 

Bài 21: Cho a,b,c thỏa mãn: , CMR: 

HD:

Ta có: 

=>  (1)

Mặt khác:  (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được ĐPCM

Bài 22: CMR: , với mọi x,y là số thực

HD:

Ta có:  (1)

Tương tự:  (2)

Cộng theo vế ta được : 

Bài 23: CMR với a,b,c > 0 thì 

HD:

Ta có: , Tương tự ta có: 

Cộng theo vế ta được :

Bài 24: CMR: với a,b > 0 và a > b > 0 thì 

HD:

Ta có: , Mà 

Khi đó 

Bài 25: Cho 3 số a,b,c dương thoă mãn: a+b+c = 4, CMR : 

HD:

Ta có: 



=> 

Bài 26: Cho 2 số x,y > 0 thỏa mãn: , CMR : 

HD:

Ta có: 



Bài 27: Cho a+b = 1, CMR: 

HD:

Ta có: 

Bài 28: Cho a+b=1, CMR: 

HD:

Ta có: 

Mặt khác:

Bài 29: Cho 3 số x,y,z >0, CMR: 

HD:

Ta có: , Dấu bằng khi 

Bài 30: Cho a,b,c thỏa mãn: CMR: 

HD:

Vì 

Khi đó:

 (1)

mà 



 (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: 

**DẠNG 3: BẤT ĐẲNG THỨC COSI VÀ SCHAWRZ**

BĐT Cô Si: Với hai số a,b không âm ta có: , Dấu = xảy ra khi a=b

Mở rộng ta có: 

Co si ngược dấu:  và 

BĐT Schwarz:  với x, y > 0, Dấu = khi x = y

Mở rộng : , dấu = khi x = y = z

Bài 1: Cho x, y>0. Chứng minh BĐT : 

HD :

Ta có: gt 

Dấu ‘ = ‘ khi x=y

Bài 2: CMR: 

HD :

Ta có : 

Bài 3: CMR: 

HD:

Ta có : , tương tự : , và 

Cộng theo vế ta được : 2VT 2VP => VT> VP

Bài 4: Cho a,b,c là ba số dương, CMR: 

HD:

Ta có :  và 

Nhân theo vế ta được : 

Bài 5: Cho a,b,c là ba số dương, CMR: 

HD:

Ta có : Áp dụng bất đẳng thức :

Đặt 

 

Bài 6: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Vì a, b, c là ba cạnh của 1 tam giác nên các mẫu đều dương

Áp dụng BĐT schawzr ta có : 

Tương tự ta cũng có :  và 

Cộng theo vế ta được điều phải chứng minh

Bài 7: Cho , CMR: 

HD :

Ta có : , Nhân theo vế ta được : 

Bài 8: Cho , CMR: 

HD :

Áp dụng BĐT schawzr ta có :

, Vì 

Bài 9: Cho a,b,c dương có tích bằng 1, CMR: 

HD :

Ta có : 

Bài 10: Cho a,b không âm, CMR: 

HD :

Ta có : 

Bài 11: Cho a,b,c,d dương có tích bằng 1, CMR:

HD :

Ta có : 

Bài 12: CMR: 

HD :

Ta có : 

Do áp dụng BĐT : 

Bài 13: CMR: 

HD :

Ta có : (1)

Mặt khác : 

, Thay vào (1) ta được : 

Bài 14: CMR: 

HD :

Vì  là 4 số dương => 

Bài 15: Cho a,b > 0, CMR: 

HD :





Bài 16: CMR: 

HD :

Ta có :  Tương tự ta có :  và 

Cộng theo vế ta có :



Bài 17: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD :

Ta có : , Tương tự ta có :  và



Cộng theo vế ta được : 

Bài 18: Cho a,b,c>0, CMR: 

HD :

Ta có : => ĐPCM

Bài 19: Cho a,b > 0, a+b = 1, CMR: 

HD :

Ta có :

Ta lại có : 

Khi đó 

Bài 20: CMR với mọi a,b > 0 thỏa mãn: ab=1, ta có BĐT: 

HD :

Ta có : 

Bài 21: Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: , CMR: 

HD :

Áp dụng BĐT : 



Tương tự ta có : 

Khi đó nhân theo vế ta được : 

Bài 22: CMR: với a,b,c > 0 thì 

HD :

Áp dụng BĐT :



Tương tự ta có : , Cộng theo vế ta được  ĐPCM

Bài 23: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD :

Ta có : , Tương tự ta có :  và 

Cộng theo vế ta được :



Bài 24: Cho a,b không âm, CMR: 

HD :

Ta có : 

Bài 25: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD :

Co si cho hai số : , Ta được: 

Tương tự ta có :

 và 

Cộng thoe vế ta được : 

Bài 26: CMR: Trong tam giác ABC ta có: 

HD :

Ta có : 

Lại có : 

, Tương tự ta có :

 và 

=>  => Bài 27: Cho a, b là các số thực không nhỏ hơn 1, CMR: 

HD :

Ta có : 

Chứng minh tương tự ta có :

Vì 



Bài 28: Cho a,b,c dương thỏa mãn: abc = 1, CMR: 

HD :

Ta có : , 

Ki đó 



Bài 29: Cho CMR: 

HD :

Áp dụng BĐT : 

Dấu ’’=’’ xảy ra khi 

Khi đó ta có :



tương tự ta có :



, Khi đó 

Bài 30: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của: 

Bài 31: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của : 

Bài 32: Cho a,b,c là các số thực dương, CMR: 

Bài 33: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của :

Bài 34: CMR với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1, thì: 

Bài 35: Giả sử có: 2015 số nguyên dương:  thỏa mãn: , CMR có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau

Bài 36: Cho , CMR: 

HD:

Từ: 

Do đó :



Bài 37: Cho hai số a,b khác 0 và trái dấu nhau trong đó: . xác định dấu của mỗi số

HD:

Vì  nên  nên  mà a ,b trái dấu nên a <0

Bài 38: Cho x>y>0 và , CMR: 

HD:

Vì x>y>0=>x - y>0, 

Do đó : 

=> 

Bài 39: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn :  , CMR: 

HD:

Cách 1:

Ta có: 

Vì 

Khi đó:  , Mà: 

 

Cách 2:

Ta có: 

Mặt khác ta lại có:  Nên  ,

Dấu ‘’=’’ khi 

Bài 40: Cho  , Chứng minh rằng:  (1)

HD:

Đặt  , Khi đó:

 , Với 

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

 , ĐT xảy ra khi x=y=z

 , ĐT xảy ra khi 

 , mà  , Đẳng thức xảy ra khi :

 

Bài 41: Cho a, b,c là ba số dương và  , CMR : 

HD:

Ta có:  và 



Áp dụng BĐT co si cho ba số dương a, b, c , Dấu bằng xảy ra khi a= b= c

**DẠNG 4: SẮP SẾP CÁC BIẾN VÀ BĐT TAM GIÁC:**

Bài 1: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR:

HD :

Ta có : 

Tương tự ta có: , cộng theo vế 

Bài 2: Cho a,b,c > 0, CMR: 

HD :

Ta có :  và  và 

Cộng theo vế ta được :





Bài 3: Cho a,b,c,d > 0, CMR: 

HD :

Ta có :  và 

 và 

Cộng theo vế ta có :



Bài 4: Cho a,b,c,d > 0, CMR: 

HD :

Ta có : 

Chứng minh tương tự :

, 

Và 

Cộng theo vế ta có :



Bài 5: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR:

HD :

Ta có : và  và 

Cộng theo vế ta được : 

Bài 6: CMR nếu a,b,c > 0 thì 

HD :

Áp dung BĐT : , Đặt 

Khi đó ta có : 

=> ĐPCM

Bài 7: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Đặt : , Khi đó : 



Bài 8: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,

CMR: 

HD :

Áp dụng BĐT Schawzr : 

Tương tự ta có :

 và , Cộng theo vế ta được : ĐPCM

Bài 9: CMR với a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó thì:



HD :

Ta có : 

Tương tự ta có :  và 

Cộng theo vế ta được điều phải chứng minh

Bài 10: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a,b,c chu vi là 2p, CMR: 

HD :

ta có : 

Chứng minh tương tự ta có :  và 

Nhân theo vế ta được : 

Bài 11: CMR: Nếu a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác thì:

HD :

Ta chứng minh : 

Chuyển vế ta được : 

Ta chứng minh : 

Ta có : , Cộng theo vế ta được : 

Bài 12: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Ta có : 

Tương tự ta có :  và 

Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 13: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Ta có :



 (Luôn đúng )

Bài 14: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, CMR:  với 

HD :

Nhân 2 vế với a,b,c ta có : 

 Đúng

Bài 15: CMR với a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thì: 

HD :

Xét hiệu : 

 đúng

Bài 16: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR:

HD :

Ta xét : 

Chứng minh tương tự ta có : Tổng của 3 số âm là 1 số âm

Bài 17: Cho 

HD :

Đặt  Cộng theo vế ta được :

 (1)

Mà : , Thay vào (1)

=> 

Bài 18: Cho a,b,c là dộ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Ta có : , Cộng theo vế ta được ĐPCM

Bài 19: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: , cũng là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác

HD :

Ta cần chứng minh : 

Tương tự ta cũng có :  và 

Bài 20: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 2, hãy so sánh a,b,c với 1,

CMR: 

HD :

Giải sử : 

Khi đó : 

lại có :





Bài 21: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,

CMR: 

HD :

Ta có :

Tương tự ta có :  và 

Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 22: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR : 

HD :

Ta chứng minh : 

Chuyển vế ta được : 

Ta chứng minh : 

ta có :

, Cộng theo vế ta được : 

Bài 23: Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 2,CMR: 

HD :

Giải sử : 

Khi đó : 

lại có :





Bài 24: Cho a,b,c là ba cạnh của 1 tam giác: CMR: 

HD :

Ta có : 

, Lại có :





Bài 25: Cho a,b,c > 0 thỏa mãn: ,

Tìm Max của: 

HD :

Ta có : 

Schawzr ta có :

 (1)

Mà : , Tự chứng minh

=>  thay vào (1) ta được :



Bài 26: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác: CMR :



HD :

Xét hiệu ta có :



Tương tự ta cũng có :

 và 

Khi đó



Giả sử :  Ngoặc 2, 3 

ta có ngoặc 1= , ĐPCM

Bài 27: Cho 

HD :

Đặt  Cộng theo vế ta được :

 (1)

mà : , Thay vào (1)

=> 

Bài 28: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: 

HD :

Đặt : , Khi đó : 



Bài 29: Cho a,b,c,d>0, CMR: 

Bài 30: Chứng minh với ba số a, b, c đôi 1 khác nhau thì :



Bài 31: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn :  , CMR : 

Bài 32: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng chu vi

HD:

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z ( x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có:  (1) và  (2)

Từ (2)  , thay vào (1) ta có:





 , thay vào (1) ta được :



Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là : 

**DẠNG 5, TÌM ĐIỂM RƠI CỦA BĐT CO SI:**

Bài 1: Cho 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi a = 2 => 

Khi đó ta có :



Dấu bằng khi 

Bài 2: Cho a,b > 0, 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi 

Khi đó : 

, Mà 



Bài 3: Cho Tìm GTNN của: 

HD :

Ta có : , đặt 

Dấu bằng khi 



Bài 4: Cho a3, Tìm GTNN của: 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi 



Vậy Min 

Bài 5: Cho x1, Tìm Min của: 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi 

Khi đó : 

Bài 6: Cho x,y là các sớ thực dương thỏa mãn: x+y6, Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi , Dự đoán sẽ có các cặp (x ; y) là (1 ;5),(2 ;4) , (5 ;1) và (4 ;2)

và nhận thấy cắp (2 ;4) thì P có giá trị nhỏ nhất

Khi đó ta có :



=>

Bài 7: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn : a+2b+3c20,

Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi a=2, b=3, c=4

Khi đó : 



Bài 8: Cho a2, Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi a=2=> , Khi đó ta có :



Bài 9: Cho , Tìm Min của: 

HD ;

Dấu bằng khi , Khi đó ta có :

, mà 

Bài 10: Cho a10, b100, c1000, Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi , Tương tự với b và c,

Khi đó ta có :

, Tương tự với b và c

Bài 11: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi , Khi đó 

 Mà 

Vậy 

Bài 12: Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn: a+b+c=1, Tìm Max của: 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi  

Tương tự ta có : 

Cộng theo vế ta được : 

Bài 13: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi 



Bài 14: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: ,

Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi 



Bài 15: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: , , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi  Khi đó :

, Tương tự ta cũng có : 



Cộng theo vế ta được : 

Bài 16: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn: , Tìm min của: 

HD :

Ta có : Dấu bằng khi 

Khi đó ta có : 

mà 

Vậy 

Bài 17: Cho a,b là các số thực thỏa mãn: , Tìm min của 

HD :

Dấu bằng khi 



Bài 18: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: , Tìm Min 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đoa : 



Bài 19: Cho a,b,c là các sơ thực dương thỏa mãn: , Tìm Min:

HD :

Dấu bằng khi : 





Bài 20: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn: 

Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi : , Ta cần chứng minh 

Xét 

, do , Nên ta cần chứng minh :



BĐT này đúng do:  khi 

Bài 21: Cho a,b>0 Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi : 

Khi đó ta có :



Bài 22: Cho  và a,b>0, Tìm min của: 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đó : 



Bài 23: Cho a,b>0 và , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi : . Khi đó : 

 =>

Mặt khác : 

Dấu bằng khi 

Bài 24: Cho a,b>0, , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đó : 

. Dấu bằng khi 

Bài 25: Cho a,b>0 và , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi  và 

Khi đó : 



, Vì  =>, Dấu bằng khi 

Bài 26: Cho a,b,c>0 và , Tìm Min của: 

HD :

Dấu bằng khi , Khi đó : 

Tìm m sao cho : 



, Ta lại có : 



Bài 27: Cho x,y,z>0 và , Tìm Max của : 

HD :

Dấu bằng xảy ra khi 

Nên : 



Bài 28 : Cho a,b,c là các số thực dương và , CMR: 

HD :

Dấu bằng khi : 

Khi đó ta có :  =>,

Tương tự ta có : 

Bài 29: Cho a,b,c dương thỏa mãn: a+b+c=1, Tìm Max của 

HD :

Dấu bằng khi : 

Nên : 

Tương tự ta có :

 và 

Cộng theo vế ta được : 

Bài 30: Cho x,y,z>0 và xyz=1, CMR: 

HD :

Ta có  Dấu bằng khi 

Khi đó : , tương tự ta có :  và 

Cộng theo vế ta được : 

Bài 31: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn : , Tìm Min của : 

HD :

Ta có : , Cộng theo vế ta được :

Dấu bằng khi x=y=1, z=2

Bài 32: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn : , Tìm Min của : 

HD :

Ta có :  hoặc 

Hay 

Dấu bằng khi 

Bài 33 : Cho a,b là các số thực thỏa mãn :  và a+b=11,

Tìm Max của : 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đó :

Bài 34: Cho x,y > 0, 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đó : 

=>

Bài 35: Cho a,b,c > 0, Thỏa mãn :

HD :

Dấu bằng khi 

Co si ngược ta có :,

Tương tự ta có : 

Cộng theo vế ta được : 

Bài 36: Cho a,b > 1, CMR: 

HD :

Dấu bằng khi :

Co si ngược ta có :





Cộng theo vế ta được :



Bài 37: Cho x,y,z > 0, x+y+z = 2, tìm GTNN của: 

HD :

Dáu bằng khi 

Khi đó : 

Nên : , Tương tự ta có :



Bài 38: Cho x,y > 1, CMR :

HD :

Dấu bằng khi , Thay vào ta được :



Khi đó :  và 



Bài 39: Cho a,b,c > 0, thỏa mãn:, CMR: 

HD :

Dấu bằng khi 

Khi đó : 

Tương tự ta có : 

**BẤT ĐẲNG THỨC CHƯA SOẠN**

Bài 1 : Cho  , Chứng minh rằng : 

HD:

Từ 

Mặt khác: 



Với 

Với 

Bài 2 : Cho x+y=2, CMR: 

HD :

Xét =

Do x-1=1-y

Vậy 

Giả sử :  và  do đó : 

Tương tự nếu lấy  và  đo đó  dấu = khi x=y=1

Bài 3: CMR: 

HD:

Đặt , từ đó:

 thay vào A ta được 

Bài 4: CMR: nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì A<0

HD:

Ta có:







 Vậy A<0

Bài 5: Cho a,b,c,d > 0, Chứng tỏ rằng: có giá trị không nguyên

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: 

HD:

Ta có gt=> =>

Bài 7: Cho  và , CMR: 

HD:

Đặt 

Khi đó x+y+z= và  với 

Áp dụng Co si cho 3 số :  ta được 

=> mà  =>  đảng thức xảy ra khi x=y=z=

Bài 8: Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn: a+b+c=3. CMR: 

HD:

Theo giả thiết ta có: 

Cộng hai vế với  sau đó thu gọn ta được:

, Mà 

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số a,b,c có 1 số bằng 0, một số bằng 2 và 1 số bằng 1

Bài 9: Cho x,y >0 thỏa mãn: , CMR : , dấu bằng xảy ra khi nào ?

HD:

Áp dụng BĐT cô si cho hai số dương ta có:  do vậy 

Do . Mà  Nên  do vậy  dấu bằng khi x=y=1

Bài 10: CM: 

HD:

=>

=> luôn đúng, dấu bằng khi x=y=1

Bài 11: CMR không có giá trị nào của x thỏa mãn: 

HD:

Ta có:  mà => đpcm

Bài 12: Cho a, b là các số dương thỏa mãn: , CMR: 

HD:

Ta có: 

=> 

=>  luôn đúng do a, b dương

Bài 13: Cho các số a, b, c, CMR: 

HD:

Do a,b,c Nên 

=>, Do a,b,c nên , từ đó ta có:



Bài 14: Cho a>0, b>0 và a+b=1, CMR: 

HD:

=> do a+b=1

=> =>  đúng với mọi a, b

Bài 15: Cho a, b, c là ba số dương và , CMR : 

HD:

 và 

=> 

Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số a, b, c dương , dấu bằng khi a=b=c

Bài 16: Cho a,b,c là các số thỏa mãn hai điều kiện sau:  vô nghiệm,

CMR: 

HD:

Do  nên ta có  (\*)

Vì phương trình  vô nghiệm nên 

=>  từ đó suy ra: (\*) đúng hay 

Bài 17: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn : , CMR : 

Bài 18: Cho x,y,z là ba cạnh của 1 tam giác: CMR: 

Bài 19: CMR :  với mọi x

Bài 20: Cho a, b, c, d thỏa mãn:  và . CMR: 

Bài 21 : CMR : 

HD :

Ta có :  Khi đó : 

, Dấu ‘’=’’ khi x=y=z

Bài 22 : CHứng minh rằng  nếu :  , thì  hoặc : 

Bài 23 : Cho a, b, c, d >0, CMR : 

Bài 24: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các sớ thực thỏa mãn:  và , thì 

Bài 25: Cho  , CMR: 

Bài 26: Cho  , CMR: 

Bài 27: Cho  , Tính giá trị của: 

Bài 28: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn:  , CMR: 

Bài 29: Cho  , tính giá trị của: 

Bài 30: Cho  , CMR: 

Bài 31: Cho  , Rút gọn: 

Bài 32: Cho  , CMR: 

Bài 33: Cho  , CMR: 

Bài 34: Chứng minh rằng nếu:  thì:

Bài 35: Cho a ,b thỏa mãn:  , CMR: 

Bài 36: Cho a, b không âm thỏa mãn:  , Tìm GTLN của: 

HD:

Ta có: ,

Bài 37: Cho a, b, c là các số thỏa mãn hai điều kiện  vô nghiệm,

Chứng minh rằng: 

HD:

Do  , nên bất đẳng thức: 

Vì phương trình:  vô nghiệm nên 



Từ đó suy ra: 