**CÁC DẠNG TOÁN**

**HÌNH HỌC 9**

**ÔN THI VÀO**

**LỚP 10**

Phần Hình học trong cấu trúc các đề thi được chia thành 2 bài:

Bài 1: Bài toán tổng hợp về đường tròn

Bài 2: Bài toán hình có nội dung thực tế ( ứng dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc hình học không gian)

 **A. BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ ĐƯỜNG TRÒN:**

**I. Các câu trong bài thường có dạng:**

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh hệ thức về tích hai đoạn thẳng (hoặc tính toán)
3. Chứng minh quan hệ song song, quan hệ vuông góc
4. Tứ giác đặc biệt, tam giác đặc biệt.
5. Tiếp tuyến.
6. Thẳng hàng, đồng qui.
7. Quỹ tích.
8. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

........

**II. Giới thiệu phương pháp chứng minh một số dạng câu hỏi hình học thường gặp:**

 **1.** **Chứng minh tứ giác nội tiếp**:

Các cách chứng minh tứ giác nội tiếp:

Cách 1: Chứng minh 4 điểm cách đều một điểm

Cách 2: Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 1800

Cách 3: Chứng minh góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện

Cách 4: Hai đỉnh kề nhìn hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau

Cách 5: Dùng hệ thức lượng trong đường tròn

(Bài tập 43 sách bài tập)

AC  BD = E, biết AE.EC = BE.ED => A, B, C, D thuộc một đường tròn

  **2. Chứng minh hệ thức hình học:**

- Sử dụng Định lí Ta Let, tam giác đồng dạng, tính chất đường phân giác…

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

|  |  |
| --- | --- |
| b2 = a.b’,  c2 = a.c’ | h2 = b’.c’  |
|  a.h = b.c |   |

**3. chứng minh hai đường thẳng song song:**.

1. Hai đường thẳng đó cắt một đường thẳng thứ ba và tạo thành một cặp góc ở vị trí so le trong, so le ngoài hay đồng vị bằng nhau, cặp góc trong cùng phía bù nhau.
2. Hai đường thẳng đó cùng song song hay cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba.
3. Hai đường thẳng đó là đường trung bình và cạnh tương ứng trong tam giác, hình thang.
4. Hai đường thẳng đó là hai cạnh đối của tứ giác đặc biệt.
5. Sử dụng định lí đảo của định lí Talet.

 **4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:**

1. Hai đường thẳng đó cắt nhau và tạo ra một góc bằng  .
2. Hai đường thẳng đó chứa hai tia phân giác của hai góc kề bù.
3. Hai đường thẳng đó chứa hai cạnh của tam giác vuông.
4. Có một đường thẳng thứ ba vừa song song với đường thẳng thứ nhất vừa vuông góc với đường thẳng thứ hai.
5. Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng.
6. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác.
7. Sử dụng tính chất đường trung tuyến, phân giác ứng với cạnh đáy của tam giác cân.
8. Hai đường thẳng có chứa đường chéo của hình vuông, hình thoi.
9. Sử dụng tính chất đường kính và dây trong đường tròn.
10. Sử dụng tính chất tiếp tuyến trong đường tròn.

**5. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau:**

1. Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.
2. Hai cạnh bên của tam giác cân, hình thang cân.
3. Sử dụng tính chất trung điểm.
4. Khoảng cách từ một điểm trên tia phân giác của một góc đến hai cạnh của góc.
5. Khoảng cách từ một điểm trên đường trung trực của đoạn thẳng đến hai đầu đoạn thẳng.
6. Hình chiếu của hai đường xiên bằng nhau và ngược lại.
7. Dùng tính chất bắc cầu.
8. Có cùng độ dài hoặc nghiệm đúng một hệ thức.
9. Sử dụng tính chất của các đẳng thức, hai phân số bằng nhau.
10. Sử dụng tính chất trung tuyến của tam giác vuông, đường trung bình của tam giác.
11. Sử dụng tính chất về cạnh và đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
12. Sử dụng kiến thức về diện tích.
13. Sử dụng tính chất hai dây cách đều tâm trong đường tròn.
14. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau trong đường tròn.
15. Sử dụng quan hệ giữa cung và dây trong một đường tròn.

**6. Chứng minh trung điểm của đoạn thẳng:**

1. Chứng minh M nằm giữa A, B và MA = MB hoặc MA = MB =  .
2. Sử dụng tính chất trọng tâm trong tam giác.
3. Sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác, hình thang.
4. Sử dụng tính chất đối xứng trục và đối xứng tâm.
5. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
6. Sử dụng tính chất đường kính vuông góc với dây trong đường tròn.
7. Sử dụng tính chất đường kính đi qua điểm chính giữa cung trong đường tròn.

**7. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:**

1. Chứng minh điểm A thuộc đoạn thẳng BC.
2. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt.
3. Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau.
4. Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ ba.(Tiên đề Ơclit)
5. Dùng tính chất trung trực: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai đầu một đoạn thẳng.
6. Dùng tính chất tia phân giác: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.
7. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao, trung trực trong tam giác.
8. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
9. Sử dụng tính chất tâm và đường kính của đường tròn.
10. Sử dụng tính chất đường nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc nhau.

 **8. Chứng minh ba đường thẳng đồng qui:**

1. Chứng minh giao điểm của 2 đường thẳng nằm trên đường thẳng thứ 3.
2. Chứng minh giao điểm của đường thẳng thứ nhất và thứ hai trùng với giao điểm của hai đường thẳng thứ hai và thứ ba.
3. Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến, đường cao, trung trực, phân giác trong tam giác.
4. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

 Như vậy, mỗi dạng câu hỏi, bài tập hình học có rất nhiều phương pháp giải. Tuy nhiên, trong quá trình ôn luyện, giáo viên nên lưu ý cho học sinh các phương pháp dễ nhớ, dễ hiểu, dễ vận dụng, thường hay sử dụng nhất để học sinh có định hướng tốt nhất khi làm bài. Đặc biệt chú ý nhắc nhở học sinh các sai lầm thường gặp trong mỗi phương pháp....

 **Đặc biệt, bài toán quỹ tích, bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học tương đối khó đối với học sinh.**

**9. Bài toán quỹ tích:**

 Có hai dạng quỹ tích thường gặp là đường thẳng và đường cong. Giáo viên hướng dẫn để **học sinh có thể định hướng quỹ tích mình cần tìm là đường thẳng hay đưòng tròn ( cung tròn).**

 \* **Nếu quỹ tích là đường thẳng**, có thể là một trong các đường:

Đường trung trực của đoạn thẳng.

- Đường phân giác của góc.

- Đường thẳng song song và cách một đường thẳng cho trước một khoảng không đổi.

 \* **Nếu quỹ tích là đường cong**, có thể là:

- Cung chứa góc.

- Đường tròn.

 Để học sinh không thấy sợ loại toán này, giáo viên hướng dẫn học sinh nhận biết ba loại yếu tố cơ bản:

**- Yếu tố cố định:** là các yếu tố có vị trí cố định và độ lớn không đổi, thông thường là các điểm, góc, tam giác,…

**- Yếu tố chuyển động:** là các yếu tố có vị trí và độ lớn thay đổi, thông thường là các điểm mà ta cần tìm tập hợp điểm, các hình có chứa các điểm đó.

**- Yếu tố không đổi:** độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc, chu vi, diện tích của hình.

 Để chứng minh mọi điểm M có tính chất αthuộc hình H, ta phải tìm mối quan hệ giữa điểm chuyển động với các yếu tố cố định rồi dùng lập luận để đưa về một trong những tập hợp điểm mà ta đã biết

 **10. Bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học.**

 **a. Dạng chung:** Trong tất cả các hình có chung một tính chất tìm những hình sao cho một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, diện tích…) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.

 **b. Phương pháp:**

**+ Phương pháp 1:** Vận dụng bất đẳng thức để giải bài toán cực trị: học sinh cần nắm vững các kiến thức về:

- Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu.

- Bất đẳng thức tam giác.

- Quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây, quan hệ giữa dây và đường kính, quan hệ giữa dây và cung trong đường tròn.

- Các bất đẳng thức đại số: x2  0, (x +y)2  4xy,…

- Bất đẳng thức Côsi với hai số a, b không âm:   

- Bất đẳng thức Bunhia Côpxki với các số m, n, x, y:

(m2 +n2) (x2+ y2)  (mx+ny)2.

**+ Phương pháp 2:** Chọn biến trong bài toán cực trị: Giải bài toán cực trị bằng phương pháp đại số có thể chọn một đại lượng làm biến (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, tỉ số lượng giác của một góc,…), có trường hợp chọn hai đại lượng làm biến (chú ý các đại lượng không đổi để chọn biến cho phù hợp).

1. **MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN NHỚ**

Từ các bài toán cơ bản SGK, SBT rút ra một số kết quả cần chú ý:

1. Đường kính vuông góc với dây thì đi qua điểm chính giữa của cung và ngược lại
2. Hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau
3. Hệ thức lượng trong đường tròn

+ MA.MB = MC.MD với MAB, MCD là cát tuyến của đường tròn (O)





+ Với MT là tiếp tuyến MAB là cát tuyến

MT2 = MA.MB



1. Định lí đảo của định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Nếu A  (O), AB là một dây cung BAx = SđAB thì Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O)



1. **MỘT SỐ BÀI TẬP**

**Bài 1**: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) ( B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn CO lấy điểm I ( I khác C , I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E ( D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn
2. Chứng minh 
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh HK//DC.
4. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Giải



1. Vì AB là tiếp tuyến (O) nên ABO = 900 nên B thuộc đường tròn đường kính AO

H là trung điểm của DE nên OH  DC => AHO = 900

nên H thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy 4 điểm A, B, O, H thuộc đường tròn đường kính AO

****

1. Ta có ABD = AEB ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Xét ABD và AEB có :

EAB chung

ABD = AEB ( chứng minh trên)

Suy ra ABD AEB (g . g) => 

3. Tứ giác ABOH nội tiếp suy ra OBH = OAH

Mà OAH = HEK ( do EK //AO)

Suy ra HBK = HEK

HBK và HEK cùng nhìn đoạn HK nên tứ giác BHKE nội tiếp

Có BKH = BEH ( cùng chắn cung BH)

 BED = BCD ( cùng chắn cung BD)

Suy ra BKH = BCD, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK // DC.

4.



TDC = TBC = TBO = TAO => tứ giác APDT nội tiếp

=> ATP = ADP ( cùng chắn AP )

z

Mà ADP = EDC = CBE

Có ∆ABP = ∆ATP ( c.g.c) => ABP = ATP

=> ABP = CBE

Lại có ABP + PBO = 900 ( AP là tiếp tuyến của (O))

=> EBP + CBE = 900 => PBE = 900 hay FBE = 900

=> EF là đường kính => Tứ giác BECF là hình chữ nhật

**Nhận xét:**

- Phần a) Chứng minh 4 điểm thuộc một đường tròn bằng cách chỉ ra hai góc vuông

- Phần b) Chứng minh hệ thức hình học qua tam giác đồng dạng. Phần b) từ bài hệ thức lượng trong đường tròn.

- Phần c) Dùng phương pháp tứ giác nội tiếp => hai góc nội tiếp cùng chắn một cung bằng nhau => quan hệ song song

- Phần d) Chứng minh tứ giác nội tiếp => góc bằng nhau => góc vuông

=> 1 đoạn là đường kính => tứ giác là hình chữ nhật ( 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

**Trong hình hoc ta thường gặp một *lớp các bài toán khá hẹp.* Sau đây là lớp các bài toán về hai tiếp tuyến cắt nhau**

**Bài 2**: Cho đường tròn (O; R). Qua K nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD với đường tròn ( A, B là các tiếp điểm, C nằm giữa K và D). Gọi H là trung điểm của CD, M là giao điểm của AB và KO.

1. Chứng minh 5 điểm A, H, O, B, K thuộc một đường tròn.

z

1. AHK = KOB.
2. AM2 = KM.MO ( hoặc MK.MO =  )
3. Tứ giác CMOD nội tiếp.
4. Gọi I là giao KO với (O) ( I thuộc cung nhỏ AB).CMR: I là tâm đường tròn nội tiếp của ∆KAB.

Hướng dẫn:



a) Chứng minh 5 điểm A, H, O, B, K thuộc đường tròn đường kính KO

b) AHK = ABK

z

ABK =  AOB = KOB

z

z

z

=> AHK = KOB

c) Chứng minh AB  KO tại M

Xét ∆vuôngAKO có đường cao AM => AM2 = KM. MO

d) Ta có 

=> Tứ giác CMOD nội tiếp

e) ∆KAB có I là điểm chính giữa của ( OI là phân giác AOB )

z

KAI = IAB => AI là phân giác KAB

Lại có KO là phân giác AKB

=> I là tâm đường tròn nội tiếp ∆KAB

**Bài 3: ( Đề 2018-2019 )**

Cho (O; R) dây AB không qua tâm. Điểm S bất kì thuộc tia đối của tia AB. Vẽ 2 tiếp tuyến SC, SD với đường tròn ( C thuộc cung nhỏ AB). Gọi H là trung điểm của AB.

a) CMR: C, D, H, O, S thuộc một đường tròn đường kính SO.

b) Cho SO = 2R. Tính SD theo R và Sđ

c) Đường thẳng qua A và song song với SC cắt CD tại K. Chứng minh rằng tứ giác ADHK nội tiếp và BK đi qua trung điểm SC

d) Gọi E là trung điểm của BD, F là hình chiếu vuông góc của E trên AD. CMR khi S thay đổi trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn:



a) Ba điểm C, H, D nhìn SO dưới góc 900 => 5 điểm C, D, H, O, S thuộc một đường tròn đường kính SO

b) Dùng định lí Pytago tính SD

Dùng TSLG trong ∆vuôngSDO

Tính sinDSO =  => DSO = 300 => CSD = 600

c) \* Do AK // SC => SCD = AKD ( đồng vị)

5 điểm S, C, D, O, D thuộc một đường tròn => SCD = SHD ( cùng chắn )

=>AKD = SHD => K, H thuộc một cung chứa góc dựng trên AD

=> Tứ giác AKHD nội tiếp

\*) AN//SC ( AK//SC) =>  (1)

Tứ giác AKHD nội tiếp => HKD = HAD ( 2 góc nội tiếp cùng chắn  )

Mà DAH = DAB = DCB ( góc nội tiếp cùng chắn  của (O))

=> DKH = DCB mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK // BC

∆ANB có KH // NB =>  ( HA = HB)

=> AK = KN (2)

Từ (1) và (2) suy ra SM = MC hay M là trung điểm của SC

d) Kẻ đường kính AA’ => AOA’ = 900

=> A’D AD => A’D // FE

Kéo dài FE cắt A’B tại G

∆BDA’ có E là trung điểm BD

 EG // DA’

=> G là trung điểm của BA’

Mà A, O cố định => A’ cố định

B cố định => G cố định

Ta có GFD = 900 => F thuộc đường tròn đường kính DG cố định

 

**Lớp bài toán về đường cao trong tam giác**

**Bài 4: ( Bài 95- SGK)**

Cho ∆ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao hạ từ A và B của ∆ABC cắt (O) lần lượt tại D và E. Chứng minh:

1. CD = CE b) ∆BHD cân. c) CD = CH.

Hướng dẫn:



1. Gọi M là giao điểm của BE và AC

N là giao điểm của AD và BC.

Tứ giác AMNB nội tiếp ( vì AMB và ANB cùng nhìn AB dưới 1 góc vuông)

=> NAM = MBN ( 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MN)

 Hay DAC = CBE

Xét đường tròn (O): Vì DAC = CBE => =  => DC = EC

1. Xét đường tròn (O): Vì  =  nên EBC = CBD

Hay HBN = NBD => BN là phân giác của HBD

Xét ∆BHD có BN  HD ( do AD là đường cao)

Mà BN là phân giác của HBD nên ∆BHD cân tại B.

1. ∆HCD có CN là đường cao

Lại có ∆BHD cân => BN vừa là đường cao vừa là đường trung trực

=> CN là đường trung trực của ∆HCD

=> ∆HCD cân tại C => CD = CH

***Từ kết quả của bài tập 95 (SGK) cho ta lớp bài toán về đường cao trong tam giác***

**Bài 5:**

Cho ∆ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, BE và CF cắt đường tròn lần lượt tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

1. Chứng minh tứ giác BFEC và tứ giác AFHE nội tiếp
2. Chứng minh : AF.AB = AE.AC
3. Chứng minh H và N đối xứng nhau qua AB.
4. Qua A kẻ xy // EF. Chứng minh xy là tiếp tuyến của (O; R).
5. Tứ giác FEID nội tiếp.
6. Cho BC cố định Avà C chuyển động trên cung lớn BC sao cho ∆ABC nhọn. CMR: H chuyển động trên cung tròn cố định.

Hướng dẫn



1. Tự làm
2. Tứ giác BFEC nội tiếp => FBE = FCE

=> ∆ABE ∆ACF => đpcm

( Sử dụng kết quả ( a) bài 4)

1. Sử dụng kết quả b) bài 4
2. xAB = AFE ( So le trong); AFE = ECB ( cùng bù với BFE )

=> xAB = ECB = Sđ

=> Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) ( định lí đảo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)

e) FDE = FDA + ADE = EBA + ABE = 2ABE

Xét đường tròn ngọa tiếp tứ giác BFEC có I là tâm đường tròn

=> FIE = 2FBE ( góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

=> FDE = FIE => Tứ giác DIEF nội tiếp

f) Kẻ đường kính AA’

Cách 1:

Tứ giác BHCA’ là hình bình hành

=> BA’C = BHC mà BA’C = 1800 – BAC ( Tứ giác ABCA’ nội tiếp)

=> BHC = 1800  - BAC =  không đổi

 => H thuộc cung chứa góc  dựng trên BC

Cách 2: Lấy O’ đối xứng với O qua BC => O’ cố định

=> H thuộc đường tròn (O’) cố định => giới hạn => H thuộc cung BC của đường tròn (O’) trên

**Bài 6: ( Đề 2019)**

Cho ∆ABC có ba góc nhọn ( AB < AC), nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1. Chứng minh: B, C, E, F thuộc một đường tròn
2. Chứng minh OA  EF
3. Gọi K là trung điểm của BC, AO cắt BC tại I, EF cắt AH tại P.

Chứng minh ∆APE ∆AIB và KH // IP

**Hướng dẫn**

****

1. Giống bài tập 5
2. Là đảo của phần d) bài 5:

Kẻ thêm tiếp tuyến tại A là Ax

Chứng minh EF // Ax => OA  EF

1. \*Chứng minh ∆APE ∆AIB

Tứ giác BFEC nội tiếp => AEP = ABI ( cùng bù với FEC)

Cách 1:

BAD = IAC ( bài tập 5e)

=> BAI = HAE hay BAI = PAE

=> ∆APE ∆AIB

Cách 2:

Do OA  EF ( chứng minh phần b)

Gọi G là giao điểm của AA’ và EF => PGI = 900

Tứ giác PDIG nội tiếp => APE = AIB ( cùng bù với DPG)

=> ∆APE ∆AIB

\* Chứng minh IP // KH

∆APE ∆AIB  (1)

Lại có tứ giác BHCA’ là hình bình hành ( tự chứng minh)

=> K là trung điểm của HA’ hay H, K , A’ thẳng hàng

Xét ∆vuôngAHE và ∆vuôngABA’ có BAA’ = HAE ( do ∆APE ∆AIB)

 ∆AHE ∆AA’ B  (2)

Từ (1) và (2)   IP // HA’ ( định lí Talet đảo)

Hay IP // HK.

**V. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**1. Lớp bài tập về hai tiếp tuyến và một cát tuyến kẻ từ một điểm đến một đường tròn**

**Bài toán:** Cho đường tròn (O; R) . Qua điểm K nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD với đường tròn (A và B là các tiếp điểm, C nằm giữa K và D). H là trung điểm của CD.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Chứng minh 5 điểm K, H, A, B, O cùng thuộc một đường tròn.
	1. Chứng minh tứ giác KBOA là tứ giác nội tiếp.
	2. Chứng minh tứ giác KHOB là tứ giác nội tiếp.
	3. Chứng minh tứ giác AHOB là tứ giác nôi tiếp.
	4. Chứng minh góc AHK = góc KOB.
 |  |
| 1. Gọi M là giao của AB và OK. Chứng minh KC.KD = KM.KO.
	1. Chứng minh KA2 = KC. KD.
	2. Chứng minh MK. MO = AM2  (hoặc thay bằng chứng minh: MK. MO = )
	3. Chứng minh OM . OK + KC . KD = KO2
	4. Chứng minh  .
	5. Chứng minh góc ADB = góc AHK  (phát triển từ câu 1. 4).
	6. Gọi I là giao của đoạn KO với (O) . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp  KAB
 |  |
| * 1. Kẻ đường kính AN của (O) . Gọi G là giao của CN và KO. Chứng minh KCGB là tứ giác nội tiếp.
 |  |
| * 1. Kẻ đường kính AN của (O) . Gọi S là giao của DN và KO. Chứng minh tứ giác AMSD nội tiếp.
 |  |
| * 1. Chứng minh góc ADC = góc MDB.
 |  |
| * 1. Gọi giao của OH và AB là T, chứng minh KMHT là tứ giác nội tiếp.
 |  |
| 1. Chứng minh tứ giác OMCD là tứ giác nội tiếp.
 |
| **Hướng dẫn**Từ KC. KD = KM. KO ta chứng minh KDM KOC   MODC là tứ giác nội tiếp |  |
| * 1. Nếu cho cát tuyến KCD di động, chứng minh đường tròn ngoại tiếp  CMD

 luôn đi qua một điểm cố định. |
| * 1. Khai thác câu 2.4 Chứng minh : AC. BD = BC . AD
 |
|  **Hướng dẫn:**Chứng minhKAC KDA (g-g) Chứng minh tương tự ta có . Từ đó có  AC. BD = BC. AD |  |
| * 1. Chứng minh AB chứa tia phân giác của góc CMD.( hoặc thay bằng câu: Gọi I là giao của AB và CD, chứng minh , hoặc chứng minh MI và MK là các đường phân giác trong và ngoài của MCD).Khai thác tiếp: Kẻ đường kính AN , S là giao của DN với KO . Chứng minh AS // CN
 |
|  **Hướng dẫn:** Tứ giác CMOD là tứ giác nội tiếp  và  Mà nên  Mà   Tứ giác AMSD nội tiếp (Câu 2.8) Mà (CMOD là tứ giác nội tiếp) Mà  |  |
| * 1. Khai thác câu 2.4 và 2.8 Chứng minh AC. BD = CH . AB

(hoặc thay bằng câu: 2AC. BD = AC . CD) |
|  **Hướng dẫn** Tứ giác AKBH nội tiếp  Mà  Từ đó chứng minh (g-g)  Hay  Mà (câu 3.2)  |  |
| * 1. Gọi E là giao của DM và đường tròn (O) . Chứng minh KDOE là tứ giác nội tiếp. Khai thác tiếp: Chứng minh KO là phân giác của góc DKE, hoặc chứng minh:  .
 |
|  **Hướng dẫn:** Chứng minh và  Từ đó chứng minh được KDOE là tứ giác nội tiếp. Do  KO là tia phân giác của góc EKD. Áp dụng tính chất đường phân giác trong  |  |
| * 1. Qua A vẽ dây AF đi qua H . Chứng minh BF // CD. Khai thác: Gọi P và Q lần lượt là giao của AC, AD với đường thẳng BF. Chứng minh
 |
|  **Hướng dẫn:** Xét có Xét đường tròn đi qua A, K, B, H có nên .Khai thác:Sử dụng hệ quả định lí Ta lét chứng minh được |  |
| * 1. Qua C vẽ dây CT đi qua M. Chứng minh DT // AB . ( Do DT// AB nên tứ giác ABTD là hình thang cân . Ta lại có OK là trục đối xứng của hình thang cân đó nên MD = MT, góc OMD = góc OMT ) ( Hoặc thay bằng câu: Qua D vẽ dây DT // AB , chứng minh CT đi qua trung điểm của AB).
 |
| **Hướng dẫn:**Chứng minh (Do ABTD là hình thang cân mà OK là trung trực của AB OK là trung trực của TD  | **Hình vẽ** |
| * 1. Qua H kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại I . Chứng minh CI // KB. ( hoặc thay bằng câu: Qua C kẻ đường thẳng song song với KB nó cắt AB và BD thứ tự tại I và Q, chứng minh IC = IQ)
 |
| **Hướng dẫn:**Có mà là tứ giác nội tiếp. mà (KBHA nội tiếp)Kẻ Ta cũng chứng minh được ACIH là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng minh được  mà  | **Hình vẽ:** |
| * 1. Khai thác từ câu 2.6: Gọi I là giao của đoạn KO với (O). Chứng minh CI là phân giác của góc KCM.
 |
| **Hướng dẫn:**Cách 1:phân giác của Cách 2: |  |
| * 1. Khai thác câu 2.7: Kẻ đường kính AN của (O) . Các dây NC , ND lần lượt cắt KO tại G và S . Chứng minh OG = OS ( hoặc thay bằng câu: Chứng minh AGNS là hình bình hành)
 |
| **Hướng dẫn:****Cách 1:** Chứng minh (câu 3.3) . Từ đó chứng minh **Cách 2:** Có Mà KCGB là tứ giác nội tiếp Mà CDNB là tứ giác nội tiếp Vậy mà **Cách 3:** Qua C kẻ đường thẳng song song với KO cắt AN và DN lần lượt tại E và F. Chứng minh CAHE nội tiếp mà . Sử dụng hệ quả Ta lét chứng minh được  |  |
| * 1. Khai thác câu 2.10: Gọi giao của OH và AB là T. I là giao của AB và CD. Chứng minh HT và HI là các đường phân giác ngoài và trong của  HAB. ( hoặc thay bằng câu: Chứng minh  )
 |
|  **Hướng dẫn:**Do K, A, H, B thuộc một đường tròn mà  là tia phân giác của , mà là tia phân giác của góc ngoài của tam giác HAB. |  |
| * 1. Gọi giao của OH và AB là T. Chứng minh tứ giác TOMC là tứ giác nội tiếp. Khai thác tiếp: Chứng minh TC, TD là hai tiếp tuyến của (O) hoặc chứng minh 5 điểm T,D,O,M,C cùng thuộc một đường tròn.Hoặc: Gọi T là giao của hai tiếp tuyến với (O) tại C và D chứng minh T,A,B thẳng hàng.
 |
|  **Hướng dẫn:** Chứng minh (câu 3.3) TCMO là tứ giác nội tiếp. Chứng minh (câu 3.3) TMOD là tứ giác nội tiếp  T, M, O, C, D thuộc một đường tròn  và TD là tiếp tuyến của (O). |  |
| * 1. Qua K kẻ cát tuyến thứ hai là KEF . Goi giao của DE và CF là P. Chứng minh A,P,B thẳng hàng.
 |
| **Hướng dẫn:**Vậy ECMP là tứ giác nội tiếp. P, A, B thẳng hàng |  |
| * 1. Qua K kẻ cát tuyến thứ hai là KEF. Gọi giao của CE và DF là Q. Chứng minh Q,A,B thẳng hàng
 |
| **Hướng dẫn:**Gọi giao của DE và CF là P. QP cắt (O) tại Y và S. Cần chứng minh Gọi T là giao của đường tròn (EPC) với QS. ECTB là tứ giác nt FPTD là tứ giác nội tiếp.TOCD là tứ giác nội tiếp.Chứng minh tương tự có ETOF là tứ giác nội tiếp.Từ đó chứng minh được O, K, T thẳng hàng.Chứng minh Chứng minh  Chứng minh tương tự ta có  |  |
| * 1. Kẻ AE  BD tại E. BF  CD tại F. Chứng minh  DEM ~ DAK .

 Khai thác tiếp: Gọi I là giao của AB và CD; N là giao của EF và DM , chứng minh NI AB  |
| **Hướng dẫn:**Chứng minh được **Cách 2:** Chứng minh **Khai thác:** Mà  |  |

**3.16** Chứng minh 2 tia phân giác của hai  và  cắt nhau tại một điểm trên cát tuyến KCD.

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn:**Gọi I là giao của tia phân giác  với CD .Cần chứng minh BI là phân giác của Ta có  Mà  ;  nên  =>Δ KAI cân tại K => KA = KI=> KI = KB => ΔKIB cân tại K=>  mà  =>   |   |

**3.17** Kẻ dây DT // AB Chứng minh C,M,T thẳng hàng.

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn:**Gọi giao của CT với AB là NCần chứng minh NA = NB.Chứng minh ΔBCN ΔDCA =>  Chứng minh tương tự có  Mà  ( câu 3.2 )Vậy  => BN= AN => N trùng M  |   |

**3.18** Gọi G là trọng tâm của ΔACD. Khi cát tuyến KCD thay đổi , K và (O) cố dịnh thì G chạy trên đường nào?

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn:**Ta có 5 điểm A,B,K,H,O thuộc 1 đường tròn nên  không đổi.Kẻ GF // BH =>  = = α không đổi => AF cố địnhVậy G chạy trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AF |  |

**3.19** Giả sử AD // KB. Gọi P là giao của AC và KB. Chứng minh P là trung điểm của KB. Khai thác: Gọi G là giao của AC và KO, chứng minh G là trọng tâm của ΔABK.

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn:**Chứng minh ΔKPC ΔAPK => KP2 = PC. PAChứng minh ΔPCB ΔPBA => PB2 = PC. PA=> PB = PK |  |

**Câu 4:** *Giáo viên có thể lấy các ý ở câu 3 nhưng bớt các câu hỏi trung gian đi, hoặc có thể chuyển thành bài toán tính toán, bài toán có yếu tố cố định và di động thì sẽ được câu hỏi khó hơn phù hợp với câu d ở bài hình thi vào 10*

**2. Lớp bài tập xuất phát từ ba đường cao của một tam giác:**

**Bài tập.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R) cố định. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai lần lượt là M và N. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AK của (O).

**1)** Chứng minh các tứ giác: BFEC, AFHE, ... nội tiếp.

**2)**

2.1. Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành.

2.2. Chứng minh DC. DB = DH. DA.

2.3. Chứng minh AF. AB = AE. AC.

2.4. Chứng minh H và N đối xứng nhau qua AB.

2.5. Chứng minh EF // MN.

2.6. Chứng minh AB. AC = 2R.AD.

**3)**

3.1. Chứng minh EF = BC.cos .

3.2. Chứng minh BH.BE + CH.CF = BC2.

3.3. Chứng minh BH.BE + CH.CF + AH.AD =  (AB2 + BC2 + AC2).

3.4. Chứng minh AO EF.

3.5. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của D trên BH và CH. Chứng minh PQ EF.

3.6. Giả sử . Tính diện tích 

3.7. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EFD.

3.8. Chứng minh IO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

3.9. Tính tỉ số  .

3.10. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với EF. Chứng minh xy là tiếp tuyến của (O; R).

3.11. Gọi P là điểm đối xứng với K qua B. Chứng minh P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB.

3.12. Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với K qua B và C. Chứng minh H là trung điểm của PQ.

3.13. Chứng minh FEID là tứ giác nội tiếp.

**4)**

Cho B, C cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn.

4.1. Chứng minh EF có độ dài không đổi.

4.2. Chứng minh AH có độ dài không đổi. (Có thể hỏi cách khác: Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, tam giác HEF có bán kính hoặc chu vi không đổi).

4.3. Chứng minh H chuyển động trên cung tròn cố định.

4.4. Tìm vị trí của điểm A để tứ giác AFHE có diện tích lớn nhất.

4.5. Giả sử  Tìm vị trí của điểm A để tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

4.6. Tìm vị trí của điểm A để tam giác HBC có diện tích lớn nhất.

4.7. Tìm vị trí của A để AB + AC đạt giá trị lớn nhất.

4.8. Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC để chu vi tam giác DEF có giá trị lớn nhất.

4.9. Chứng minh .

4.10. AI cắt OH tại G . Khi A di chuyển trên cung lớn BC thì G chuyển động trên đường nào?

**Hướng dẫn:**

**3.**

**3.1.** Chứng minh AFE ACB

 FE = BC. = BC. cos .

**3.2.** Chứng minh BH. BE = BD. BC; CH. CF = CD. CB

 BH. BE + CH. CF = BC. BD + BC. CD = BC2. (1)

**3.3.** Chứng minh tương tự 3.2 ta có:

 CH. CF + AH. AD = AC2 (2)

 AH. AD + BH. BE = AB2 (3)

 Cộng vế với vế của (1); (2); (3) ta được điều cần chứng minh.

|  |  |
| --- | --- |
| **3.4.**  Theo 2.5 có  EF // MN. |  |

 Chứng minh   A là điểm chính giữa của cung MN

AO  MNAO  EF.

**3.5.**

 Chứng minh tứ giác HPDQ là tứ giác nội tiếp .

 Chứng minh ;   MN // QP.

 Mà AO  MNAO PQ.

**3.6.**   = 50 cm2.

|  |  |
| --- | --- |
| **3.7.** Tứ giác BFHD nội tiếp . Tứ giác HDCE nội tiếp . Mà .  DA là tia phân giác của  . Chứng minh tương tự được FC là phân giác của  . H là giao điểm 2 đường phân giác của tam giác DEF hay H là tâm  đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.**3.8.** Chứng minh AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF. Gọi O’ là trung điểm của AH. Chứng minh IF  FO’ IF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF. |  |
| **3.9.**  Chứng minh I là trung điểm của HK. Chứng minh IO là đường trung bình của tam giác AHK  .**3.10.** Vì xy // EF, mà AO  EF nên xy AO tại A  xy là tiếp tuyến của (O;R) |  |

|  |
| --- |
| **3.11.** Chứng minh tứ giác PHCB là hình bình hành   PH // BC PH  AH  . KB AB    Tứ giác AHBP là tứ giác nội tiếp   Điểm P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB.**3.12.** Tứ giác PHCB là hình bình hành nên PH = BC và PH // BC. Tứ giác HQCB là hình bình hành nên HQ = BC và HQ // BC. HP = HQ và P, H, Q thẳng hàng.  H là trung điểm của PQ.**4)** **4.1.** Vì B, C cố định nên  không đổi. Mà EF = BC.cos  nên EF không đổi.**4.2.** AH = 2OI, mà BC cố định nên I cố định, suy ra OI không đổi hay AH không đổi.**4.3.** Vì B, C cố định nên trung điểm I của BC cố định  OI không đổi. AH = 2OM (theo 3.9) suy ra AH không đổi.4.3.  Cách 1: Vì BC cố định nên  không đổi. Chứng minh  không đổi Điểm H chuyển động trên cung chứa góc  dựng trên đoạn BC cố định. Cách 2: BC cố định nên trung điểm I của BC cố định. Gọi O’là điểm đối xứng với O qua M  O’ cố định. Chứng minh được tứ giác HOKO’ là hình bình hành nên O’H = OK = R. Vậy điểm H nằm trên cung tròn tâm O’ cố định , bán kính R không đổi. |

|  |  |
| --- | --- |
| **4.4** Gọi E’, F’ lần lượt là hình chiếu của E và F trên AH.  Q là giao điểm của AH và EF.  Ta có: FF’  FQ, EE’ EQ.   không đổi.  Dấu “=” xảy ra khi EF  AH hay A là điểm chính giữa cung lớn BC. |  |

**4.5.** SAEH max khi AE. EH max, mà AE. EH  AE2 + EH2 = AH2 = 4OI2 không đổi.

 Dấu “ =” xảy ra khi AE = EH hay  = 450.

**4.6. ** lớn nhất HD lớn nhất, mà AH không đổi nên HD lớn nhất AD lớn nhất

  A là điểm chính giữa cung lớn BC.

|  |  |
| --- | --- |
| **4.7.** Gọi C’ là điểm đối xứng của C qua A, khi đó AB + AC = CC’.   không đổi. C’ thuộc cung chứa góc  dựng trên đoạn BC. AB + AC lớn nhất  CC’ lớn nhất CC’ là đường kính của đường tròn   BA = C’A = CA. Vậy A là điểm chính giữa cung BC lớn thì AB + AC lớn nhất. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **4.8.** Ta có (theo 3.4) Chứng minh tương tự ta có     = Vì R không đổi nên (FE + ED + DF) lớn nhất  lớn nhất AD lớn nhất (do BC không đổi) A là điểm chính giữa cung lớn BC. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **4.9.** Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có  sinA = sin =     Tương tự  |  |

Tam giác OPQ có: PQ < OP + OQ  (1)

Tương tự ta có (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

|  |  |
| --- | --- |
| **4.10.**  Chứng minh :  là trọng tâm  Kẻ  //   Chứng minh  Vì  cố định  I cố định   cố định và không đổi. Suy ra  thuộc đường tròn cố định tâm  bán kính   |  |

**VI. MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI VÀO 10 HÀ NỘI**

1. **(Năm học 2015 - 2016)**. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C và O). Đường thẳng AI cắt (O) tại D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm DE.

a) Chứng minh A, B, O, H cùng thuộc đường tròn

c) Đường thẳng d qua E song song với AO cắt BC tại K. Chứng minh HK song song với CD.

d) Tia CD cắt AO tại P, tia EO cắt BP tại F. CHỨNG MINH tứ giác BECF là hình chữ nhật

**Hướng dẫn:**



1. (vì ABOH là tứ giác nội tiếp). (vì EK//AO).

Suy ra BHKE là tứ giác nội tiếp nên

 Mà (vì BDCE là tứ giác nội tiếp). Suy ra . Vậy KH//CD

1. Gọi F’ là giao điểm của BP và (O).

Gọi AQ là tiếp tuyến thứ hai của (O).

Vì tứ giác BDQC nội tiếp nên (cùng chắn cung QC)

Vì ABOQ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO nên (cùng chắn cung OQ). Suy ra .

Xét tứ giác APDQ có nên APDQ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa 2 đỉnh còn lại các góc bằng nhau) (cùng chắn cung AP)

Có Mà (c.g.c) nên

Do đó .

Suy ra . Do đó nên F’E là đường kính (O)

Từ đó F’ trùng với F và FBEC là tứ giác nội tiếp nên

Tứ giác FBEC có nên tứ giác là hình chữ nhật.

1. **(Năm học 2014 - 2015).** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A và O). Đường thẳng qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bát kì trên cung KB (M khác K và B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.
2. Chứng minh ACMD là tứ giác nội tiếp
3. Chứng minh CA.CB=CH.CD
4. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm DH
5. Khi M di động trên cung KB. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

**Hướng dẫn:**



1. và vì cùng phụ với góc CBM
2. Chứng minh H là trực tâm tam giác ABD nên AD vuông góc với BH

Mà AN cũng vuông góc với BH nên A, N, D thẳng hàng

Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N

Ta có BNDN, ONEN nên

Mà . Suy ra nên ED = EN

Dễ chứng minh tam giác HEN cân tại E nên HE = NE. Suy ra ED = EH

Vậy E là trung điểm của HD

1. Gọi I là giao điểm của MN và AB; Kẻ IT là tiếp tuyến của đường tròn với T là tiếp điểm

Ta có EM vuông góc với OM nên N, C, O, M cùng thuộc đường tròn

Do đó nên tam giác ICT và ITO đồng dạng

CT vuông góc với IO T trùng với K nên I là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB I cố định.

1. **(Năm học 2013 - 2014)**. Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn đó (M khác A và B). Tiếp tuyến của đường tròn tại B cắt Am, AN tại Q và P.
2. Chứng minh AMBN là hình chữ nhật
3. Chứng minh M, N, P, Q cùng thuộc đường tròn
4. Gọi E là trung điểm BQ, đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm BP và ME song song với NF
5. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giá MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

**Hướng dẫn:**



1. ABMN là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
2. Chứng minh ).
3. Chỉ ra OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

Chứng minh được OF // AP nên OF là đường trung bình của tam giác ABP.

Suy ra F là trung điểm của BP.

Chứng minh: ME // NF

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP. Xét 2 △NOF = △OFB (c-c-c) nên ∠ONF = 900 .

Tương tự ta có ∠OME= 900 nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN.

1. Ta thấy :

 2SMNPQ = 2SAPQ = 2SAMN = 2R.PQ =AM.AN = 2R.(PB + BQ) = AM.AN

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra: AB2= BP.QB

Áp dụng các bất đẳng thức và

Suy ra . Dấu bằng xảy ra khi MN vuông góc AB.

**B. BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG THỰC TẾ:**

Các bài này thường sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc công thức tính Sxq, V các hình khối trong hình học không gian

1. CÁC CÔNG THỨC THƯỜNG SỬ DỤNG:
2. **Hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. b2 = a.b’,

 c2 = a.c’1. a2 =b2 +c2
 | h2 = b’.c’ a.h = b.c |

1. **Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông:**

*b*=*a*.sin*B*;*c*=*a*.sin*C*

b=a.cosC;c=a.cosB

 b=c.tanB;c=b.tanC

b=c.cotC;c=b.cotB

( Nếu HS không nhớ hệ thức thì có thể dùng định nghĩa để tính toán )

1. **Công thức diện tích xung quanh và thể tích các hình khối không gian:**
2. Lăng trụ đứng

Sxq = 2p.hp: nửa chu vi đáy, h: chiều cao

 Stp= Sxq + 2Sđ V = Sđ .h

1. Hình hộp chữ nhật Sxq =2(a+b)c, Stp = Sxq + 2S­­­đ, V = a.b.c
2. Hình lập phương Sxq = 4a2 , Stp = 6a2 , V= a3
3. Hình chóp đều Sxq = p.d, Stp = Sxq + Sđ, V = S.h

e) Hình trụ: Sxq = 2π Rh ; V = πR2h.

 g) Hình nón : Sxq = π.R.l ; V = 

 Nón cụt : Sxq = π ( R + r) .l ; V = 

 h) Hình cầu : S = 4πR2  ; V = 

II. MỘT SỐ BÀI TẬP:

**Bài 1**: Một máy bay từ mặt đất có đường bay lên tạo với mặt đất một góc 300. Hỏi sau khi bay được 10km thì khoảng cách của máy bay và mặt đất là bao nhiêu?

**Bài 2**: Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến độ) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

**Bài 3**: Một cây cao 3 m. Ở một thời điểm vào ban ngày mặt trời chiếu tạo thành bóng dài 2 m. Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia sáng mặt trời và mặt đất là bao nhiêu ? (làm tròn số đo góc tới độ).

**Bài 4**: Một cái thang dài 3m ghi:“ để đảm bảo an toàn khi dùng, phải đặt thang với mặt đất một góc từ 600 đến 700“. Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết :khi dùng thang đó chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn? (làm tròn 2 chữ số thập phân)

**Bài 5:** Một chiếc diều với đoạn dây thả diều AB dài 100 m, dây thả diều tạo với phương thẳng đứng một góc 40◦ (hình bên). Tính chiều cao của diều.

**Bài 6**: Tính chiều cao của một cây cổ thụ có bóng trên mặt đất dài 8m và có tia sáng từ đỉnh tạo với mặt đất một góc bằng 600

**Bài 7**: Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc  350. Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng.

**Bài 8:** Một người muốn làm một mái che cho một cửa sổ, tính từ tường ra khoảng 1mét, nghiêng xuống 30 độ so với mặt đất. Hỏi người đó phải cắt miếng tôn dài bao nhiêu mét ? ( kết quả làm tròn chữ số thập phân thứ 2)

**Bài 9**: Vào buổi trưa, bóng của toà  nhà in trên mặt đất dài 16m. Tính độ cao của toà nhà đó biết góc tạo bởi tia nắng và mặt đất là 500.

**Bài 10**: Tính chiều cao của một ngôi nhà có bóng trên mặt đất dài 3m và có tia sáng từ đỉnh tạo với mặt đất một góc bằng 600.

**Bài 11** : Bác Hùng xây một hồ cá hình trụ, đáy của hồ là một hình tròn có đường kính 2 m, người ta đo được mực nước có trong hồ cao 0,6 m. Tính thể tích nước có trong hồ

**Bài 12**: Một bình thủy tinh chứa nước. Trong bình có 1 vật rắn hình cầu ngập hoàn toàn trong nước. Khi lấy vật rắn đó ra khỏi bình thì mực nước trong bình giảm 48,6 mm. Biết đường kính bên trong của bình thủy tinh là 50 mm. Tính bán kính của vật hình cầu.

**Bài 13**: Một đống cát hình nón có chu vi đáy là 12,56 m. Người ta dùng xe nhỏ chở 10 chuyến thì hết đống cát. Biết mỗi chuyến chở 250dm3. Tính chiều cao đống cát.

**Bài 14:** Một chi tiết máy có dạng hình trụ, bán kính hình tròn đáy và chiều cao của nó đều bằng 2cm. Người ta khoan một lỗ có dạng hình trụ, bán kính hình tròn đáy và độ sâu đều bằng 1cm. Thể tích phần vật thể còn lại là bao nhiêu?

Bài 15: Một chiếc thùng hình trụ có diện tích xung quanh bằng  diện tích toàn phần, biết bán kính đáy là 40cm. Hỏi thùng chứa được xấp xỉ bao nhiêu lít nước?

Bài 16: Một bóng đèn huỳnh quang dài 0,6m; bán kính của đường tròn đáy là 2cm, được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp. Diện tích phần giấy cứng dùng để làm một hộp là (Hộp hở 2 đầu, không tính lề và mép dán):

Bài 17: Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là 12,8 cm2 . Nước trong lọ dâng lên 8,5 mm. Thể tích của tượng đá là:

 Bài 18: Một mẩu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ có các kích thước như hình bên. Biết khối lượng riêng của pho mát là 3g/cm3. Khối lượng của mẩu pho mát là:

**C. MỘT SỐ LỖI HỌC SINH HAY MẮC KHI LÀM BÀI TẬP HÌNH HỌC**

**1. Sai lầm ở phần vẽ hình:**

+) Vẽ sai vì đọc không kĩ các vị trí như điểm thuộc tia, tia đối, thuộc đoạn, các yêu cầu về các đoạn thẳng lớn hơn, nhỏ hơn, cung lớn, cung nhỏ, …

+) Lấy các điểm cho bất kì ở những vị trí đặc biệt như trung điểm đoạn thẳng, chân đường vuông góc, điểm chính giữa của một cung, …, để dẫn tới các cảm nhận trực quan sai và hình thành đường lối suy nghĩ, tìm lời giải cho bài toán chệch hướng.

+) Không vẽ các đoạn thẳng mà trong phần bài làm có sử dụng.

+) Cẩu thả nên dễ bị nhầm các kí hiệu M với N; E với F; O với D, …

+) Đánh kí hiệu các góc ; … từ câu a, b nên nếu tới câu c, d xuất hiện tia nằm bên trong góc mà học sinh không vẽ lại hình.

+) Trong bài lạm dụng các góc đánh số ;….nhưng trên hình vẽ quên không đánh kí hiệu 1, 2 vào góc.

+) Có hai ký hiệu trùng nhau trên hình vẽ.

**2. Những lỗi sai, nhầm lẫn khi trình bày bài:**

+) Khi sử dụng các định lý chỉ áp dụng trong một tam giác, một tứ giác hay một đường tròn con không xét tam giác, tứ giác hay đường tròn đó.

+) Làm tắt bước.

+) Đưa ra các tính chất hình học song lại thiếu căn cứ.

+) Khi chứng minh tứ giác nội tiếp đôi khi học sinh có nhưng không có biểu thức ( Khi đỉnh A; B đối nhau) hay (Khi đỉnh A; B kề nhau).

+) Khi chứng minh hai tam giác đồng dạng, bằng nhau viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, bằng nhau viết sai đỉnh tương ứng.

+) Khi sử dụng các góc dùng kí hiệu 3 đỉnh, nhiều học sinh viết nhầm đỉnh (Ví dụ  thì viết là ).

+) Nhiều học sinh dùng kí hiệu góc, cung còn nhầm lẫn, không chính xác.

+) Khi gặp câu yêu cầu tính toán các em cần để kết quả đúng là một số vô tỷ (Ví dụ ) chứ không để kết quả dưới dạng số thập phân (). Kết quả cuối cùng phải có đơn vị đo nếu giả thiết cho đơn vị đo.

+) Khi làm bài rất hay bị ngộ nhận vì vẽ hình rơi vào trường hợp đặc biệt.

+) Khi chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường đồng quy học sinh hay ngộ nhận.