**CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO HÌNH HỌC 9**

**CÓ LỜI GIẢI**

**Câu 1.** Cho tứ giác  nội tiếp . Gọi  là giao điểm của .  là giao điểm của  và . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm  khác . Tiếp tuyến của  tại  cắt nhau tại .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp

b) Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 2.** Cho đường tròn  đường kính . Trên tiếp tuyến tại  của  lấy điểm Vẽ cát tuyến  (tia  nằm giữa 2 tia , ,  nằm giữa ). Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và , 

**a)** Vẽ tiếp tuyến  của . Chứng minh  là tứ giác nội tiếp

**b)** Vẽ  tại . Chứng minh  là tứ giác nội tiếp.

**c)** Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 3.** Cho tứ giác  nội tiếp  . Gọi  là giao điểm của  và . Vẽ đường kính . Gọi  là giao điểm của . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm  khác .

a) Chứng minh  là tứ giác nội tiếp

**d)** Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  . Đường tròn  đường kính  cắt  tại .  cắt  tại .  cắt  tại . Chứng minh các tứ giác  nội tiếp.

**Câu 5.** Cho tam giác nhọn  các đường cao  cắt nhau tại . Vẽ  tại  tại , . Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh tứ giác  nội tiếp và 

**Câu 6.** Từ điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến   là hai tiếp điểm) và một cát tuyến  đến  sao cho (  nằm giữa 2 tia , ,Đường thẳng qua  song song với  cắt  lần lượt tại . Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Gọi  là giao điểm của  với 

a) Chứng minh  là tứ giác nội tiếp.

b) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 7.** Từ điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến  ( là hai tiếp điểm). Từ điểm  nằm trên cung  ( nằm cùng phía ) dựng tiếp tuyến cắt  tại .  cắt  tại . Gọi  là giao điểm của . Chứng minh  là các tứ giác nội tiếp.

**Câu 8.** Cho tam giác nhọn  . Đường tròn  đường kính  cắt  tại .  cắt  tại  , các tiếp tuyến của tại  cắt nhau tại . Vẽ tiếp tuyến  của  với  thuộc cung nhỏ  , ,  . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại .

a) Chứng minh các tứ giác  nội tiếp

b) Ba điểm  thẳng hàng.

c) Ba điểm  thẳng hàng.

d) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 9.** Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn  có hai đường cao  cắt nhau tại . Gọi  là trung điểm của . Giả sử  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại .

a) Chứng minh  thẳng hàng.

b) Giả sử  cắt  tại . Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 10.** Cho tam giác  ngoại tiếp  . Gọi  là tiếp điểm của  với  . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Đường thẳng  cắt  tại .

a) Chứng minh  là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 11.** Cho tam giác  có ba đường cao  cắt nhau tại . Từ  ta dựng các tiếp tuyến  đến đường tròn đường kính .

a) Chứng minh các tứ giác  nội tiếp

b) Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 12.** Cho tam giác nhọn  có các đường cao  cắt nhau tại điểm . Gọi  là trung điểm của . Các phân giác của góc  cắt nhau tại .

a) Chứng minh 5 điểm nằm trên một đường tròn. Điểm  là trung điểm cung nhỏ .

b) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 13.** Cho tam giác nhọn  có các đường cao  cắt nhau tại điểm .Đường thẳng  cắt nhau tại điểm . Gọi  là trung điểm . Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là .

a) Chứng minh các tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  là tam giác vuông.

**Câu 14.** Cho tam giác nhọn  có trực tâm là điểm . Gọi  là chân các đường cao hạ từ  của tam giác .Gọi  là điểm trên cạnh  . Gọi  là đường tròn đi qua các điểm  gọi  là đường tròn đi qua các điểm .  lần lượt là đường kính của . Chứng minh  thẳng hàng. 

**Câu 15.** Cho tam giác  có  là góc lớn nhất. Các điểm  thuộc cạnh  sao cho . Gọi  lần lượt là các điếm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng:  cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . 

**Câu 16.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn . Lấy một điểm  trên cung  không chứa điểm  của . Gọi  là đường tròn đi qua  tiếp xúc với .  cắt  tại  khác . Gọi  là đường tròn qua  đồng thời tiếp xúc với .  cắt  tại  khác .Gọi  là điểm đối xứng với  qua .

a) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác .

b) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 17.** Cho tam giác  , trên hai cạnh  lần lượt lấy hai điểm  sao cho . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt tia  tại .Gọi  là giao điểm của . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt tia  tại 

a) Chứng minh 4 điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi  là giao điểm thứ 2 của các đường tròn . Chứng minh  thẳng hàng.

c) Chứng minh : Tam giác  cân tại .

**Câu 18.** Cho tam giác  có  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh  của tam giác. Gọi  là tiếp điểm của  với  điểm chính giữa cung  của ,  cắt  tại điểm . Gọi  là giao điểm của  và 

a) Chứng minh:  là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác 

c) Chứng minh: .

**Câu 19.** Cho đường tròn tâm  bán kính  và một dây cung  cố định có độ dài . Điểm  thay đổi trên cung lớn . Gọi  là điểm đối xứng của  lần lượt qua . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là .

a) Chứng minh điểm  luôn thuộc một đường tròn cố định

b) Xác định vị trí điểm  để tam giác  có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó theo 

c) Gọi  là giao điểm của . Chứng minh tam giác  và đường thẳng  luôn đi qua điểm cố định.

**Câu 20.** Từ điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến   là hai tiếp điểm) và một cát tuyến  đến  sao cho (  nằm giữa 2 tia , , Gọi  là điểm đối xứng của  qua ,  là giao điểm của . Chứng minh:  thẳng hàng.

**Câu 21.** Từ điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến   là hai tiếp điểm) và một cát tuyến  đến  sao cho (  nằm giữa 2 tia ,  và ) Vẽ đường thẳng qua  vuông góc với  cắt  tại  cắt  tại . Vẽ .

a) Chứng minh:  nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng  đi qua trung điểm của 

**Câu 22.** Cho tam giác nhọn  nội tiếp .Các đường cao  cắt nhau tại . Tiếp tuyến tại  của  cắt nhau tại . . Gọi  là trung điểm cạnh . Giả sử 

a) Chứng minh 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 23.** Cho  và  không giao nhau. Vẽ  lấy hai điểm  thuộc  sao cho . Lấy điểm  thuộc đường tròn . Dựng các cát tuyến qua  và điểm  cắt đường tròn  lần lượt tại , . Dựng đường thẳng qua  cắt tiếp tuyến tại  của  ở .Dựng  tại .

a) Chứng minh tứ giác  là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm  thẳng hàng

**Câu 24.** Cho tam giác  có đường tròn nội tiếp là tiếp xúc với ba cạnh  lần lượt tại . Trên đoạn  lấy điểm  và dựng đường tròn tâm  bán kính . Dựng  là các tiếp tuyến của  tại . Gọi , 

a) Chứng minh  nội tiếp

b) Ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 25.** Cho 3 đường tròn  biết  tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm  và  lần lượt tiếp xúc trong với  tại . Tiếp tuyến của  tại  cắt  lần lượt tại . Đường thẳng  cắt  tại điểm , đường thẳng  cắt  tại điểm .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp và 

b) Kẻ đường kính  của  sao cho ( Điểm  nằm trên cung  không chứa điểm ). Chứng minh rằng nếu  không song song thì các đường thẳng  đồng quy.

**Câu 26.** Cho tam giác  không cân. Đường tròn  nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh  lần lượt tại . Đường thẳng  cắt lần lượt tại 

a) Chứng minh các góc  bằng nhau hoặc bù nhau.

b) Chứng minh  điểm  cùng nằm trên một đường tròn.Chứng minh thẳng hàng. Biết  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 27. .** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn . Kẻ  và  vuông góc với đường kiính .

a) Chứng minh .

b) Qua trung điểm  của đoạn thẳng  kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại . Chứng minh  cân.

**Câu 28.** Cho tam giác nhọn . Vẽ đường cao  và đường phân giác trong  của tam giác  ( thuộc ). Vẽ đường tròn tâm  tiếp xúc với  lần lượt tại .

a) Chứng minh các điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh .

c) Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với  cắt  tại . Đường thẳng  cắt  tại . Chứng minh  là trung điểm cạnh .

**Câu 29.** Cho nửa đường tròn  đường kính  và  là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho  thuộc cung  và  ( khác  và  khác ). Gọi  là giao điểm của tia  và ,  là giao điểm của dây  và .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp đường tròn và tính khoảng cách từ  đến đường thẳng  .

b) Gọi  và  lần lượt là trung điểm  và . Chứng minh  thẳng hàng và .

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác  theo .

**Câu 30.** Cho nửa đường tròn  đường kính . Giả sử  là điểm chuyển động trên nửa đường tròn này, kẻ  vuông góc với  tại . Từ  kẻ đường thẳng song song với  cắt tiếp tuyến tại  với nửa đường tròn  ở .

a) Chứng minh bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Giả sử  là hình chiếu của  trên đường thẳng  và . Chứng minh ba đường thẳng  đồng quy.

c) Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Xác định vị trí  để diện tích tứ giác  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 31. C**ho hình vuông , trên đường chéo  lấy điểm  sao cho . Đường thẳng đi qua  vuông góc với  cắt  tại ,  cắt  tại .

**a)** Chứng minh rằng .

**b)** Đường tròn tâm  bán kính  cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng: .

**Câu 32.** Cho đường tròn  và một điểm  nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính  cắt đường tròn  tại hai điểm .

a) Chứng minh giao điểm  của đoạn thẳng  với đường tròn  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác .

b) Cho  là một điểm bất kỳ thuộc cung  chứa điểm  của đường tròn đường kính  ( khác  và ). Đoạn thẳng  cắt đoạn thẳng  tại . Chứng minh .

c) Cho biết  và  là điểm bất kỳ thuộc cung  chứa điểm  của đường tròn ( khác  và ). Gọi  là đường thẳng qua  và vuông góc với đường thẳng  tại điểm ,  cắt đường tròn đường kính  tại điểm  ( khác ). Hai đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Chứng minh rằng: .

**Câu 33.** Cho tam giác  cân tại  nội tiếp đường tròn . Gọi  là điểm chính giữa của cung nhỏ . Hai đường thẳng  và  cắt nhau tại . Chứng minh rằng:

a) .

b) .

**Câu 34.** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại  và  . Kẻ các tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó chúng cắt nhau ở . Gọi  và  là các tiếp điểm của hai tiếp tuyến trên với là tiếp điểm của tiếp tuyến  với  (điểm  và điểm  ở cùng nửa mặt phẳng bờ là ). Đường thẳng  cắt  tại  (điểm  khác điểm ).

a) Gọi  là giao điểm của đường thẳng  với . Chứng minh , từ đó suy ra .

b)  cắt  tại . Chứng minh bốn điểm  nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh đường thẳng  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

**Câu 35.** Cho nửa đường tròn tâm  đường kính , trên nửa đường tròn lấy điểm  (cung  nhỏ hơn cung ), qua  dựng tiếp tuyến với đường tròn tâm  cắt  tại . Kẻ  vuông góc với  , kẻ  vuông góc với ;  cắt  tại .

a) Chứng minh  là phân giác của .

b) Chứng minh .

c) Chứng minh .

**Câu 36.** Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn . Cho  là điểm bất kỳ trên đoạn  sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đoạn  tại  khác  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đoạn  tại  khác .

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh rằng  và .

c) Chứng minh rằng  là trực tâm tam giác .

**Câu 37.** Trên nửa đường tròn  đường kính  ( là độ dài cho trước) lấy hai điểm  ( khác ) sao cho  thuộc  và tổng các khoảng cách từ  đến đường thẳng  bằng .

a) Tính độ dài đoạn thẳng  theo .

b) Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Chứng minh bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo .

c) Tìm GTLN của diện tích tam giác  theo  khi  thay đổi trên nửa đường tròn  nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết bài toán.

**Câu 38.** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại hai điểm  và . Vẽ đường thẳng  qua  cắt  tại  và cắt  tại  sao cho  nằm giữa  và . Tiếp tuyến của  tại  và tiếp tuyến của  tại  cắt nhau tại .

a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp

b) Chứng minh rằng .

**Câu 39.** Cho đường tròn  có đường kính  cố định và đường kính  thay đổi sao cho  không vuông góc cũng không trùng với . Gọi  là tiếp tuyến tại  của . Các đường thẳng  và  cắt  tương ứng tại  và .

a) Chứng minh rằng  là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi  là trung điểm của , chứng minh rằng .

c) Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác . Chứng minh rằng .

d) Gọi  là trực tâm của tam giác , chứng minh rằng  luôn chạy trên một đường tròn cố định.

**Câu 40.** Cho tam giác  vuông ở , đường cao . Vẽ đường tròn tâm , đường kính , đường tròn này cắt các cạnh  theo thứ tự tại  và .

a) Chứng minh tứ giác là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

c) Cho biết . Tính diện tích tứ giác .

**Câu 41.** Cho tam giác  không là tam giác cân, biết tam giác  ngoại tiếp đường tròn . Gọi  lần lượt là các tiếp điểm của  với đường tròn . Gọi  là giao điểm của đường thẳng  và đường thẳng , biết  cắt đường tròn  tại điểm  ( không trùng với ), gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh rằng các điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn .

**Câu 42.** Từ một điểm  nằm ngoài đường tròn  kẻ hai tiếp tuyến  tới đường tròn , ( là hai tiếp điểm). Gọi  là một điểm thuộc cung nhỏ  của đường tròn , ( khác điểm chính giữa của ). Kéo dài  cắt  tại điểm , cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Qua điểm  kẻ đường thẳng vuông góc với  tại điểm  và cắt đường thẳng  tại điểm . Gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh năm điểm  cùng thuộc một đường tròn.

**Câu 43.** Cho đường tròn  có đường kính  cố định,  là một điểm thuộc  ( khác ). Các tiếp tuyến của  tại  và  cắt nhau ở . Đường tròn  đi qua  và tiếp xúc với đường thẳng  tại .  là đường kính của . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm  thẳng hàng.

b) Tam giác  là tam giác cân.

c) Đường thẳng đi qua  và vuông góc với  luôn đi qua một điểm cố định khi  di động trên đường tròn .

**Câu 44.** Cho tam giác  nhọn nội tiếp đường tròn tâm , đường cao  và . Tiếp tuyến tại  và  cắt nhau tại ,  và  cắt nhau tại .

a) Chứng minh rằng .

b) Hai tam giác  và  đồng dạng.

c) Gọi  cắt  tại ,  cắt  tại . Chứng minh rằng .

**Câu 45.** Cho tam giác  vuông tại  có  ngoại tiếp đường tròn tâm . Gọi  lần lượt là tiếp điểm của  với các cạnh ;  cắt  tại .  là điểm di chuyển trên đoạn .

a) Tính .

b) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng nếu  thì tứ giác  nội tiếp.

c) Gọi  là giao điểm của  với cung nhỏ  của ,  và  lần lượt là hình chiếu của  trên các đường thẳng . Xác định vị trí của điểm  để  lớn nhất.

**Câu 46.** Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn . Giả sử  là điểm thuộc đoạn thẳng  ( không trùng ),  là điểm thuộc tia  ( nằm trên đường thẳng  sao cho  nằm giữa  và ) sao cho khi  cắt  tại  thì  là trung điểm của . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại điểm  khác .

a) Chứng minh rằng các tứ giác  và  nội tiếp.

b) Giả sử , chứng minh rằng tam giác  cân.

**Câu 47.** Cho  có . Đường tròn tâm  nội tiếp tam giác  tiếp xúc với cạnh  lần lượt tại . Đường thẳng  cắt  tại , đường thẳng qua  và song song với  cắt  theo thứ tự tại .

a) Chứng minh rằng các tứ giác  và  nội tiếp.

b) Gọi  là trung điểm cạnh . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

c) Gọi  là bán kính của đường tròn  và  là diện tích tứ giác . Tính  theo . Chứng minh  ( là diện tích ).

**Câu 48.** Cho hình vuông  nội tiếp đường tròn . Trên cung nhỏ  lấy điểm  ( không trùng với  và ). Tia  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  và . Tia  cắt các đường thẳng  lần lượt tại . Hai đường thẳng  cắt nhau tại .

a) Chứng minh rằng tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng .

c) Khi điểm  ở vị trí trung điểm của . Hãy xác định độ dài đoạn  theo .

**Câu 49.** Cho tam giác . Trên phân giác  có hai điểm  sao cho . Chứng minh rằng .

**Câu 50.** Cho hình thoi  có . Một đường thẳng  thay đổi qua  cắt  lần lượt tại . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng  thuộc một đường tròn cố định.

**Câu 51.** Cho tam giác  vuông tại . . Gọi  là một điểm trên cạnh ,  là một điểm trên cạnh  kéo dài về phía  sao cho . Gọi  là một điểm trên  sao cho  thuộc cùng một đường tròn,  là giao điểm thứ hai của  với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng .

**Câu 52.** Cho tam giác  có  nội tiếp trong đường tròn , ngoại tiếp đường tròn . Cung nhỏ  có  là điểm chính giữa.  là trung điểm cạnh . Điểm  đối xứng với  qua . Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai . Lấy điểm  thuộc  sao cho . Chứng minh rằng:

a) Điểm  thuộc cung nhỏ  của đường tròn .

b) Tứ giác  nội tiếp và .

**Câu 53.** Cho  là một điểm nằm trong tam giác . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  có điểm chung.

**Câu 54.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn . Hai phân giác  và  của góc  và . Tia  cắt  tại . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  xuống . Chứng minh rằng:

a) .

b) .

**Câu 55.** Cho tam giác nhọn . Đường tròn đường kính  cắt các cạnh  tương ứng tại . Gọi  là trung điểm của . Đường phân giác của  và  cắt nhau tại . Chứng minh rằng đường tròn ngoai tiếp tam giác  và  cùng đi qua một điểm nằm trên cạnh .

**Câu 56.** Cho tứ giác có đường chéo  không là phân giác của các góc và . Một điểm  nằm trong tứ giác sao cho: . Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp khi và chỉ khi .

**Câu 57.** Ba tia  chung gốc . Lấy cặp điểm  trên , lấy cặp điểm  trên , lấy cặp điểm  trên  theo thứ tự đó kể từ  sao cho . Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và  thẳng hàng.

**Câu 58.** Cho  là một dây cung khác đường kính của đường tròn . Điểm  thay đổi trên cung lớn . Đường tròn bàng tiếp góc  của tam giác  tiếp xúc với cạnh  lần lượt tại .

a) Tìm vị trí của  để chu vi tam giác  đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác  luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 59.** Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường tròn  thay đổi tiếp xúc ngoài với  và . Giả sử là một đường kính của  sao cho  là một hình thang . Gọi  là giao điểm của  với . Chứng minh rằng  thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu 60.** Cho tam giác  có  là tâm đường tròn nội tiếp,  là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm . Giả sử rằng . Chứng minh rằng  và  song song.

**Câu 61.** Cho hình chữ nhật và bốn đường tròn  sao cho . Gọi  là hai tiếp tuyến chung ngoài của  và ;  là hai tiếp tuyến chung ngoài của  và . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả bốn đường thẳng .

**Câu 62.** Cho tứ giác  có hai đường chéo  và  vuông góc với nhau tại . Gọi  lần lượt đối xứng với  qua . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt tại  tại . Chứng minh rằng bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

**Câu 63.** Cho tam giác  cân tại , trên cạnh  lấy  sao cho  và trên đoạn  lấy  sao cho . Chứng minh rằng .

**Câu 64.** Cho tứ giác  nội tiếp. Gọi  lần lượt là các chân đường vuông góc của  xuống . Chứng tỏ rằng  khi và chỉ khi phân giác các góc  và  cắt nhau trên .

**Câu 65.** Trong mặt phẳng cho hai đường tròn  và  cắt nhau ở hai điểm  và . Các tiếp tuyến tại  và  của  cắt nhau ở điểm . Giả sử  là một điểm nằm trên  nhưng không trùng vào  và . Đường thẳng  cắt  ở điểm thứ hai , đường thẳng  cắt  ở điểm thứ hai  và đường thẳng  cắt  ở điểm thứ hai . Chứng minh rằng trung điểm của  nằm trên đường thẳng .

**Câu 66.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn . Đường tròn  nằm trong  tiếp xúc với  tại  thuộc cung  (cung không chứa ). Kẻ các tiếp tuyến  tới . Chứng minh rằng .

**Câu 67.** Cho hai đường tròn  và  cùng tiếp xúc với đường tròn . Tiếp tuyến chung của  và  cắt  tại bốn điểm. Gọi  là hai trong bốn điểm đó sao cho  nằm về cùng một phía đối với . Chứng minh rằng  song song với một tiếp tuyến chung ngoài của  và .

**Câu 68.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn . Chứng minh rằng .

**Câu 69.** Cho tam giác  cân ở . Kí hiệu  lần lượt là khoảng cách  từ một điểm  nằm trong tam giác tới các đường thẳng . Giả sử , chứng minh rằng  thuộc một đường tròn cố định.

**Câu 70.** Cho tam giác nhọn . Điểm  thay đổi trên . Đường tròn tâm  bán kính  cắt  lần lượt tại các điểm thứ hai . Chứng minh rằng trực tâm của tam giác  thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu 71.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn tâm . Gọi  lần lượt là trực tâm của các tam giác . Chứng minh bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

**Câu 72.** Điểm  nằm trong tam giác  và thỏa mãn . Chứng minh rằng ba đường thẳng Ơ-le của các tam giác  và  đồng quy.

**Câu 73.** Gọi  và  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác . Chứng minh rằng: Nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác  đi qua một trong các đỉnh của tam giác  thì phải đi qua một đỉnh khác của tam giác .

**Câu 74.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn , trực tâm , đường cao  . Giả sử một đường thẳng qua  vuông góc với  cắt lần lượt tại . Các tia  cắt  thứ tự tại . Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp.

**Câu 75.** Tam giác  có trực tâm , đường cao . Điểm  trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . Vẽ các hình bình hành  và . Giao điểm  và  là . Chứng minh rằng  song song với .

**Câu 76.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm . Một đường tròn  qua  và  cắt các cạnh  lần lượt tại . Đường tròn  qua ba điểm  cắt  tại . Chứng minh rằng .

**Câu 77.** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại  và . Giả sử  là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này , điểm  gần  hơn ). Gọi  là đường thẳng qua  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  và  là đường thẳng qua  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.

**Câu 78.** Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc trong tại  ( chứa trong ). Giả sử  và  là hai điểm bất kỳ thuộc . Qua  và  kẻ các tiếp tuyến với  cắt  tại  và . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác  nằm trên .

**Câu 79.** Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài với nhau tại  và cùng tiếp xúc trong với . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài với  và  cắt  tại . Qua kẻ tiếp tuyến chung với  và  cắt  tại  ( thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ  với . Chứng minh rằng  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

**Câu 80.** Cho tam giác  cân đỉnh . Điểm  nằm trong tam giác sao cho . Qua  kẻ đường thẳng song song với  cắt  lần lượt tại . Vẽ  lần lượt song song với . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

**Câu 81.**  Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn , các đường cao  cắt nhau tại .

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh rằng các tứ giác  nội tiếp đường tròn.

c) Vẽ tia  là tia tiếp tuyến của đường tròn , tia  nằm trên nửa mặt phẳng bờ  có chứa điểm . Chứng minh rằng . Từ đó suy ra .

d) Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Đường thẳng đi qua  song song với  cắt  lần lượt tại . Chứng minh rằng .

**Câu 82.** Cho đường tròn tâm , đường kính . Lấy  thuộc  ( không trùng với ),  là điểm chính giữa của cung nhỏ . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại , các đường thẳng  cắt nhau tại .

a) Chứng minh  và  cân .

b) Chứng minh tứ giác  nội tiếp.

c) Đường thẳng cắt tiếp tuyến tại  của  ở . Chứng minh đường thẳng  là tiếp tuyến của  và .

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn  tại  ( không trùng với ). Chứng minh  thẳng hàng.

**Câu 83.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn  tâm , đường kính . Hai đường chéo  và  cắt nhau tại . Gọi  là hình chiếu của  lên  và  là trung điểm của . Đường tròn  cắt  tại  ( khác ). Gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 84.** Cho đường tròn  cố định. Từ một điểm  cố định ở bên ngoài đường tròn , kẻ các tiếp tuyến  và  với đường tròn ( là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua  cắt đường tròn  tại hai điểm  và  ( nằm giữa  và ). Gọi  là trung điểm của dây .

a) Chứng minh rằng  là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng .

c) Khi cát tuyến  thay đổi thì điểm  chuyển động trên cung tròn nào? Vì sao?Xác định vị trí của cát tuyến  để .

**Câu 85.** Cho tam giác  nhọn , đường cao . Vẽ đường tròn tâm  đường kính  cắt  tại . Gọi  là điểm đối xứng của  qua ,  cắt  tại  và cắt đường tròn  tại điểm thứ hai .

a) Chứng minh .

b) Chứng minh  là phân giác của .

c) Chứng minh rằng điểm  cùng thuộc một đường tròn tâm . Và ba đường thẳng  đồng quy tại một điểm.

d)  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Chứng minh rằng  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 86.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và , tam giác  đều.

a) Tính  và  theo .

b) Gọi  là trực tâm của tam giác ;  cắt  tại ,  cắt  tại . Chứng minh năm điểm  cùng thuộc một đường tròn .

c) Đường tròn  cắt  tại , tính  theo .

d)  cắt  tại . Chứng minh  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Tính .

**Câu 87.** Cho điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến  và cát tuyến  ( thuộc đường tròn ), tia  nằm giữa hai tia  và . Gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh tứ giác  nội tiếp, .

c) Chứng minh rằng .

d)  cắt đường tròn  tại  ( nằm giữa ). Chứng minh rằng các đường thẳng  cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng .

**Câu 88.** Cho  ở ngoài đường tròn . Vẽ các tiếp tuyến  với .  là điểm trên tia đối của tia . Đường thẳng vuông góc với ( tại  cắt  lần lượt tại ; cắt đường tròn  tại  ( nằm giữa ).  cắt  tại .  là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng hai đường tròn  và  tiếp xúc nhau.

**HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP KHÓ**

**Câu 1) Phân tích và định hướng giải:**



a). Để chứng minh tứ giác 

nội tiếp ta chứng minh

. Điểm 

trong bài toán có mối quan hê với

hai đường tròn ngoại tiếp các

tứ giác  vì vậy ta

tìm cách tính các góc 

theo các góc có liên quan đến 2 tứ

giác này.

Ta có: 

 (1)

Mặt khác ta cũng có:  (2)

Từ (1) và (2) ta có: .

b). Thực nghiệm hình vẽ cho ta thấy  thẳng hàng. Thật vậy ta có: . Bây giờ ta chứng minh:  thẳng hàng: Thật vậy ta có: . Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 2)**

Phân tích định hướng giải:



a). Tứ giác  có liên quan

đến tiếp tuyến  nên ta tập trung

khai thác giả thiết về góc tạo bởi

tiếp tuyến và một dây.

Ta thấy: , mặt khác

 cùng phụ với góc

, nhưng 

(góc nội tiếp) từ đó ta suy ra  hay tứ giác  nội tiếp.

b). Dễ thấy . Từ đó suy ra  suy ra đpcm.

c). Để chứng minh  thẳng hàng: Ta chứng minh: , điều này cũng tương đương với việc chứng minh: . Thật vậy ta có: , nhưng  (Cùng chắn cung , mặt khác  do  nội tiếp, suy ra  ,Từ đó suy ra . (đpcm).

**Câu 3).**

**Phân tích định hướng giải:**

Để chứng minh tứ giác  nội tiếp ta sẽ chứng minh

. Ta có:  Mặt khác ta cũng có: 

 từ đó suy ra:  Ta cũng có:   . Từ đó suy ra đpcm.



b). Ta có tứ giác  nội tiếp nên

 hay  thẳng hàng. Mặt khác ta cũng có:  hay  thẳng hàng. Từ đó suy ra  thẳng hàng.



**Câu 4) Phân tích định hướng giải:**

Ta có: . Suy ra 

là trực tâm của tam giác .

Hay 

hay tứ giác  nội tiếp.

Tương tự ta cũng có:  nội tiếp.

Ta có:  tức là



 là tứ giác nội tiếp.

**Câu 5)**

+ Ta có tính chất quen thuộc:

 là phân giác trong của góc

. (Học sinh tự chứng minh

điều này dựa vào các tứ giác

nội tiếp ) .

Từ đó suy ra  và . Do đó . Mặt khác ta cũng có . Suy ra đpcm.

+ Xét tứ giác  ta có: , mặt khác ta vừa chứng minh  nội tiếp nên suy ra . Như vậy  suy ra đpcm.

+ Ta có:  cân tại . Từ đó dễ dàng chứng minh được: .



**Câu 6)**

**Phân tích định hướng giải:**

a). Áp dụng hệ thức lượng

trong tam giác vuông

 ta có: **.** Theo tính chất của tiếp tuyến và cát tuyến ta có: nên suy ra  nội tiếp.

Ta có thể giải thích tường minh hơn như sau:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  ta có: .

Xét tam giác  và tam giác  ta có:  chung,  (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra  đồng dạng với  nên .

b). Để giải quyết tốt câu hỏi này ta cần nắm chắc tính chất liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến. (Xem thêm phần: ‘’Chùm bài tập liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến’’) đó là:  là phân giác trong của góc  và  là phân giác ngoài của góc 

Thật vậy ta có:  mặt khác ta cũng có:  ( Tính chất tứ giác nội tiếp). Suy ra  hay  là phân giác của góc  do  nên suy ra  là phân giác ngoài của góc .

**Quay trở lại bài toán:**

Ta thấy rằng : Từ việc chứng minh:  là phân giác trong của góc  và  là phân giác ngoài của góc  ta có:  và  suy ra Mặt khác theo định lý Thales ta cũng có:  suy ra  mà  nên . Điều này chứng tỏ  là trung điểm của  và  thẳng hàng.

**Câu 7).**

Ta thấy rằng: Nếu tứ giác 



nội tiếp thì 

Mặt khác  do tứ giác

 nội tiếp **s**uy ra .

Như vậy ta cần quy bài toán về

chứng minh  nội tiếp.

Ta có:  (Tính chất tiếp tuyến).

Như vậy  là tứ giác nội tiếp. Hoàn toàn tương tự ta cũng có:  nội tiếp nên cũng suy ra được:  nội tiếp.

**Câu 8).**

a). Giả sử đường tròn  ngoại tiếp



tam giác . Dễ thấy 

là trực tâm tam giác 

 là trung điểm .

Những điểm đặc biệt này

giúp ta nghỉ đến bài toán

đặc biệt liên quanđến

đường thẳng, đường tròn Ơ le.

Kẻ đường kính  của **.** Ta dễ chứng minh được:  là hình bình hành và  thẳng hàng**.** Ta có:  do  là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác  (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra  tức là tứ giác  nội tiếp.

Để ý rằng: Tứ giác  nội tiếp, từ đó suy ra 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn đường kính  hay . Mặt khác  suy ra  thẳng hàng. Do đó 4 điểm  thẳng hàng. Tam giác  có  là hai đường cao nên suy ra  là trực tâm, do đó  nên 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra  tức là tứ giác  nội tiếp.

b). Ta có 5 điểm  cùng nằm trên đường tròn đường kính  nên , nhưng  suy ra  là trung điểm của . Như vậy:  nên  thẳng hàng.

c) Ta có  do  nội tiếp.  nội tiếp. . Mà  cùng bù với  hay  thẳng hàng.

d) Vì  là tiếp tuyến của đường tròn đi qua các điểm  tâm . Suy ra  . Mặt khác  thẳng hàng. Mà  thẳng hàng nên suy ra  thẳng hàng.

**Câu 9) Phân tích định hướng giải toán:**

Bài toán này làm ta liên tưởng đến đường thẳng Ơle, đường tròn Ơ le**.** Dựng đường kính .Ta dễ thấy 4 điểm cùng nằm trên đường tròn tâm  đường kính . Suy ra . Mặt khác từ tính chất quen thuộc khi chứng minh  là hình bình hành ta cũng suy ra  là hình bình hành do đó . Ta lại có  là đường nối tâm của 2 đường tròn  nên  (Do  nằm trên đường trung trực của ). Từ đó suy ra . Hay  thẳng hàng.

**

\*) Để chứng minh  thẳng hàng. Ta chứng minh: . Ta tìm cách quy 2 góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

+ Ta có:  (Cùng chắn cung ),  cùng phụ với góc  suy ra  nội tiếp suy ra . Mà  (Do  nội tiếp).

+ Từ đó suy ra  ( Điều phải chứng minh).

**Câu 10) Phân tích định hướng giải:**



a). Ta cần dùng các góc để tận

dụng điều kiện là

các tiếp tuyến của  Thật vậy: ,

vì vậy ta cần chứng minh

.

Mặt khác do  là đường trung bình của tam giác  nên nhưng  (Tính chất phân giác trong)

Từ đó suy ra  cân tại  vuông tại  hay  là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh  thẳng hàng ta chứng minh: . Thật vậy ta có:  mà ,  suy ra  (Đpcm).

**11) Phân tích định hướng giải:**



a). Ta có: 

nên 5 điểm cùng nằm

trên đường tròn đường kính .

Suy ra các tứ giác

 là tứ giác nội tiếp.

b). Ta có:  là tứ giác nội tiếp

nên: 

Mặt khác 

nên .Hay  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  suy ra . Ta cũng có: 

là tứ giác nội tiếp nên:  từ đó ta suy ra  hay  thẳng hàng.

**Câu 12) Phân tích định hướng giải:**

a). Ta thấy các điểm  nằm trên đường tròn đường kính

. Để chứng minh 5 điểm nằm trên một đường tròn



Ta cần chứng minh . Thật vậy ta có: 



Tương tự ta cũng có: .

. Từ đó suy ra

. Vậy điểm  thuộc đường tròn đường kính .Mặt khác  là phân giác của góc  nên  là trung điểm của cung nhỏ .

b). Để ý rằng  là tâm của hai đường tròn đường kính  và đường tròn đường kính  Do hai đường tròn cắt nhau theo dây cung  nên  đi qua trung điểm của cung . Hay  thẳng hàng.



**Câu 13) Phân tích định hướng giải:**

a). Điểm  trong bài toán

chính là điểm Miquel của

tam giác .

+ Ta dễ thấy 4 điểm

 cùng nằm

trên đường tròn

đường kính .

Bây giờ ta chứng minh  là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: 

 suy ra  là tứ giác nội tiếp hay 5 điểm  cùng nằm trên đường tròn đường kính  là tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác  ta có:  . Mặt khác ta cũng có:  hay  là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: Ta có:  thẳng hàng.

, , mặt khác ta có:  suy ra  là tứ giác nội tiếp.

b). Theo câu a ta có:  nội tiếp nên  mà  hay  là tam giác vuông tại 

Chú ý: Bài toán này có thể giải theo cách như bài 1: Đó là chỉ ra  suy ra  là trực tâm tam giác , ngoài ra ta cũng thấy  thẳng hàng.

**Câu 14)** Phân tích định hướng giải.Gọi  là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn

. Ta dễ chứng



minh được là tứ giác

nội tiếp ( Đây là bài toán

rất quen thuộc) từ đó suy

ra 5 điểm 

cùng nằm trên một đường tròn.

+ Trước hết ta chứng minh:  thẳng hàng: Ta có:  cùng chắn cung ,  do các tứ giác  nội tiếp . Suy ra  do đó  thẳng hàng:+ Vì 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn nên: .Vì  là đường kính của  suy ra ,  là đường kính của  nên  điều đó chứng tỏ các tia  trùng nhau. Hay  thẳng hàng.



**Câu 15).**

Giả sử  cắt nhau tại .

Ta cần chứng minh  nội tiếp.

Ta có  vì

 chung, )

suy ra  (1)

vì  chung, ) suy ra

 (2). Từ (1), (2) ta có: **.** Vì  suy ra . Mặt khác (Tính chất góc ngoài tam giác). Suy ra  hay  là tứ giác nội tiếp. Suy ra  là tứ giác nội tiếp.

**Câu 16). Phân tích định hướng giải:**



a). Do  đối xứng với  qua  nênta có . Để ý rằng:  là tiếp tuyến của  nên   điều này chứng tỏ

 là tiếp tuyến của đường trònngoại tiếp tam giác .

b). Từ chứng minh ở câu a ta có:.

Tương tự ta cũng có:  .

Ta có: Mặt khác ta có:  . Nhưng  do tứ giác  nội tiếp. Vậy  hay 3 điểm  thẳng hàng.



**Câu 17)**

**Phân tích định hướng giải:**

a). Theo giả thiết ta có: 

suy raTứ giác  là tứ giác

nội tiếp.Suy ra 

Tứ giác  nội tiếp nên:

. Tứ giác  nội tiếp nên 

Kết hợp các đẳng thức trên ta suy ra  suy ra  là tứ giác nội tiếp.

Hay bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

b). Giả sử đường thẳng  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm . Ta có tứ giác  nội tiếp nên:  mặt khác theo chứng minh ở câu  ta có:  nội tiếp nên:  suy ra  suy ra 4 điểm  cùng nằm trên một đường tròn. Điều đó chứng tỏ hai đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt nhau tại  và  thẳng hàng.

c) Ta có  ( Góc ngoài của tam giác). Mặt khác  (giả thiết) suy ra . Suy ra tam giác  cân tại . Chú ý rằng: Chứng minh tương tự ta cũng có:  cân tại  suy ra  là tâm vòng tròn ngoại tiếp tứ giác .

**Câu 18) Phân tích định hướng giải :**



a). Gọi  là giao điểm của 

với đường tròn  thì 

là điểm chính giữa của cung 

(không chứa ).  là tiếp điểm

của  với .

Ta có các tính chất quen thuộc sau:

+  thẳng hàng

+ Tam giác  cân tại 

( Hay  là tâm

vòng tròn ngoại tiếp tam giác )

(Xem thêm phần góc với đường tròn)

+  ( Phân giác trong

và phân giác ngoài cung một góc thì vuông góc với nhau).

Từ đó suy ra tứ giác  là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm .

b). Để chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  ta chứng minh: .

Mặt khác  nên ta cần chứng minh: . Nhưng điều này là hiển nhiên do:

+  là đường kính của  nên ,  là trung điểm của  nên  tại + Hệ thức lượng trong tam giác vuông  cho ta .

c). Vì  (Góc nội tiếp) ,  nhưng  là tiếp tuyến của ngoại tiếp tam giác  nên .

Như vậy ta cần chứng minh:  (\*).Ta có:  nên  do đó ta cần chứng minh: .

Điều này tương đương với: , nhưng ta có: ,  nên ta cần chứng minh: . Để ý rằng:  có: . (Bài toán được giải quyết).

**Câu 19) Phân tích định hướng:**



Vì . Áp dụng công thức

 do đó

. Trong bài toán

có các yếu tố cố định là

 nên ta tập trung khai

thác các yếu tố này.

a). Ta có: **.** Mà ,

, suy ra . Do đó  luôn thuộc cung chứa góc nhìn đoạn  dưới một góc .

b). Ta có tam giác  có độ dài cạnh  không đối , nên diện tích lớn nhất khi và chỉ khi đường cao hạ từ  đến  lớn nhất. Tức là  là trung điểm cung , khi đó  là trung điểm cung lớn . Tam giác  đều nên độ dài đường cao tam giác đều  là , 

c) Để ý rằng:  tại trung điểm của ,  tại trung điểm của  nên kéo dài  cắt đường tròn  tại  thì  là đường kính của đường tròn. Kéo dài  cắt đường tròn  tại  là đường kính của đường tròn.

Dễ thấy  thẳng hàng.  ( Góc nội tiếp chắn nữa đường tròn) nên các đường cao  của tam giác  cắt nhau tại trực tâm .Nên đường thẳng  đi qua . Mặt khác tứ giác  nội tiếp  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác . Điều đó chứng tỏ  đi qua  cố định.

**Câu 20)** Bài toán này làm ta liên



tưởng đến tính chất quen thuộc:

Từ điểm  ở ngoài đường tròn

 dựng hai tiếp tuyến

 và cát tuyến .

Gọi  là giao điểm của

 và  thì  là tứ giác nội tiếp và 

là đường phân giác trong của . (Các em học sinh tự chứng

minh tính chất này)

***Quay trở lại bài toán:***

Ta có  là đường phân giác trong của  nên . Suy ra . Nên ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 21)**



Do 5 điểm 

cùng nằm trên một đường tròn

nên ta có: . Mà

suy ra



hay tứ giác  nội tiếp.

Kéo dài  cắt  tại .

Ta chứng minh là trung điểm của . Do tứ giác  nội tiếp nên mà  suy ra 

Suy ra  là trung điểm của . Áp dụng định lý Thales ta có:  mà  (đpcm).

**Câu 22)** Giả sử  cắt  tại  cắt  tại . Khi đó ta dễ dàng chứng minh được:  tại . Thật vậy: Dựng tiếp tuyến  của  thì . Ta có:  mà  hay .

Ta cũng chứng minh được:  tại điểm . Thật vậy ta có:

 mà





suy ra  hay

 suy ra

. Mặt khác ta

có: 

(Do )

Suy ra 

hay .

Dễ thấy 4 điểm  cùng

nằm trên đường trònđường kính .

Tứ giác  nội tiếp nên: 

Tứ giác  nội tiếp nên suy ra  hay tứ giác  nội tiếp. Từ đó suy ra 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

Tứ giác  nội tiếp nên . Tứ giác  nội tiếp

nên **.** Xét tứ giác  ta có:

 .Mặt khác ta cũng có

. Suy ra tứ giác  nội tiếp. Do đó . Nhưng suy ra  hay tứ giác  nội tiếp . Mặt khác từ chứng minh trên ta cũng có:  nội tiếp nên . Suy ra  thẳng hàng.

**Câu 23)** Trong bài toán có giả thiết 

là trung điểm .Mặt khác các điểm



 có liên quan đến cát tuyến

qua . Để tận dụng điều này ta sẽ

dựng đường thẳng qua  song

song với đường thẳng cắt 

tại . Khi đó ta dễ chứng minh được

 là trung điểm của  theo định lý

Thales từ đó suy ra  là đường trung

bình của tam giác .Để chứng minh

tứ giác  nội tiếp ta chứng minh:

 . Mặt khác ta có: 

so le trong. Như vậy ta cần chứng minh:

 tức là ta cần chứng minh  nội tiếp.

+ Thật vậy: ( so le trong) mà  suy ra

 hay  là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có tứ giác  nên: . Tứ giác  nội tiếp nên

 suy ra . Hay tứ giác  là tứ

giác nội tiếp. Nhưng 

là tiếp tuyến của . Mà  cũng là tiếp tuyến của 

nên ta suy ra  thẳng hàng.

**Câu 24)**



Theo tính chất tuyến

tuyến ta có: ,

, 



+ Ta có:

**.** Mặt khác , suy ra  (1) + Ta có:  nhưng ,  suy ra  (2) . Từ (1) và (2) ta có: Hay tứ giác  nội tiếp.

Việc chứng minh trực tiếp  thẳng hàng là rất khó. Để khắc phục khó khăn này ta giả sử  cắt đường tròn  và đường tròn ngoại tiếp tứ giác  lần lượt tại . Ta sẽ chứng minh .

Thật vậy: Theo tính chất tiếp tuyến, cát tuyến ta có: , , ,  là điều phải chứng minh.

**Câu 25)**

**Phân tích định hướng giải toán:**



a). Do  là tiếp tuyến chung

của các đường tròn

nên 

Từ đó suy ra tứ giác  nội tiếp.

b). Để chứng minh  vuông góc với 

Ta chứng minh 

Thật vậy ta có: Từ việc chứng minh

**.** Ta suy ra 

Do đó  (Do tam giác  cân tại . Vậy  vuông góc với .

c) Ta có . Gọi  là giao điểm của  và  thì  thẳng hàng và  mặt khác ta có: **.** Suy ra  thẳng hàng . Tương tự  thẳng hàng. Mà  là đường kính của  nên . Suy ra  là trực tâm tam giác . Suy ra  qua . Vậy ba đường thẳng  đồng quy tại 

**Câu 26)**

a) Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1:  nằm trong đoạn . Ta có  ( Góc ngoài tam giác ).

Ta có . Từ đó suy ra .

Trường hợp 2:  nằm ngoài đoạn . Ta có  (Đpcm)



b) Từ kết quả chứng minh ở câu a)

Ta suy ra  là tứ giác nội tiếp suy ra , Chứng minh tương tự ta cũng có:  là tứ giác nội tiếp. Suy ra  do đó  suy ra 4 điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi  là giao điểm của . Từ chứng minh ở câu  ta suy ra  là trực tâm

của tam giác . Suy ra  thẳng hàng. Ta cũng có:  cùng nằm trên đường tròn đường kính  nên  là trung điểm của . Từ đó suy ra  thẳng hàng.

**Câu 27)**



a). Có 

tứ giác  nội tiếp.

 mà





b) Nối  với ,  với . Ta được  thuộc trung trực của .Có  và .

Có  và  là trung trực của  hay  cân tại .

**Câu 28)**



a). Ta có 

nên 5 điểm  thuộc đường

tròn tâm  đường kính .

b) Ta có  (1) mà

 (2) (góc nội tiếp chắn

hai cung bằng nhau).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) Qua ta kẻ đường thẳng song song  cắt tại . Ta có các tứ giác  nội tiếp nên  mà  (do  cân tại ). Nên . Xét  có  vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên . Áp dụng hệ quả định lý Talet cho hai tam giác  và  có . Ta có (đpcm).



**Câu 29)**

a). Ta có 

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra 



tứ giác  nội tiếp

đường tròn tâm  đường kính (theo định lý đảo). Kẻ  và  vuông góc với đường thẳng  ta có tứ giác  là hình thang vuông có  là đường trung bình nên . Trong  đều có  là đường cao nên  không đổi. Vậy  không đổi. Theo giả thiết  nên .  nên  ta có 

Trong tam giác vuông có (không đổi). Ta có tam giác  cân tại  và  có  là trung điểm  nên  và  cùng vuông góc với  suy ra  thẳng hàng.

c) (g.g)

nên.

 lớn nhất khi  lớn nhất. Kéo dài  cắt  tại  thì  vuông góc với . Ta có  không đổi,  lớn nhất khi  lớn nhất và  chạy trên cung  dựng trên ;  khi  thuộc trung điểm cung này, khi đó tam giác  đều, ; .

Cách khác: Kẻ  thì . Tính được  theo .



**Câu 30)**

a). Ta có  (1) (đồng vị);

 (2) (so le trong);

 (3) ( cân) (3).

Từ (1),(2),(3) ta có .

Xét  và  có ;  chung nên  (c.g.c) suy ra  nên bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn đường kính .

b) Ta có tứ giác  là hình chữ nhật nên và  cắt nhau tại  và là trung điểm của mỗi đường. Ta chứng minh  thẳng hàng. Gọi  cắt tại ;  cắt  tại  cắt  tại  ta có tứ giác nội tiếp (vì ) nên cùng bù với  mà so le. Nên  suy ra tứ giác  nội tiếp suy ra  mà  ở vị trí đồng vị nên  mà  nên . Vậy  đi qua  hay ba đường thẳng  đồng quy. c) Ta có  (không đổi)  (c.c.c);  (c.c.c) nên   khi  thuộc chính giữa .



**Câu 31)**

a). Tam giác  cân tại  nên

 suy ra 

hay  (1).Xét  vuông

cân đỉnh  do đó  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  (đpcm).

b) Do  và  nên đường tròn  đi qua  và nhận  làm tiếp tuyến. Từ đó ta có .

Xét  có . Mặt khác  nên  (1). Do  cân tại  nên .

Xét  có  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (đpcm).

**Câu 32)**



a). Ta có  là tiếp tuyến của

đường tròn , từ đó dễ dàng chứng

minh được  của đường tròn

. Dễ dàng chứng minh được 

 là các đường phân giác của

.

b) Gọi  cắt  tại . Dễ chứng minh được 

c) Ta có  là tâm đường tròn ngoai tiếp  và  đều có cạnh bằng . Sử dụng góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung để chứng minh . Ta có . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  (\*). Mà  là trực tâm tam giác  nên  (1). Ta có  nên  (2). Thay (1),(2) vào (\*) ta có đpcm, dấu bằng khi  hay  trùng nhau.

**Câu 33)**

a) .

b) .

Xét  (g.g) 

.

**Câu 34)**



a) Do  và  là hai phân giác của  thẳng hàng.

Có  chung  (g.g)  (1). Tương tự  (2). Từ (1) và (2) .

b) Xét  vuông có:  (3).

Lại có ,  chung (g.g)  (4). Từ (3) và (4)  (vì ,  chung)  tứ giác  nội tiếp hay 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn.

c) Do  (cùng )  nhưng  cắt  và  thẳng hàng . Mà  và  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp  hay  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

**Câu 35)**



a). Ta có 

(cùng chắn ), 

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

. Do đó  là tia phân giác của .

b) Xét  có:  là trực tâm 

 tại  hay  là đường cao của . Mà  là tia phân giác của  nên  cân tại . Mặt khác  (góc cạnh tương ứng vuông góc), . Do đó  cân tại 

Trong tam giác  vuông tại  có  (cạnh huyền lớn nhất)

.

c) Xét  có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông) Ta lại có:  (g.g)   (1)\

Mặt khác ta có:  (cùng vuông góc với ) (so le trong) mà  (g.g)  (2). Mặt khác  (g.g)  (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra .



**Câu 36)**

a)  (nội tiếp chắn

) mà 

( cân)

nên  (1).

b) Tương tự  (2)

Từ (1) và (2) ta có . Kéo dài  cắt  tại . Ta có  nên  (đpcm)

c) Gọi  là giao điểm của  và ,  cắt  tại . Ta có  mà  và   hay  (3). Tương tự  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  là trực tâm  (đpcm)

**Câu 37)**



a). Gọi  lần lượt là hình

chiếu vuông góc của  lên

đường thẳng . Gọi  là

trung điểm đoạn thẳng 

thì .

Xét hình thang  có

 là đường trung bình nên ;.

b) Ta có . Suy ra bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn đường kính .

Vì  nên  đều. . Gọi  là trung điểm của  thì  là tâm của đường tròn đi qua bốn điểm  và  là bán kính của đường tròn này. Do đó . c) Gọi  là giao điểm của  và , do  là trực tâm của  nên , nên  là đường cao tam giác  hạ từ . Do  nằm trên trung trực đoạn , nên  thẳng hàng. Xét  có  . Suy ra  mà  có  không đổi nên nó có diện tích lớn nhất khi  lớn nhất. Ta có . Đẳng thức xảy ra khi   cân tại  đều (do ). Do đó . Kết luận: Diện tích  lớn nhất bằng  khi và chỉ khi  (hay  đều).

**Câu 38)**



a) của ,  của  

(tổng ba góc trong ).

Vậy tứ giác  nội tiếp.

b) Vì tứ giác  nội tiếp nên  mà  nên .  (1). Tương tự  (2). Từ (1) và (2) ta được:.

**Nhận xét:** Kết quả câu b) thực chất là định lý **Ptolemy** (Xem thêm phần ***‘’Các định lý hình học nổi tiếng’’***)

**Câu 39)**



a). Vì  là đường kính

nên . Do đó

 (góc có

cạnh tương ứng vuông

góc cùng nhọn), mà





nên . Do đó tứ giác  nội tiếp.

b) Gọi ,  vuông tại  nên  (1)

 vuông tại  nên  mà  (chứng minh ở câu a) nên  (2). Từ (1) và (2) ta có  hay .

c)  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ,  là trung điểm của  nên  (vì cùng vuông góc với ). Tương tự  (cùng vuông góc với ). Do đó tứ giác  là hình bình hành nên .

d)  là trực tâm của tam giác , do đó  suy ra . Tương tự  (cùng vuông góc với ). Do đó tứ giác  là hình bình hành nên . Mặt khác tứ giác  là hình chữ nhật nên  (3).Lấy  đối xứng với  qua  ta có  (4) với  cố định vì  cố định. Từ (3) và (4) suy ra tứ giác  là hình bình hành nên . Vậy  chạy trên đường tròn  cố định.



**Câu 40)**

a) Nối  với .

 (vì  là đường kính),

 ( là đường cao)

 (cùng phụ với ) (1)  (góc nội tiếp cùng chắn ) (2). Từ (1) và (2)  tứ giác  nội tiếp đường tròn

b) Vì  là đường kính  thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có 

 vuông có  là đường cao:  (cùng là đường kính đường tròn )  và  có  chung;  (câu a)

 (g.g)  Tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng  



**Câu 41)**

a) Nối  với ,  với .

+ Xét  và  có

 (vì  là

tiếp tuyến) và  chung

 (g.g)  (1) + Xét  có  (vì  là tiếp tuyến,  là bán kính) và  (vì  và  là tiếp tuyến chung và  nối tâm)  vuông tại  có  là đường cao)  (2).

+ Xét  và  có  chung. Từ (1) và (2) 

 (c.g.c)  (3). Từ (3) có  Tứ giác  nội tiếp đường trònCác điểm  cùng thuộc đường tròn (đpcm)

b) Ta có  ( là tiếp tuyến,  là bán kính) và  (câu a)Tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính . Vì bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn (câu a) Hai đường tròn này ngoại tiếp  Hai đường tròn trùng nhau  cũng nằm trên đường tròn đường kính  . Vì  là bán kính đường tròn ,  là tiếp tuyến của đường tròn  tại tiếp điểm  (đpcm).

**Câu 42)**



1.a)  (1)

Xét  vuông tại 

có  (2)



 (3)

Từ (1),(2) và (3) 

b)  suy ra tứ giác  nội tiếp (4)

Ta có .

Mà . Suy ra tứ giác  nội tiếp (5)

Từ (4) và (5) suy ra  cùng thuộc một đường tròn.

**Câu 43) a).** Ta có  là tiếp tuyến của đường tròn  (1)

Xét đường tròn :



Ta có 

 (2)

Từ (1) và (2)



và  trùng nhau

 thẳng hàng.

b)  là tiếp tuyến của đường tròn  (3). Đường tròn  tiếp xúc với  tại   (4). Từ (3) và (4)  (\*) (hai góc so le trong)  là hai tiếp tuyến cắt nhau của   (\*\*). Từ (\*) và (\*\*)  cân tại .

c) Gọi chân đường vuông góc hạ từ  tới  là  có   (bài toán quỹ tích)  kéo dài cắt  ở . Gọi  là giao điểm của  và đường tròn   và  cân tại . Ta có tứ giác  nội tiếp.

Vì có  (cùng bù với )  (5) Ta có  (cùng chắn cung  của đường tròn )  (g.g) . Tương tự ta có: .

Mà  (c.g.c)  mà  (5)   là trung điểm của  cố định  đpcm.

**Câu 44)**



a) Ta chứng minh .

b) Từ câu a ta có  (1)

mà  (do  vuông

tại  có  là trung điểm của )

nên  Có 

 nên 

do đó . Suy ra  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (đpcm).

c) Dễ thấy  vuông góc với  nên ta chứng minh .

Xét  và : Từ câu b) ta có  nên . Mà  (do tứ giác  nội tiếp). Do đó  nên . Lại có . Suy ra  nên trong tam giác  có  (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

**Câu 45)**

a). Gọi  là giao điểm của 



với  vuông tại 

có 



b) Khi  thì 

vuông cân tại . Có Tứ giác  nội tiếp 5 điểm  cùng thuộc một đường tròn. Tứ giác  nội tiếp. , mà  thẳng hàng.

c) Có tứ giác  nội tiếp .Tương tự có . Cách xác định điểm : Kẻ đường kính  của ,  cắt  tại  thì  lớn nhất. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  là đường kính của   lớn nhất bằng .



**Câu 46)**

a). Chỉ ra   Tứ giác  nội tiếp.

Chỉ ra   Tứ giác  nội tiếp.

b) Vì  (giả thiết)  cân tại .

Kết hợp câu a)  cân .

 là đường trung trực của 

Kết hợp câu a)  (g.c.g)

 cân.

**Câu 47)**



a). Ta có  (gt), 

( tiếp xúc với  tại 







Tứ giác  nội tiếp.

Mặt khác   tứ giác  nội tiếp. Ta có  (tứ giác  nội tiếp) ;  (tứ giác  nội tiếp) Tứ giác  nội tiếp.

b) Ta có  (tứ giác  nội tiếp);  (tứ giác  nội tiếp). Mặt khác  cân tại   cân tại  có  là đường cao  là đường trung tuyến của  là trung điểm của   Mà  ( là trung điểm của ). Do đó .Mặt khác  có   (hệ quả của định lý Talet). Ta có . Xét  và  có:  (hai góc đồng vị do );   (c.g.c)  Hai tia  trùng nhau. Vậy ba điểm  thẳng hàng.

c)  là các tiếp tuyến của đường tròn ,  là tia phân giác của .  cân tại  có  (gt)  đều ,  đều có  là đường phân giác  là đường cao của . vuông tại  . Vậy  (đvdt). Gọi  là giao điểm của  và . Ta có ,  là trung điểm của  và   vuông tại . Do đó  (đvdt). Xét  và , ta có . Do đó  (g.g) . Mà . Do đó . Ta có , vậy .

**Câu 48.**



a).

\*) Tứ giác  nội tiếp do

+ , +    \*) Ta có , . Suy ra tứ giác  nội tiếp. b). Ta thấy tứ giác  nội tiếp do  suy ra  suy ra . c). Ta có Mặt khác ta có:  suy ra  hay .Ta có: .

**Câu 49). Giải:**



Giả sử cắt đường tròn

ngoại tiếp tam giác 

tại điểm thứ hai , 

cắt đường tròn ngoại tiếp

tam giác  tại điểm

thứ hai . Ta có  do đó  là tứ giác nội tiếp.

Suy ra , do đó  thẳng hàng.

Khi đó  suy ra .

**Câu 50. Giải:**

Đường thẳng qua song song với  cắt  tại .

Ta có  do đó . Mặt khác  nên tam giác  đều.

Vậy phép quay tâm  góc quay  biến  thành ,  thành . Do đó  và  tạo với nhau một góc .

Vậy . Do đó  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 51. Giải:**



Vì tứ giác 

nội tiếp nên .

Mặt khác 

(1).Áp dụng định lý Ptô –lê- mê

cho tứ giác  ta có

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra . Mặt khác  nên .

**Câu 52.**  **Giải:**

a) Ta có . Do đó  nằm trong góc  (1). Do  nên  và  nằm



về cùng một phía đối với .

Do đó  và  nằm về cùng

một phía đối với  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  nằm trong

góc . Vậy  thuộc cung nhỏ .

b) Vì  (3), suy ra . Mặt khác  nên  hay tứ giác  nội tiếp. Từ đó ta có  nên .

Gọi  là giao điểm của  và , khi đó  là hình bình hành. Do đó là trung điểm của .Vậy  là một hình bình hành. Mặt khác ta có  và  (4) nên  (5). Từ (4) và (5) suy ra  (6). Từ (3) và (6) ta có .

**Câu 53. Giải:**



Gọi  là giao điểm (khác )

của đường tròn ngoại tiếp tam

giác  và tam giác . Tứ giác  nội tiếp một

đường tròn do đó





 (do ). Gọi  là giao điểm của  và . Khi đó  do đó . Suy ra . Do đó tứ giác  nội tiếp hay  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác . Tương tự  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 54. Giải:**



a). Gọi  lần lượt là hình

chiếu vuông góc của 

xuống . là hình chiếu

vuông góc của  xuống

,  là hình chiếu vuông

góc của  xuống .

Đặt . Dễ dàng tính được: ;  . Do đó .

b) Dễ dàng chứng minh được  nên ; nên . Do đó  hay .

**Câu 55. Giải:**

Ta có  và  nên  (c.g.c).

Vậy .Do  nằm trên đường trung trực của  và nằm

trên phân giác  nên  là



điểm chính giữa cung 

(cung không chứa ) của đường

tròn ngoại tiếp tam giác .

Vậy tứ giác nội tiếp một

đường tròn. Giả sử đường tròn

ngoại tiếp tam giác  cắt  tại  khác . Do đó các tứ giác  nội tiếp được nên tứ giác  cũng nội tiếp.

Vậy hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác  cắt nhau tại  thuộc .

**Câu 56. Giải:**

Sử dụng tứ giác  nội tiếp.



Ta chứng minh .

Giả sử  cắt  ở , 

cắt  ở . Dễ dàng chứng

minh được các cặp tam giác

đồng dạng 

suy ra

. Do đó . Mặt khác  nên . Từ đó ta có  (c.g.c). Vậy .

Ngược lại, giả sử . Gọi  tương ứng là giao điểm của  với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Ta có các cặp tam giác đồng dạng  nên  (1). Mặt khác  nên  (2). Từ (1) và(2) suy ra . Do đó .Vậy  nội tiếp.

**Câu 57. Giải:**

Đường tròn ngoại tiếp tam



giác  cắt các đường

thẳng  lần lượt

tại các điểm thứ hai .

Gọi ,  lần lượt

là đường tròn ngoại tiếp tam

giác .

Ta có: ; do đó . Suy ra hai tam giác  và  có các cạnh tương ứng song song nên . Mặt khác ta có . Vậy ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 58.**

**Giải:**



Khi  thay đổi trên cung lớn

 thì tam giác  có  không đổi bằng .

Tam giác  luôn cân, có 

không đổi nên  lớn nhất khi

 lớn nhất, khi đó  là điểm chính giữa của cung lớn . Gọi  là điểm chính giữa của cung lớn , ứng với vị trí đó ta có tam giác  cân tại ; . Vậy chu vi  chu vi . Do đó chu vi tam giác  lớn nhất khi .

b) Gọi  là giao điểm của  với ,  là giao điểm của  với ,  là giao của  với . Các điểm  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác . Ta có. Do đó theo câu 9 suy ra ba điểm  thẳng hàng. Mặt khác ba điểm  cùng nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác  luôn đi qua  cố định.



**Câu 59) Giải:**

Gọi  lần lượt là các

tiếp điểm của các cặp đường

tròn .

Đường thẳng  cắt  tại . Ta có ba điểm  thẳng hàng.

Mặt khác  và  nên .Tương tự  và . Do đó . Vậy các đoạn thẳng  đồng quy nên  cũng là đường cao của tam giác  hay  suy ra . Vậy  thuộc đường thẳng qua  vuông góc với .

**Câu 60. Giải:**



Gọi  là giao điểm thứ hai

khác  của  với đường

tròn . Khi đó  là điểm

chính giữa cung 

(cung không chứa ).

Ta có .

Theo định lý Ptô-lê-mê ta có  do đó . Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có: .Vậy .Gọi  là trung điểm cạnh , khi đó . Vậy .

**Câu 61. Giải:**

Gọi  là giao điểm của  và . Ta có  (Tính chất đường trung bình trong một hình thang), ở đó  là khoảng cách từ  tới . Tương tự . Vậy . Do đó  cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm .

**Câu 62. Giải:**

Đường tròn ngoại tiếp tam giác



 có tâm  và tiếp xúc với

 tại ,  tại . Đường

tròn ngoại tiếp tam giác 

có tâm  và tiếp xúc với 

tại ,  tại .

Ta có  suy ra  (1)

Ta có  hay tứ giác  nội tiếp. Do đó  (để ý rằng ) Từ (1) và (2) suy ra  hay . Do đó tứ giác  nội tiếp.

**Câu 63. Giải:**



Đường thẳng qua  song song

với  cắt  tại . Đường

thẳng qua  song song với 

cắt  tại . Gọi  là trung

điểm của .Ta có

 nên .

Vậy . Do đó  suy ra . Do  nên . Vậy tứ giác  là tứ giác nội tiếp. Do đó  suy ra tứ giác  nội tiếp.

Vì  là các tứ giác nội tiếp nên  là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa do , nên  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác . Vậy .

**Câu 64. Giải:**



Theo định lý Sim-sơn, ba điểm

 thẳng hàng. Từ hai bộ

bốn điểm 

cùng thuộc một đường tròn ta

suy ra .

Tương tự ta được các cặp tam giác đồng dạng . Do đó . Suy ra . Điều đó tương đương với chân đường phân giác góc  của tam giác  và chân đường phân giác góc  của tam giác  trùng nhau, hay các phân giác góc  và  cắt nhau trên .

**Câu 65. Giải:**

Gọi là giao điểm của  với . Ta cần chứng minh  là trung điểm của .Ta có  suy ra . Tương tự suy ra .

Mặt khác  nên

 do đó



 (1).

Dễ dàng nhận thấy



suy ra  (2). Từ (1) và (2) ta có . Sử dụng định lý Mê-lê-la –uyt cho tam giác  với cát tuyến  ta có: . Do đó .

**Câu 66. Giải:**



 cắt đường tròn 

tại các điểm thứ hai .

Khi đó ,

hơn nữa chúng có các cạnh

tương ứng song song. Ta có

 và .Do đó . Tương tự .

Vậy  do đó  (1). Theo định lý Ptô- lê-mê ta có  (2). Từ (1) và (2) ta có: .



**Câu 67. Giải:**

Kẻ các tiếp tuyến chung

trong  của 

và . Giao điểm của

 với  lần lượt là

.Kẻ tiếp tuyến chung

ngoài  của  và  sao cho  và  nằm về cùng một phía đối với . Các điểm  lần lượt là các tiếp điểm của  với .  cắt  tại . Ta sẽ chứng minh . Gọi  là điểm chính giữa của cung  của đường tròn , kẻ các tiếp tuyến  của . Dễ dàng chứng minh được ba điểm  thẳng hàng, ba điểm  thẳng hàng và tứ giác  nội tiếp. Do đó  hay .

Áp dụng câu 66 cho tam giác  nội tiếp đường tròn  và đường tròn  tiếp xúc với  tại , ta có: . Tương tự .

Suy ra  do đó  hay . Vậy  là trung điểm của cung , do đó .

**Câu 68. Giải:**

Lấy  thuộc đường tròn sao cho .

Khi đó .



Áp dụng định lý Ptô-lê-mê

cho hai tứ giác nội tiếp

 và  ta có:



 (1)

Và 

 (2)

Mặt khác 

Do đó  suy ra  (3)

Từ (1),(2),(3) ta có điều phải chứng minh.

**Câu 69. Giải:**

Tứ giác  và 

nội tiếp được nên

 và . Mà  suy ra .

Ta lại có  suy ra  (c.g.c). Do đó . Mặt khác  nên . Do đó  không đổi. Vậy  thuộc một đường tròn cố định.

**Câu 70)**



Gọi  trực tâm của , 

là trung điểm cạnh . Gọi

là tia phân giác của .

Ta có  nên 

cũng là tia phân giác của .

Gọi  đối xứng với  qua .

Khi đó  thuộc . Khi  thay đổi trên  thì  thay đổi trên đường thẳng  đối xứng với đường thẳng  qua . Tam giác  có  không đổi nên  không đổi. Mặt khác  nên  không đổi. Do đó  không đổi. hơn nữa  thuộc  cố định nên  thuộc một đường thẳng  song song với .