**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**HAI VẬT DAO ĐỘNG**

**I. PHƯƠNG PHÁP**

Xét bài toán dao động điều hòa của hai vật trên cùng 1 trục tọa độ hoặc trên hai trục tọa độ song song với nhau. Nếu chọn gốc tọa độ của 2 vật trùng nhau hoặc gốc tọa độ của 2 vật nằm trên 1 đường thẳng vuông góc với quỹ đạo của hai vật thì trong quá trình dao động, hai vật sẽ có lúc gặp nhau. Ta quan tâm đến hai vật gặp nhau khi nào, khoảng cách giữa hai vật ra sao? Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Hai vật dao động cùng tần số

- Trường hợp 2: Hai vật dao động khác tần số

Chúng ta sẽ qua những ví dụ cụ thể để hiểu phương pháp.

\***II. VÍ DỤ MINH HỌA**

**Trường hợp 1: Hai vật dao động cùng tần số**

**Ví dụ 1:** Hai con lắc lò xo giống nhau có khối lượng vật nặng 400 g, độ cứng lò xo  N/m dao động điều hòa dọc theo hai đường thẳng song song kề liền nhau (vị trí cân bằng của hai vật cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với quỹ đạo chuyển động của hai vật). Biên độ của con lắc thứ nhất lớn gấp đôi con lắc thứ hai. Biết rằng hai vật gặp nhau khi chúng chuyển động ngược chiều nhau. Khoảng thời gian giữa ba lần hai vật gặp nhau liên tiếp là

 **A.** 0,3. **B.** 0,2. **C.** 0,4. **D.** 0,1.

**Lời giải**

Vì hai con lắc lò xo giống hệt nhau nên hai vật dao động có cùng tần số. Giả sử phương trình dao động của hai vật là 

Nếu giả sử tại thời điểm *t*, hai vật gặp nhau thì ta có

















Thời gian giữa hai lần liên tiếp hai vật gặp nhau và chuyển động ngược chiều nhau là



Khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp hai vật gặp nhau là  nên khoảng thời gian giữa ba lần liên tiếp hai vật gặp nhau là . Thay số tính được .

**Đáp án C.**

**Nhận xét:** Đối với những bài toán hai vật dao động cùng tần số, khác biên độ thìta sẽ làm phương pháp giải phương trình lượng giác bằng cách đặt như trên.Xem thêm Ví dụ 3.

|  |
| --- |
| **Nhận xét** |
| - Giả sử ở thời điểm , hai con lắc dao động có chu kì bằng nhau ở li độ *x* và chuyển động ngược chiều, sau nửa chu kì thì li độ của chúng đều đối dấu, tức là sẽ gặp nhau ở li độ -*x*. - Khoảng thời gian hai lần liên tiếp hai con lắc gặp nhau là .- Khoảng thời gian *n* lần liên tiếp hai con lặc gặp nhau là . |

**Ví dụ 2:** Hai vật dao động điều hòa dọc theo các trục song song với nhau. Phương trình dao động của các vật lần lượt là:  và  (*x* tính bằng cm; *t* tính bằng *s*). Trong khoảng thời gian 1s đầu tiên thì hai vật gặp nhau mấy lần?

 **A.** 3 lần. **B.** 4 lần. **C.** 5 lần. **D.** 6 lần.

**Lời giải**

Tại thời điểm ban đầu  ta có: 

Như vậy, tại thời điểm ban đầu, hai vật gặp nhau. Chu kì 

Khoảng thời gian *n* lần liên tiếp hai con lắc gặp nhau là 

**Đáp án D.**

**Ví dụ 3:** Hai vật dao động điều hòa với phương trình cm và  cm dọc theo hai đường thẳng song song kề nhau (vị trí cân bằng của hai vật đều ở gốc tọa độ). Kể từ thời điểm 0,21s trở đi, trong 1s hai vật gặp nhau bao nhiều lần?

 **A.** 6 lần. **B.** 5 lần. **C.** 4 lần. **D.** 3 lần.

**Lời giải**

Khi gặp nhau thì chúng cùng li độ . Từ đó ta có



Để cho gọn, ta đặt  phương trình trở thành:





. Do đó 

Theo bài ra ta có: 

Có 5 giá trị nguyên của k nên hai vật sẽ gặp nhau 5 lần.

**Đáp án B.**

**Ví dụ 4:** Hai chất điểm cùng thực hiện dao động điều hòa trên cùng một trục O*x* có phương trình lần lượt là  và  (x tính bằng cm; t tính bằng s). Tìm thời điểm lần thứ 2013 hai chất điểm đó gặp nhau và tính tỉ số vận tốc của vật 1 và của vật 2 khi đó.

**A.** và  **B. ** và 

**C. ** và  **D. ** và 

**Lời giải**

Hai chất điểm gặp nhau khi 





Lần thứ 2013 ứng với  nên 

Tỉ số vận tốc của vật 1 và của vật 2 là:

**Đáp án B.**

**Ví dụ 5:** Dao động của một chất điểm là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình li độ lần lượt là  và . Tại các thời điểm  và gia tốc của chúng đều âm thì li độ của dao động tổng hợp là:

**A.** -4,8 cm. **B.** 5,19 cm. **C.** 4,8 cm. **D.** -5,19 cm.

**Lời giải**

Dùng phương pháp số phức ta sẽ tính được phương trình tổng hợp của dao động là 

Khi gia tốc  âm thì  dương nên khi đó li độ của dao động tổng hợp dương.





Thay vào phương trình dao động tổng hợp ta được



**Đáp án C.**

**Ví dụ 6:** Hai chất điểm dao động điều hòa dọc theo hai đường thẳng song song với trục Ox, cạnh nhau, cùng biên độ và tần số. Vị trí cân bằng của chúng nằm trên đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng. Biết rằng khi đi ngang qua nhau, hai chất điểm chuyển động ngược chiều nhau và đều có độ lớn li độ bằng một nửa biên độ. Hiệu pha của hai dao động này có thể là giá trị nào sau đây

**A.** **B.**  **C.** **D.** 

**Lời giải**

Giả sử một chất điểm đi qua vị trí  theo chiều dương thì dựa vào đường tròn, ta có pha lúc đó là . Vì chất điểm còn lại chuyển động ngược chiều nên đi qua vị trí  theo chiều âm. Dựa vào đường tròn, ta có pha lúc đó là . Vậy hiệu pha của hai dao động có thể là .

**Đáp án D.**

**Ví dụ 7:** Hai chất điểm dao động điều hòa dọc theo hai đường thẳng cùng song song với trục Ox, cạnh nhau, cùng tần số và biên độ của chất điểm thứ nhất là  còn của chất điểm thứ hai là A. Vị trí cân bằng của chúng nằm trên đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng. Khi hai chất điểm gặp nhau ở tọa độ , chúng chuyển động ngược chiều nhau. Hiệu pha của hai dao động này có thể nhận giá trị nào sau đây

**A. ** **B.**  **C.** **D.** 

**Lời giải**

**Cách 1:** Theo phương pháp đại số

Theo bài ra ta có:





Từ (I) và (II) ta có: 

**Cách 2:** Dùng đường tròn

Lập luận tương tự ví dụ bên trên dựa vào đường tròn lượng giác ta có ngay:



**Đáp án A.**

**Ví dụ 8:** Hai vật có cùng khối lượng gắn vào 2 lò xo và dao động điều hòa với cùng tần số, cùng phương nhưng ngược pha nhau, có biên độ lần lượt là  biết . Khi dao động 1 có động năng  thì dao động 2 có thế năng . Hỏi khi dao động 1 có động năng  thì dao động 2 có thế năng là bao nhiêu?

**A.** 0,22J. **B.** 0,20J. **C.** 0,56J. **D.** 0,48J.

**Lời giải**

Vì hai vật dao động ngược pha nhau nên ta có: 

Từ đó ta có 

Khi vật 2 có thế năng là 0,08J thì thế năng của vật 1 là: 

Cơ năng của vật 1 là: . Khi động năng vật 1 là 0,08J thì thế năng của vật 1 là  nên thế năng vật 2 là: 

**Đáp án B.**

**Ví dụ 9:** Hai vật có khối lượng bằng nhau được gắn vào hai lò xo giống nhau đặt nằm ngang dao động trên hai đường thẳng song song cạnh nhau có vị trí cân bằng nằm trên đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng trên. Ban đầu hai vật được kéo ra ở cùng một vị trí, người ta thả nhẹ cho vật 1 chuyển động, khi vật 1 đi qua vị trí cân bằng thì người ta bắt đầu thả nhẹ vật 2. Hai vật dao động điều hòa với cơ năng là J. Khi vật 1 có động năng là J thì thế năng của vật 2 bằng

**A.** J **B.** 3J **C.** 2J **D.** 2J

**Lời giải**

Theo bài ra ta có: Ban đầu hai vật được kéo ra ở cùng một vị trí, người ta thả nhẹ cho vật 1 chuyển động, khi vật 1 đi qua vị trí cân bằng thì người ta bắt đầu thả nhẹ vật 2 nên hai vật có biên độ bằng nhau, và dựa vào đường tròn, ta thấy vật 1 nhanh pha hơn vật 2 góc 

Gọi phương trình dao động của 2 vật là



Khi vật 1 có động năng là J thì thế năng của vật 1 là



Từ (\*) ta có thế năng của vật 2 là: 

**Đáp án A.**

**Ví dụ 10:** Hai chất điểm dao động điều hòa trên hai đường thẳng song song với trục Ox, có vị trí cân bằng cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng và đi qua O. Hai chất điểm dao động theo phương trìnhcm;  cm. Hỏi trong quá trình dao động khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa hai chất điểm theo phương Ox là bao nhiêu?

**A.** 0; 4 cm. **B.** 2; 8 cm.

**C.** 0;  cm. **D.** 2;  cm.

**Lời giải**

Khoảng cách giữa hai chất điểm theo phương Ox



(Ở đây ta tính  bằng phương pháp số phức cho nhanh).

Vì  nên ta có 

Suy ra khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa hai chất điểm theo phương Ox lần lượt là 0 và 4 cm.

**Đáp án A.**

Ta xét bài toán tổng quát:

**Ví dụ 11:** Hai chất điểm thực hiện dao động trên hai đường thẳng song song, nằm ngang, có gốc tọa độ nằm trên cùng đường thẳng có phương thẳng đứng. Phương trình dao động của mỗi vật tương ứng là:

.

Gốc thời gian là lúc hai vật bắt đầu chuyển động, khoảng cách theo phương ngang giữa hai vật có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Khoảng cách theo phương ngang giữa hai vật là







Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có







Đẳng thức xảy ra khi nên giá trị lớn nhất của *d* là



Bài toán được giải quyết xong.

**Ví dụ 12:** Hai chất điểm dao động điều hòa trên cùng trục tọa độ Ox với phương trình lần lượt là: cm;  cm. Coi rằng trong quá trình dao động hai chất điểm không va chạm vào nhau. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm là 4cm. Hãy tìm biên độ *A*2?

 **A.** 4 cm. **B.** 2 cm. **C.** 8 cm. **D.**  cm.

**Lời giải**

Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong quá trình dao động là



Thay số ta được: 

**Đáp án D.**

**Ví dụ 13:** Hai chất điểm dao động điều hòa trên cùng một trục tọa độ Ox theo các phương trình lần lượt cm và cm. Thời điểm đầu tiên hai chất điểm gặp nhau là

**A**. s. **B.** s. **C.** s. **D.** 2,12 s.

**Lời giải**

Khoảng cách giữa hai vật theo phương Ox là



Hai vật gặp nhau khi:



Vậy thời điểm đầu tiên ứng với , do đó s.

**Đáp án C.**

**Ví dụ 14:** Hai vật dao động điều hòa với phương trình (cm), (cm). Tính từ thời điểm ban đầu, thì cứ sau 0,125 s thì khoảng cách 2 vật lại bằng **. Biên độ *A*2 là

**A.** **B.**  **C.** **D.** ****

**Lời giải**

Điều kiện để khoảng cách giữa hai vật là** là, lúc đó khoảng cách giữa hai vật là: 

Giả sử thời điểm thì khoảng cách giữa hai vật là bằng **



Ở thời  s ta cũng có khoảng cách hai vật là**nên





Vì  nên ta có



**Đáp án B.**

**Ví dụ 15:** Hai chất điểm M và N có cùng khối lượng dao động điều hòa cùng tần số dọc theo hai đường thẳng song song kề nhau và song song với trục tọa độ Ox. Vị trí cân bằng của M và N đều trên một đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với Ox. Biên độ dao động của M và N đều là 6 cm. Trong quá trình dao động khoảng cách lớn nhất giữa M và N theo phương Ox là 6 cm. Mốc thế năng tại vị trí cân bằng. Ở thời điểm mà M có động năng bằng 3 lần thế năng, tỉ số động năng của M và thế năng của N là

**A. ** hoặc 3 **B.** **** hoặc 2 **C. ** hoặc ****  **D.** **** hoặc 2

**Lời giải**

Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong quá trình dao động là



Thay  vào biểu thức trên ta được: 

Vị trí có động năng bằng 3 thế năng là . Giả sử tại thời điểm  và đang đi theo chiều âm. Dựa vào đường tròn với chú ý độ lệch pha giữa M và N là  thì ta có 

Khi đó tỉ số động năng của M và thế năng của N là



**Đáp án A.**

**Ví dụ 16:** Hai chất điểm M và N có cùng khối lượng, dao động điều hòa cùng tần số dọc theo hai đường thẳng song song kề nhau và song song với trục tọa độ Ox. Vị trí cân bằng của M và của N đều ở trên một đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với Ox. Biên độ của M là 6 cm, của N là 8 cm. Trong quá trình dao động, khoảng cách lớn nhất giữa M và N theo phương Ox là 10 cm. Mốc thế năng tại vị trí cân bằng. Ở thời điểm mà M có động năng bằng thế năng, tỉ số động năng của M và động năng của N là

**A.** **B.**  **C.** **D.** 

**Lời giải**

Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong quá trình dao động là



Thay số được: 

Suy ra hai dao động thành phần vuông pha nhau. Ở thời điểm mà chất điểm thứ nhất có động năng bằng thế năng thì cm. Mà hai dao động vuông pha nên ta có: cm

Suy ra chất điểm thứ hai cũng xảy ra động năng bằng thế năng.

Tỉ số động năng giữa chúng là: 

**Đáp án C.**

**Ví dụ 17:** Hai chất điểm dao động điều hòa cùng tần số, trên hai đường thẳng cùng song song với trục tọa độ Ox. Vị trí cân bằng của chúng nằm trên cùng một đường thẳng đi qua O và vuông góc với Ox. Biên độ dao động của chúng lần lượt là 140,0mm và 480,0mm. Biết hai chất điểm đi qua nhau ở vị trí có li độ mm khi chúng đang chuyển động ngược chiều nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm đó theo phương Ox là

**A.** 620,0mm. **B.** 485,6mm. **C.** 500,0mm. **D.** 474,4mm.

**Lời giải**

Dựa vào đường tròn, ta xác định được độ lớn pha của hai chất điểm 1 và 2 khi đi ngang qua nhau là:



Suy ra góc hợp bởi giữa hai véc tơ quay là  hay chúng vuông pha nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong quá trình dao động là



**Đáp án C.**

**Ví dụ 18:** Hai chất điểm M và N dao động điều hòa trên cùng một trục Ox (O là vị trí cân bằng của chúng), coi quá trình dao động hai chất điểm không va chạm vào nhau. Biết phương trình dao động của chúng lần lượt là cm và cm. Hai chất điểm cách nhau 5 cm ở thời điểm đầu tiên và lần thứ 2014 kể từ lúc  lần lượt là

**A. ** và  **B.** **** và  **C. ** và  **D.** **** và 

**Lời giải**

Theo bài ra ta có: 

Khoảng cách



Hai chất điểm cách nhau 5 cm thì d = 5 cm. Đến đây ta sử dụng đường tròn dễ dàng tìm thời gian tương ứng theo yêu đầu bài toán.

Từ hình vẽ ta có thời điểm đầu tiên d = 5 là 

Trong 1 chu kì thì có 4 lần khoảng cách là 5 cm. Do đó lần thứ

2014 ứng với thời điểm



**Đáp án B.**

**Ví dụ 19:** Hai chất điểm dao động điều hoà trên hai trục tọa độ Ox và Oy vuông góc với nhau (O là vị trí cân bằng của cả hai chất điểm). Biết phương trình dao động của hai chất điểm là: cm và cm. Khi chất điểm thứ nhất có li độ cm và đang đi theo chiều âm thì khoảng cách giữa hai chất điểm là

**A.**cm. **B.** ****cm. **C. **cm. **D.** ****cm.

**Lời giải**

Khoảng cách giữa hai chất điểm ở thời điểm bất kì là: 

Tại ta thấy chất điểm qua VTCB theo chiều âm, khi đi đến cm và đang đi theo chiều âm thì đưa vào đường tròn, góc quét được là . Vì hai vật dao động cùng tần số nên khi vectơ quay của *x* quét được  thì vectơ quay của y cũng quét được .

Tại thời điểm ban đầu, chất điểm trên Oy đi qua  theo chiều dương. Sau khi quét thêm  thì dựa vào đường tròn ta có chất điểm trên Oy đi

qua  theo chiều âm. Khi đó khoảng cách giữa hai chất điểm là



**Đáp án D.**

**Ví dụ 19:** Hai vật dao động điều hòa dọc theo các trục Ox song song với nhau. Phương trình dao động của các vật lần lượt là (cm) và (cm). Biết . Tại thời điểm *t*, vật thứ nhất đi qua vị trí có li độ cm với vận tốc cm/s. Khi đó vật thứ hai có tốc độ bằng

 **A.** cm/s. **B.** 24 cm/s. **C.** 8 cm/s. **D.** cm/s.

**Lời giải**

Theo bài ra cho phương trình  (\*)

Ta thay cm vào phương trình dễ dàng tìm được cm.

Lấy đạo hàm hai vế phương trình (\*) theo thời gian, với chú ý và  ta có .

Thế  cm,  cm và  cm/s vào ta được: cm/s.

**Đáp án D.**

**Ví dụ 21:** Trên trục Ox, cho hai chất điểm dao động điều hòa cùng phương có phương trình 1i độ lần lượt là  (cm),  (cm). Biết rằng . Một chất điểm khác dao động điều hòa với phương trình  thì có tốc độ cực đại là

 **A.** 10 cm/s. **B.** 12 cm/s. **C.** 12,9 cm/s. **D.** 12,5 cm/s.

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có



Cũng từ giả thiết ta có khi thì  đạt cực đại nên và vuông pha nhau. Suy ra biên độ dao động tổng hợp là: 

Tốc độ cực đại của *x* là:  (cm/s).

**Đáp án A.**

**Ví dụ 22:** Cho 2 vật dao động điều hòa cùng tốc độ góc , biên độ lần lượt là. Biết cm. Tại một thời điểm, vật 1 có li độ và vận tốc , vật 2 có li độ và vận tốc  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của .

 **A.** 0,5 rad/s. **B.** 1 rad/s. **C.** 2 rad/s. **D.**Đáp án khác.

**Lời giải**

Tacó: 

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz, ta có



**Đáp án A.**

**\* Trường hợp 2: Hai vật dao động khác tần số**

**Ví dụ 1:** Xét hai vật dao động điều hòa cùng biên độ A với tần số 3 Hz và 6 Hz. Lúc đầu hai vật đồng thời xuất phát từ vị trí có li độ  và đi theo chiều dương. Khoảng thời gian ngắn nhất để hai vật có cùng li độ là?

 **A.** 1/12 s. **B.** 1/36 s. **C.** 1/27 s. **D.** 1/40 s.

**Lời giải**

Để thời gian ngắn nhất thì ban đầu hai vật chuyển động theo cùng chiều, và theo chiều dương. Vì tần số vật 2 lớn hơn nên vật 2 chuyển động nhanh hơn, nên sẽ ra đến biên trước rồi quay trở lại gặp vật 1. Khi gặp nhau thì pha của hai vật đối nhau.

Vì cả hai vật đều xuất phát từ  và đi theo chiều dương nên ta có phương trình dao động của từng vật là: 

Theo lập luận bên trên, hai vật có cùng li độ khi



 (vì pha đối nhau)



Thời gian ngắn nhất ứng với , thay số ta được



**Đáp án B.**

**Ví dụ 2:** Xét hai vật dao động điều hòa cùng biên độ A với tần số 3 Hz và 6 Hz. Lúc đầu hai vật đồng thời xuất phát từ vị trí có li độ  và đang chuyển động theo chiều âm của trục tọa độ. Khoảng thời gian ngắn nhất để hai vật có cùng li độ là?

 **A.** 1/12 s. **B.** 1/36 s. **C.** 1/27 s. **D.** 1/40 s.

**Lời giải**

Vì tần số vật 2 lớn hơn nên vật 2 chuyển động nhanh hơn, nên sẽ ra đến biên âm trước rồi quay trở lại gặp vật 1. Khi gặp nhau thì pha của hai vật đối nhau.

Vì cả hai vật đều xuất phát từ  và đi theo chiều âm nên ta có phương trình dao động của từng vật là 

Theo lập luận bên trên, hai vật có cùng li độ khi



 (vì pha đối nhau)



Thời gian ngắn nhất ứng với , thay số ta được



**Đáp án A.**

**Ví dụ 3:** Hai con lắc đơn có chiều dài lần lượt là 81cm và 64cm được treo ở trần một căn phòng. Khi các vật nhỏ của hai con lắc đang ở vị trí cân bằng, đồng thời truyền cho chúng các vận tốc cùng hướng sao cho hai con lắc dao động điều hòa với cùng biên độ góc, trong hai mặt phẳng song song với nhau. Gọi  là khoảng thời gian ngắn nhất kể từ lúc truyền vận tốc đến lúc hai dây treo song song nhau. Giá trị  gần giá trị nào nhất sau đây:

 **A.** 2,36 s. **B.** 8,12 s. **C.** 0,45 s. **D.** 7,20 s.

**Lời giải**

Ta có  con lắc 2 dao động nhanh hơn con lắc 1. Con lắc 2 sẽ đi đến biên trước, rồi quay lại và gặp con lắc 1 (tại vị trí có li độ góc bằng nhau).

Giả sử ban đầu 2 con lắc đi qua vị trí cân bằng theo chiều dương, khi đó phương trình li độ góc của hai con lắc là: 

Dây song song khi chúng cùng li độ góc, tức là





(Có dấu trừ bởi vì khi gặp nhau thì pha của chúng đối nhau.)

Gần với đáp án C nhất.

**Đáp án C.**