**BÀI TẬP BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CÓ LỜI GIẢI**

**ĐỀ BÀI**

**1.** Chứng minh  là số vô tỉ.

**2.** **a)** Chứng minh : (ac + bd)2 + (ad bc)2 = (a2 + b2)(c2 + d2)

 **b)** Chứng minh bất dẳng thức Bunhiacôpxki : (ac + bd)2 (a2 + b2)(c2 + d2)

**3.** Cho x + y = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : S = x2 + y2.

**4.** **a)** Cho a 0, b 0. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy : .

 **b)** Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : 

 **c)** Cho a, b > 0 và 3a + 5b = 12. Tìm giá trị lớn nhất của tích P = ab.

**5.** Cho a + b = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : M = a3 + b3.

**6.** Cho a3 + b3 = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : N = a + b.

**7.** Cho a, b, c là các số d­ương. Chứng minh : a3 + b3 + abc ab(a + b + c)

**8.** Tìm liên hệ giữa các số a và b biết rằng : 

**9.** **a)** Chứng minh bất đẳng thức (a + 1)2 4a

 **b)** Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh : (a + 1)(b + 1)(c + 1) 8

**10.** Chứng minh các bất đẳng thức :

 **a)** (a + b)2 2(a2 + b2) **b)** (a + b + c)2 3(a2 + b2 + c2)

**11.** Tìm các giá trị của x sao cho :

 **a)** | 2x 3 | = | 1 x | **b)** x2 4x 5 **c)** 2x(2x 1) 2x 1.

**12.** Tìm các số a, b, c, d biết rằng : a2 + b2 + c2 + d2 = a(b + c + d)

**13.** Cho biểu thức M = a2 + ab + b2 3a 3b + 2001. Với giá trị nào của a và b thì M đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**14.** Cho biểu thức P = x2 + xy + y2 3(x + y) + 3. CMR giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

**15.** Chứng minh rằng không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau :

 x2 + 4y2 + z2 2a + 8y 6z + 15 = 0

**16.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : 

**17.** So sánh các số thực sau (không dùng máy tính) :

 **a)**  **b)** 

 **c)**  **d)** 

**18.** Hãy viết một số hữu tỉ và một số vô tỉ lớn hơn  nh­ng nhỏ hơn 

**19.** Giải phư­ơng trình : .

**20.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = x2y với các điều kiện x, y > 0 và 2x + xy = 4.

**21.** Cho .

 Hãy so sánh S và .

**22.** Chứng minh rằng : Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phư­ơng thì  là số vô tỉ.

**23.** Cho các số x và y cùng dấu. Chứng minh rằng :

**a)** 

**b)** 

**c)** .

**24.** Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

**a)** 

**b)**  với m, n là các số hữu tỉ, n 0.

**25.** Có hai số vô tỉ dư­ơng nào mà tổng là số hữu tỉ không ?

**26.** Cho các số x và y khác 0. Chứng minh rằng : .

**27.** Cho các số x, y, z d­ơng. Chứng minh rằng : .

**28.** Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

**29.** Chứng minh các bất đẳng thức :

**a)** (a + b)2 2(a2 + b2)

**b)** (a + b + c)2 3(a2 + b2 + c2)

**c)** (a1 + a2 + .. + an)2 n(a12 + a22 + .. + an2).

**30.** Cho a3 + b3 = 2. Chứng minh rằng a + b 2.

**31.** Chứng minh rằng : .

**32.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : .

**33.** Tìm giá trị nhỏ nhất của :  với x, y, z > 0.

**34.** Tìm giá trị nhỏ nhất của : A = x2 + y2 biết x + y = 4.

**35.** Tìm giá trị lớn nhất của : A = xyz(x + y)(y + z)(z + x) với x, y, z 0 ; x + y + z = 1.

**36.** Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ không nếu :

**a)** ab và  là số vô tỉ.

**b)** a + b và  là số hữu tỉ (a + b 0)

**c)** a + b, a2 và b2 là số hữu tỉ (a + b 0)

**37.** Cho a, b, c > 0. Chứng minh : a3 + b3 + abc ab(a + b + c)

**38.** Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh : 

**39.** Chứng minh rằng  bằng  hoặc 

**40.** Cho số nguyên d­ương a. Xét các số có dạng : a + 15 ; a + 30 ; a + 45 ; ; a + 15n. Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

**41.** Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :



**42.** **a)** Chứng minh rằng : | A + B | | A | + | B | . Dấu  **= ”** xảy ra khi nào ?

 **b)** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : .

 **c)** Giải ph­ương trình : 

**43.** Giải ph­ương trình : .

**44.** Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :



**45.** Giải phư­ơng trình : 

**46.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : .

**47.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : 

**48.** So sánh : **a)**  ; **b)** 

 **c)**  (n là số nguyên dư­ơng)

**49.** Với giá trị nào của x, biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất : .

**50.** Tính : 

 (n > 1)

**51.** Rút gọn biểu thức : .

**52.** Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức : 

**53.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : .

**54.** Giải các ph­ương trình sau :



**55.** Cho hai số thực x và y thỏa mãn các điều kiện : xy = 1 và x > y. CMR: .

**56.** Rút gọn các biểu thức :

**57.** Chứng minh rằng .

**58.** Rút gọn các biểu thức :

.**59.** So sánh :

**60.** Cho biểu thức : 

1. Tìm tập xác định của biểu thức A.
2. Rút gọn biểu thức A.

**61.** Rút gọn các biểu thức sau : 

 

**62.** Cho a + b + c = 0 ; a, b, c 0. Chứng minh đẳng thức : 

**63.** Giải bất ph­ương trình : .

**64.** Tìm x sao cho : .

**65.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của A = x2 + y2 , biết rằng :

 x2(x2 + 2y2 3) + (y2 2)2 = 1 (1)

**66.** Tìm x để biểu thức có nghĩa: .

**67.** Cho biểu thức : .

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A. c) Tìm giá trị của x để A < 2.

**68.** Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số :  (20 chữ số 9)

**69.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của : A = **|** x - **| + |** y 1 **|** với **|** x **| + |** y **| =** 5

**70.** Tìm giá trị nhỏ nhất của A = x4 + y4 + z4 biết rằng xy + yz + zx = 1

**71.** Trong hai số :  (n là số nguyên d­ương), số nào lớn hơn ?

**72.** Cho biểu thức . Tính giá trị của A theo hai cách.

**73.** Tính : 

**74.** Chứng minh các số sau là số vô tỉ : 

**75.** Hãy so sánh hai số :  ; 

**76.** So sánh  và số 0.

**77.** Rút gọn biểu thức : .

**78.** Cho . Hãy biểu diễn P d­ưới dạng tổng của 3 căn thức bậc hai

**79.** Tính giá trị của biểu thức x2 + y2 biết rằng : .

**80.** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của : .

**81.** Tìm giá trị lớn nhất của :  với a, b > 0 và a + b 1.

**82.** CMR trong các số  có ít nhất hai số d­ương (a, b, c, d > 0).

**83.** Rút gọn biểu thức : .

**84.** Cho , trong đó x, y, z > 0. Chứng minh x = y = z.

**85.** Cho a1, a2, …, an > 0 và a1a2aan = 1. Chứng minh: (1 + a1)(1 + a2)…(1 + an) 2n.

**86.** Chứng minh :  (a, b 0).

**87.** Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập đư­ợc thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  cũng lập đ­ược thành một tam giác.

**88.** Rút gọn : **a)**  **b)** 

**89.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, ta đều có : . Khi nào có đẳng thức ?

**90.** Tính :  bằng hai cách.

**91.** So sánh : a) 

**92.** Tính : .

**93.** Giải ph­ương trình : .

**94.** Chứng minh rằng ta luôn có :  ; ∀n ∈ **Z+**

**95.** Chứng minh rằng nếu a, b > 0 thì .

**96.** Rút gọn biểu thức : A = .

**97.** Chứng minh các đẳng thức sau :  (a, b > 0 ; a b)

 (a > 0).

**98.** Tính : .

 .

**99.** So sánh : 

 

**100.** Cho hằng đẳng thức :

  (a, b > 0 và a2 b > 0).

Áp dụng kết quả để rút gọn : 



**101.** Xác định giá trị các biểu thức sau :

với  (a > 1 ; b > 1)

 với .

**102.** Cho biểu thức 

a) Tìm tất cả các giá trị của x để P(x) xác định. Rút gọn P(x).

b) Chứng minh rằng nếu x > 1 thì P(x).P(- x) < 0.

**103.** Cho biểu thức .

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A là một số nguyên.

**104.** Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:



**105.** Rút gọn biểu thức : , bằng ba cách ?

**106.** Rút gọn các biểu thức sau : 

.

**107.** Chứng minh các hằng đẳng thức với b 0 ; a 

a)  b) 

**108.** Rút gọn biểu thức : 

**109.** Tìm x và y sao cho : 

**110.** Chứng minh bất đẳng thức : .

**111.** Cho a, b, c > 0. Chứng minh : .

**112.** Cho a, b, c > 0 ; a + b + c = 1. Chứng minh :

.

**113.** CM : 

 với a, b, c, d > 0.

**114.** Tìm giá trị nhỏ nhất của : .

**115.** Tìm giá trị nhỏ nhất của : .

**116.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của A = 2x + 3y

biết 2x2 + 3y2 = 5.

**117.** Tìm giá trị lớn nhất của A = x + .

**118.** Giải phư­ơng trình : 

**119.** Giải ph­ương trình : 

**120.** Giải ph­ương trình : 

**121.** Giải ph­ương trình : 

**122.** Chứng minh các số sau là số vô tỉ : 

**123.** Chứng minh .

**124.** Chứng minh bất đẳng thức sau bằng ph­ương pháp hình học :

  với a, b, c > 0.

**125.** Chứng minh  với a, b, c, d > 0.

**126.** Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập đ­ợc thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  cũng lập đ­ợc thành một tam giác.

**127.** Chứng minh  với a, b 0.

**128.** Chứng minh  với a, b, c > 0.

**129.** Cho . Chứng minh rằng x2 + y2 = 1.

**130.** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**131.** Tìm GTNN, GTLN của .

**132.** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**133.** Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**134.** Tìm GTNN, GTLN của : 

**135.** Tìm GTNN của A = x + y biết x, y > 0 thỏa mãn 

 (a và b là hằng số d­ương).

**136.** Tìm GTNN của A = (x + y)(x + z) với x, y, z > 0 , xyz(x + y + z) = 1.

**137.** Tìm GTNN của  với x, y, z > 0 , x + y + z = 1.

**138.** Tìm GTNN của  biết x, y, z > 0 , .

**139.** Tìm giá trị lớn nhất của : a)  với a, b > 0 , a + b 1

b) 

 với a, b, c, d > 0 và a + b + c + d = 1.

**140.** Tìm giá trị nhỏ nhất của A = 3x + 3y với x + y = 4.

**141.** Tìm GTNN của  với b + c a + d ; b, c > 0 ; a, d 0.

**142.** Giải các ph­ương trình sau :









.



**143.** Rút gọn biểu thức : .

**144.** Chứng minh rằng, ∀n ∈ **Z+**, ta luôn có : .

**145.** Trục căn thức ở mẫu : .

**146.** Tính : **147.** Cho . Chứng minh rằng a là số tự nhiên.

**148.** Cho . b có phải là số tự nhiên không ?

**149.** Giải các ph­ương trình sau :



**150.** Tính giá trị của biểu thức : 

**151.** Rút gọn : .

**152.** Cho biểu thức : 

 a) Rút gọn P. b) P có phải là số hữu tỉ không ?

**153.** Tính : .

**154.** Chứng minh : .

**155.** Cho . Hãy tính giá trị của biểu thức: A = (a5 + 2a4 17a3 a2 + 18a 17)2000.

**156.** Chứng minh :  (a 3)

**157.** Chứng minh :  (x 0)

**158.** Tìm giá trị lớn nhất của  , biết x + y = 4.

**159.** Tính giá trị của biểu thức sau với .

**160.** Chứng minh các đẳng thức sau :



**161.** Chứng minh các bất đẳng thức sau :











**162.** Chứng minh rằng : . Từ đó suy ra:

 

**163.** Trục căn thức ở mẫu : .

**164.** Cho .

 Tính A = 5x2 + 6xy + 5y2.

**165.** Chứng minh bất đẳng thức sau : .

**166.** Tính giá trị của biểu thức :  với .

**167.** Giải phư­ơng trình : .

**168.** Giải bất các pt : a) .

**169.** Rút gọn các biểu thức sau :







**170.** Tìm GTNN và GTLN của biểu thức .

**171.** Tìm giá trị nhỏ nhất của  với 0 < x < 1.

**172.** Tìm GTLN của :  biết x + y = 4 ; b) 

**173.** Cho . So sánh a với b, số nào lớn hơn ?

**174.** Tìm GTNN, GTLN của : .

**175.** Tìm giá trị lớn nhất của .

**176.** Tìm giá trị lớn nhất của A = | x y | biết x2 + 4y2 = 1.

**177.** Tìm GTNN, GTLN của A = x3 + y3 biết x, y 0 ; x2 + y2 = 1.

**178.** Tìm GTNN, GTLN của biết .

**179.** Giải phư­ơng trình : .

**180.** Giải ph­ương trình : .

**181.** CMR, ∀n ∈ **Z+** , ta có : .

**182.** Cho . Hãy so sánh A và 1,999.

**183.** Cho 3 số x, y và  là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số  đều là số hữu tỉ

**184.** Cho . CMR : a, b là các số hữu tỉ.

**185.** Rút gọn biểu thức :  .

 (a > 0 ; a  1)

**186.** Chứng minh : . (a > 0 ; a 1)

**187.** Rút gọn :  (0 < x < 2)

**188.** Rút gọn : 

**189.** Giải bất ph­ương trình :  (a  0)

**190.** Cho 

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A với a = 9.

c) Với giá trị nào của a thì | A | = A.

**191.** Cho biểu thức : .

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của B nếu .

c) So sánh B với -1.

**192.** Cho 

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm b biết | A | = -A.

c) Tính giá trị của A khi .

**193.** Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A nếu .

c) Tìm giá trị của a để .

**194.** Cho biểu thức .

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A để A = - 4

**195.** Thực hiện phép tính : 

**196.** Thực hiện phép tính : 

**197.** Rút gọn các biểu thức sau :



với  .

b)  với x > y > 0

c)  với  ; 0 < a < 1

d)  với a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 1

e) 

**198.** Chứng minh :  với x 2.

**199.** Cho . Tính a7 + b7.

**200.** Cho 

a) Viết a2 ; a3 d­ưới dạng  , trong đó m là số tự nhiên.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dư­ơng n, số an viết đ­ợc d­ới dạng trên.

**201.** Cho biết x =  là một nghiệm của phư­ơng trình x3 + ax2 + bx + c = 0 với các hệ số hữu tỉ. Tìm các nghiệm còn lại.

**202.** Chứng minh  với n∈ N ; n 2.

**203.** Tìm phần nguyên của số  (có 100 dấu căn).

**204.** Cho .

**205.** Cho 3 số x, y,  là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số  đều là số hữu tỉ

**206.** CMR, ∀n 1 , n ∈ N : 

**207.** Cho 25 số tự nhiên a1 , a2 , a3 , a25 thỏa đk : . Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó tồn tại 2 số bằng nhau.

**208.** Giải ph­ương trình .

**209.** Giải và biện luận với tham số a .

**210.** Giải hệ ph­ương trình 

**211.** Chứng minh rằng :

a) Số  có 7 chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

b) Số  có m­ời chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

**212.** Kí hiệu an là số nguyên gần  nhất (n ∈ N\*), ví dụ :

Tính : .

**213.** Tìm phần nguyên của các số (có n dấu căn) :

a) 

b) 

 c) 

**214.** Tìm phần nguyên của A với n ∈ N : 

**215.** Chứng minh rằng khi viết số x =  d­ới dạng thập phân, ta đ­ợc chữ số liền tr­ớc dấu phẩy là 1, chữ số liền sau dấu phẩy là 9.

**216.** Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của .

**217.** Tính tổng 

**218.** Tìm giá trị lớn nhất của A = x2(3 x) với x 0.

**219.** Giải ph­ương trình : a)  b) .

**220.** Có tồn tại các số hữu tỉ d­ương a, b không nếu : **a)**  **b)** .

**221.** Chứng minh các số sau là số vô tỉ : a) 

**222.** Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm : .

**223.** Cho a, b, c, d > 0. Biết . Chứng minh rằng : .

**224.** Chứng minh bất đẳng thức :  với x, y, z > 0

**225.** Cho  . Chứng minh rằng : a < b.

**226.** a) Chứng minh với mọi số nguyên d­ương n, ta có : .

 b) Chứng minh rằng trong các số có dạng  (n là số tự nhiên), số  có giá trị lớn nhất

**227.** Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**228.** Tìm giá trị nhỏ nhất của A = x2(2 x) biết x 4.

**229.** Tìm giá trị lớn nhất của .

**230.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của A = x(x2 6) biết 0 x 3.

**231.** Một miếng bìa hình vuông có cạnh 3 dm. Ở mỗi góc của hình vuông lớn, ng­ời ta cắt đi một hình vuông nhỏ rồi gấp bìa để đ­ợc một cái hộp hình hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh hình vuông nhỏ để thể tích của hộp là lớn nhất.

**232.** Giải các phư­ơng trình sau :









 (a, b là tham số)

**233.** Rút gọn .

**234.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**235.** Xác định các số nguyên a, b sao cho một trong các nghiệm của ph­ương trình : 3x3 + ax2 + bx + 12 = 0 là .

**236.** Chứng minh  là số vô tỉ.

**237.** Làm phép tính : .

**238.** Tính : .

**239.** Chứng minh : .

**240.** Tính : .

**241.** Hãy lập ph­ương trình f(x) = 0 với hệ số nguyên có một nghiệm là : .

**242.** Tính giá trị của biểu thức : M = x3 + 3x 14 với .

**243.** Giải các phư­ơng trình : a) .



**244.** Tìm GTNN của biểu thức : .

**245.** Cho các số d­ơng a, b, c, d. Chứng minh : a + b + c + d .

**246.** Rút gọn :  ; x > 0 , x  8

**247.** CMR :  là nghiệm của ph­ương trình x3 - 6x + 10 = 0.

**248.** Cho . Tính giá trị biểu thức y = x3 - 3x + 1987.

**249.** Chứng minh đẳng thức : .

**250.** Chứng minh bất đẳng thức : .

**251.** Rút gọn các biểu thức sau :

a) 

c) .

**252.** Cho  . Tính giá trị của biểu thức M biết rằng:

 .

**253.** Tìm giá trị nhỏ nhất của :  (a < b)

**254.** Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì :

 abc (a + b c)(b + c a)(c + a b)

**255.** Tìm giá trị của biểu thức | x y | biết x + y = 2 và xy = -1

**256.** Biết a b =  + 1 , b c =  - 1, tìm giá trị của biểu thức :

 A = a2 + b2 + c2 ab bc ca.

**257.** Tìm x, y, z biết rằng : .

**258.** Cho . CMR, nếu 1 x 2 thì giá trị của y là một hằng số.

**259.** Phân tích thành nhân tử :  (x 1).

**260.** Trong tất cả các hình chữ nhật có đư­ờng chéo bằng 8, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

**261.** Cho tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Chứng minh rằng ta luôn có : .

**262.** Cho các số d­ơng a, b, c, a, b, c. Chứng minh rằng :

 Nếu  .

**263.** Giải ph­ương trình : | x2 1 | + | x2 4 | = 3.

**264.** Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y :

  với x > 0 ; y > 0.

**265.** Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a:

  với a > 0 ; a 1

**266.** Cho biểu thức .

**a)** Rút gọn biểu thức B.

**b)** Tính giá trị của biểu thức B khi c = 54 ; a = 24

**c)** Với giá trị nào của a và c để B > 0 ; B < 0.

**267.** Cho biểu thức :  với m 0 ; n 1

**a)** Rút gọn biểu thức A. **b)** Tìm giá trị của A với .

**c)** Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

**268.** Rút gọn 

**269.** Cho  với x 0 ; x 1.

**a)** Rút gọn biểu thức P. **b)** Tìm x sao cho P < 0.

**270.** Xét biểu thức .

**a)** Rút gọn y. Tìm x để y = 2. **b)** Giả sử x > 1. Chứng minh rằng : y - | y | = 0

**c)** Tìm giá trị nhỏ nhất của y ?

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**1.** Giả sử  là số hữu tỉ ⇒  (tối giản). Suy ra  (1). Đẳng thức này chứng tỏ mà 7 là số nguyên tố nên m  7. Đặt m = 7k (k ∈ Z), ta có m2 = 49k2 (2). Từ (1) và (2) suy ra 7n2 = 49k2 nên n2 = 7k2 (3). Từ (3) ta lại có n2  7 và vì 7 là số nguyên tố nên n  7. m và n cùng chia hết cho 7 nên phân số  không tối giản, trái giả thiết. Vậy  không phải là số hữu tỉ; do đó  là số vô tỉ.

**2.** Khai triển vế trái và đặt nhân tử chung, ta đ­ợc vế phải. Từ a) ⇒ b) vì (ad bc)2 0.

**3.** *Cách 1* : Từ x + y = 2 ta có y = 2 - x. Do đó : S = x2 + (2 - x)2 = 2(x - 1)2 + 2 2.

Vậy min S = 2 ⇔ x = y = 1.

*Cách 2* : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với a = x, c = 1, b = y, d = 1, Ta có :(x + y)2 (x2 + y2)(1 + 1) ⇔ 4.2(x2 + y2) = 2S ⇔ S.2 ⇒ mim S = 2 khi x = y = 1

**4.** b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp số d­ơng , ta lần l­ợt có: ; cộng từng vế ta đ­ợc bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

c) Với các số d­ương 3a và 5b , theo bất đẳng thức Cauchy ta có : ⇔ (3a + 5b)2  4.15P (vì P = a.b) ⇔ 122  60P

⇔ P   ⇒ max P = .

Dấu bằng xảy ra khi 3a = 5b = 12 : 2 ⇔ a = 2 ; b = 6/5.

**5.** Ta có b = 1 - a, do đó M = a3 + (1 - a)3 = -(3a2 + 3a) . Dấu = xảy ra khi a = .

Vậy min M = ⇔ a = b = .

**6.** Đặt a = 1 + x ⇒ b3 = 2 - a3 = 2 - (1 + x)3 = 1 - 3x - 3x2 -x3 = -(1 + 3x + 3x2 +x3 = -(1 + x)3.

Suy ra : b 1 x. Ta lại có a = 1 + x, nên : a + b 1 + x + 1 x = 2.

Với a = 1, b = 1 thì a3 + b3 = 2 và a + b = 2. Vậy max N = 2 khi a = b = 1.

**7.** Hiệu của vế trái và vế phải bằng (a b)2(a + b).

**8.** Vì | a + b | 0 , | a b | 0 , nên : | a + b | > | a b | ⇔ a2 + 2ab + b2 a2 2ab + b2 ⇔ 4ab > 0 ⇔ ab > 0. Vậy a và b là hai số cùng dấu.

**9.** **a)** Xét hiệu : (a + 1)2 4a = a2 + 2a + 1 4a = a2 2a + 1 = (a 1)2 0.

**b)** Ta có : (a + 1)2 4a ; (b + 1)2 4b ; (c + 1)2 4c và các bất đẳng thức này có hai vế đều d­ơng, nên : [(a + 1)(b + 1)(c + 1)]2 64abc = 64.1 = 82. Vậy (a + 1)(b + 1)(c + 1) 8.

**10. a)** Ta có : (a + b)2 + (a b)2 = 2(a2 + b2). Do (a b)2 0, nên (a + b) 2 2(a2 + b2).

**b)** Xét : (a + b + c)2 + (a b)2 + (a c)2 + (b c)2. Khai triển và rút gọn, ta đ­ợc :

3(a2 + b2 + c2). Vậy : (a + b + c)2 3(a2 + b2 + c2).

**11. a)** 

**b)** x2 4x 5 ⇔ (x 2)2 33 ⇔ | x 2 | 3 ⇔ -3 x 2 3 ⇔ -1 x 5.

**c)** 2x(2x 1) 2x 1 ⇔ (2x 1)2 0. Nh­ng (2x 1)2 0, nên chỉ có thể : 2x 1 = 0

Vậy : x = .

**12.** Viết đẳng thức đã cho d­ưới dạng : a2 + b2 + c2 + d2 ab ac ad = 0 (1). Nhân hai vế của (1) với 4 rồi đ­a về dạng : a2 + (a 2b)2 + (a 2c)2 + (a 2d)2 = 0 (2). Do đó ta có :

a = a 2b = a 2c = a 2d = 0 . Suy ra : a = b = c = d = 0.

**13.** 2M = (a + b 2)2 + (a 1)2 + (b 1)2 + 2.1998 2.1998 ⇒ M 1998.

Dấu = xảy ra khi có đồng thời :  Vậy min M =1998⇔a = b= 1.

**14.** Giải t­ương tự bài 13.

**15.** Đ­a đẳng thức đã cho về dạng : (x 1)2 + 4(y 1)2 + (x 3)2 + 1 = 0.

**16.** .

**17. a)** . Vậy  < 7

**b)** .

**c)** .

**d)** Giả sử .

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, nên : .

**18.** Các số đó có thể là 1,42 và 

**19.**Viết lại ph­ương trình dư­ới dạng :

.

Vế trái của ph­ương trình không nhỏ hơn 6, còn vế phải không lớn hơn 6. Vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi cả hai vế đều bằng 6, suy ra x = -1.

**20.** Bất đẳng thức Cauchy  viết lại dư­ới dạng  (\*) (a, b 0).

Áp dụng bất dẳng thức Cauchy d­ưới dạng (\*) với hai số d­ương 2x và xy

Ta được :



Dấu = xảy ra khi : 2x = xy = 4 : 2 tức là khi x = 1, y = 2. ⇒ max A = 2 ⇔ x = 2, y = 2.

**21.** Bất đẳng thức Cauchy viết lại dư­ới dạng : .

 Áp dụng ta có S > .

**22.** Chứng minh như­ bài 1.

**23.** **a)** . Vậy 

**b)** Ta có : .

Theo câu a :

1. Từ câu b suy ra : . Vì  (câu a).
2. Do đó :.

**24. a)**  Giả sử  = m (m : số hữu tỉ) ⇒  = m2 1 ⇒  là số hữu tỉ (vô lí)

**b)** Giả sử m +  = a (a : số hữu tỉ) ⇒  = a m ⇒  = n(a m) ⇒  là số hữu tỉ, vô lí.

**25.** Có, chẳng hạn 

**26.** Đặt . Dễ dàng chứng minh  nên a2 4, do đó

| a | 2 (1). Bất đẳng thức phải chứng minh t­ương đ­ương với : a2 2 + 4 3a

⇔ a2 3a + 2 0 ⇔ (a 1)(a 2) 0 (2)

Từ (1) suy ra a 2 hoặc a -2. Nếu a 2 thì (2) đúng. Nếu a -2 thì (2) cũng đúng. Bài toán đ­ợc chứng minh.

**27.** Bất đẳng thức phải chứng minh t­ương đ­ương với :

.

Cần chứng minh tử không âm, tức là : x3z2(x y) + y3x2(y z) + z3y2(z x) 0. (1)

Biểu thức không đổi khi hoán vị vòng x 🡪 y 🡪 z 🡪 x nên có thể giả sử x là số lớn nhất. Xét hai trường hợp :

**a)** x y z > 0. Tách z x ở (1) thành (x y + y z), (1) t­ương đ­ương với :

x3z2(x y) + y3x2(y z) z3y2(x y) z3y2(y z) 0

⇔ z2(x y)(x3 y2z) + y2(y z)(yx2 z3) 0

Dễ thấy x y 0 , x3 y2z 0 , y z 0 , yx2 z3 0 nên bất đẳng thức trên đúng.

**b)** x z y > 0. Tách x y ở (1) thành x z + z y , (1) t­ơng đ­ơng với :

x3z2(x z) + x3z2(z y) y3x2(z y) z3y2(x z) 0

⇔ z2(x z)(x3 zy2) + x2(xz2 y3)(z y) 0

Dễ thấy bất đẳng thức trên dúng.

Cách khác : Biến đổi bất đẳng thức phải chứng minh tư­ơng đư­ơng với :

.

**28.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng của số hữu tỉ a với số vô tỉ b là số hữu tỉ c. Ta có : b = c a. Ta thấy, hiệu của hai số hữu tỉ c và a là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy c phải là số vô tỉ.

**29. a)** Ta có : (a + b)2 + (a b)2 = 2(a2 + b2) ⇒ (a + b)2 2(a2 + b2).

**b)** Xét : (a + b + c)2 + (a b)2 + (a c)2 + (b c)2. Khai triển và rút gọn ta đ­ợc :

3(a2 + b2 + c2). Vậy : (a + b + c)2 3(a2 + b2 + c2)

**c)** Tư­ơng tự nh­ câu b

**30.** Giả sử a + b > 2 ⇒ (a + b)3 > 8 ⇔ a3 + b3 + 3ab(a + b) > 8 ⇔ 2 + 3ab(a + b) > 8

⇒ ab(a + b) > 2 ⇒ ab(a + b) > a3 + b3. Chia hai vế cho số dư­ơng a + b : ab > a2 ab + b2

⇒ (a b)2 < 0, vô lí. Vậy a + b 2.

**31.** *Cách 1*: Ta có :  x ;  y nên  +  x + y. Suy ra  +  là số nguyên không v­ợt quá x + y (1). Theo định nghĩa phần nguyên,  là số nguyên lớn nhất không v­ợt quá x + y (2). Từ (1) và (2) suy ra :  +  .

*Cách 2* : Theo định nghĩa phần nguyên : 0 x -  < 1 ; 0 y -  < 1.

Suy ra : 0 (x + y) ( + ) < 2. Xét hai trư­ờng hợp :

* Nếu 0 (x + y) ( + ) < 1 thì  =  +  (1)
* Nếu 1 (x + y) ( + ) < 2 thì 0 (x + y) ( +  + 1) < 1 nên
 =  +  + 1 (2). Trong cả hai tr­ường hợp ta đều có :  +  + 

**32.** Ta có x2 6x + 17 = (x 3)2 + 8 8 nên tử và mẫu của A là các số d­ương , suy ra A > 0 do đó : A lớn nhất ⇔  nhỏ nhất ⇔ x2 6x + 17 nhỏ nhất.

Vậy max A =  ⇔ x = 3.

**33.** Không đư­ợc dùng phép hoán vị vòng quanh x 🡪 y 🡪 z 🡪 x và giả sử x y z.

*Cách 1* : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số d­ương x, y, z :



Do đó 

*Cách 2* : Ta có : . Ta đã có  (do x, y > 0) nên để chứng minh  ta cần chứng minh:(1)

(1) ⇔ xy + z2 yz xz (nhân hai vế với số d­ơng xz)

⇔ xy + z2 yz xz 0 ⇔ y(x z) z(x z) 0 ⇔ (x z)(y z) 0 (2)

(2) đúng với giả thiết rằng z là số nhỏ nhất trong 3 số x, y, z, do đó (1) đúng. Từ đó tìm đ­ợc giá trị nhỏ nhất của .

**34.** Ta có x + y = 4 ⇒ x2 + 2xy + y2 = 16. Ta lại có (x y)2 0 ⇒ x2 2xy + y2 0. Từ đó suy ra 2(x2 + y2) 16 ⇒ x2 + y2 8. min A = 8 khi chỉ khi x = y = 2.

**35.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :

1 = x + y + z 3. (1)

2 = (x + y) + (y + z) + (z + x) 3. (2)

Nhân từng vế của (1) với (2) (do hai vế đều không âm) : 2 9.

⇒ A = max A =  khi và chỉ khi x = y = z = .

**36.** a) Có thể. b, c) Không thể.

**37.** Hiệu của vế trái và vế phải bằng (a b)2(a + b).

**38.** Áp dụng bất đẳng thức  với x, y > 0 :

 (1)

T­ơng tự  (2)

 Cộng (1) với (2) = 4B

Cần chứng minh B , bất đẳng thức này tư­ơng đ­ương với :

2B 1 ⇔ 2(a2 + b2 + c2 + d2 + ad + bc + ab + cd) (a + b + c + d)2

⇔ a2 + b2 + c2 + d2 2ac 2bd 0 ⇔ (a c)2 + (b d)2 0 : đúng.

**39.** - Nếu 0 x -  < thì 0 2x - 2 < 1 nên  = 2.

- Nếu x -  < 1 thì 1 2x - 2 < 2 ⇒ 0 2x (2 + 1) < 1 ⇒  = 2 + 1

**40.** Ta sẽ chứng minh tồn tại các số tự nhiên m, p sao cho :

 a + 15p < 

Tức là 96  < 97 (1). Gọi a + 15 là số có k chữ số : 10k 1 a + 15 < 10k

⇒  (2). Đặt . Theo (2)

 Ta có x1 < 1 và  < 1.

Cho n nhận lần l­ợt các giá trị 2, 3, 4, …, các giá trị của xn tăng dần, mỗi lần tăng không quá 1 đơn vị, khi đó  sẽ trải qua các giá trị 1, 2, 3, Đến một lúc nào đó ta có  = 96. Khi đó 96 xp < 97 tức là 96  < 97. Bất đẳng thức (1) đ­ợc chứng minh.

**42. a)** Do hai vế của bất đẳng thức không âm nên ta có :

 | A + B | = | A | + | B | ⇔ | A + B |2 = ( | A | + | B | )2

⇔ A2 + B2 + 2AB = A2 + B2 + 2| AB | ⇔ AB = | AB | (bất đẳng thức đúng). Dấu = xảy ra khi AB = 0.

**b)** Ta có : M = | x + 2 | + | x 3 | = | x + 2 | + | 3 x | | x + 2 + 3 x | = 5.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi (x + 2)(3 x) 0 ⇔ -2 x 3 (lập bảng xét dấu)

Vậy min M = 5 ⇔ -2 x 3.

**c)** Ph­ơng trình đã cho ⇔ | 2x + 5 | + | x 4 | = | x + 9 | = | 2x + 5 + 4 x |

 ⇔ (2x + 5)(4 x) 0 ⇔ -5/2 x 4

**43.** Điều kiện tồn tại của ph­ơng trình : x2 4x 5 0 ⇔ 

Đặt ẩn phụ , ta đ­ợc : 2y2 3y 2 = 0 ⇔ (y 2)(2y + 1) = 0.

**45.** Vô nghiệm

**46.** Điều kiện tồn tại của  là x 0. Do đó : A =  + x 0 ⇒ min A = 0 ⇔ x = 0.

**47.** Điều kiện : x 3. Đặt  = y 0, ta có : y2 = 3 x ⇒ x = 3 y2.

 B = 3 y2 + y = - (y )2 +   . max B =  ⇔ y = ⇔ x =  .

**48. a)** Xét a2 và b2. Từ đó suy ra a = b.

**b)** . Vậy hai số này bằng nhau.

**c)** Ta có : .

Mà .

**49.** A = 1 - | 1 3x | + | 3x 1 |2  = ( | 3x 1| - )2 + .

Từ đó suy ra : min A = ⇔ x = hoặc x = 1/6

**51.** M = 4

**52.** x = 1 ; y = 2 ; z = -3.

**53.** P = | 5x 2 | + | 3 5x | | 5x 2 + 3 5x | = 1. min P = 1 ⇔ .

**54.** Cần nhớ cách giải một số phư­ơng trình dạng sau :

 **.**

**a)** Đ­a phư­ơng trình về dạng : .

**b)** Đ­a phư­ơng trình về dạng : .

**c)** Ph­ương trình có dạng : .

**d)** Đ­a ph­ương trình về dạng : .

**e)** Đ­a ph­ương trình về dạng : | A | + | B | = 0

**g, h, i)** Phư­ơng trình vô nghiệm.

**k)** Đặt  = y 0, đ­a ph­ương trình về dạng : | y 2 | + | y 3 | = 1 . Xét dấu vế trái.

**l)** Đặt : .

Ta đ­ợc hệ : . Từ đó suy ra : u = z tức là : .

**55.** *Cách 1* : Xét .

*Cách 2* : Biến đổi t­ương đ­ương 

⇔ (x2 + y2)2 -8(x- y)2  0⇔ (x2 + y2)2 - 8(x2 + y2 ) 0 ⇔

(x2 + y2)2 - 8(x2 + y2) + 16  0 ⇔ (x2 + y2+ 4)2  0.

*Cách 3* : Sử dụng bất đẳng thức Cauchy :

 (x > y).

Dấu đẳng thức xảy ra khi  hoặc 

**62.**  =

= . Suy ra điều phải chứng minh.

**63.** Điều kiện : .

Bình ph­ương hai vế : x2 16x + 60 < x2 12x + 36 ⇔ x > 6.

Nghiệm của bất ph­ương trình đã cho : x 10.

**64.** Điều kiện x2 3. Chuyển vế :  x2 3 (1)

Đặt thừa chung : .(1 - ) 0 ⇔ 

Vậy nghiệm của bất phư­ơng trình : x =  ; x 2 ; x -2.

**65.** Ta có x2(x2 + 2y2 3) + (y2 2)2 = 1 ⇔ (x2 + y2)2 4(x2 + y2) + 3 = - x2 0.

Do đó : A2 4A + 3 0 ⇔ (A 1)(A 3) 0 ⇔ 1 A 3.

min A = 1 ⇔ x = 0, khi đó y = 1. max A = 3 ⇔ x = 0, khi đó y = .

**66. a)** x 1.

**b)** B có nghĩa ⇔.

**67. a)** A có nghĩa ⇔ 

**b)** A =  với điều kiện trên.

**c)** A < 2 ⇔  < 1 ⇔ x2 2x < 1 ⇔ (x 1)2 < 2 ⇔ - < x 1 < ⇒ kq

**68.** Đặt  = a. Ta sẽ chứng minh 20 chữ số thập phân đầu tiên của  là các chữ số 9. Muốn vậy chỉ cần chứng minh a <  < 1. Thật vậy ta có : 0 < a < 1 ⇒ a(a 1) < 0 ⇒ a2 a < 0 ⇒ a2 < a. Từ a2 < a < 1 suy ra a <  < 1.

Vậy .

**69. a)** Tìm giá trị lớn nhất. Áp dụng | a + b | | a | + | b |.

A | x | +  + | y | + 1 = 6 +  ⇒ max A = 6 +  (khi chẳng hạn x = - 2, y = - 3)

**b)** Tìm giá trị nhỏ nhất. Áp dụng | a b | | a | - | b .

A | x | -  | y | - 1 = 4 -  ⇒ min A = 4 -  (khi chẳng hạn x = 2, y = 3)

**70.** Ta có : x4 + y4 2x2y2 ; y4 + z4 2y2z2 ; z4 + x4 2z2x2. Suy ra :

x4 + y4 + z4 x2y2 + y2z2 + z2x2 (1)

Mặt khác, dễ dàng chứng minh đ­ợc : Nếu a + b + c = 1 thì a2 + b2 + c2 .

Do đó từ giả thiết suy ra : x2y2 + y2z2 + z2x2  (2).

Từ (1) , (2) : min A =  ⇔ x = y = z = 

**71.**  Làm nh­ bài 8c ( 2). Thay vì so sánh  ta so sánh  và . Ta có : .

**72.** *Cách 1* : Viết các biểu thức d­ới dấu căn thành bình phư­ơng của một tổng hoặc một hiệu.

*Cách 2* : Tính A2 rồi suy ra A.

**73.** Áp dụng : (a + b)(a b) = a2 b2.

**74.** Ta chứng minh bằng phản chứng.

**a)** Giả sử tồn tại số hữu tỉ **r** mà  = r ⇒ 3 + 2 + 5 = r2 ⇒ . Vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ, vô lí. Vậy  là số vô tỉ.

**b), c)** Giải t­ương tự.

**75.** **a)** Giả sử a > b rồi biến đổi t­ương đ­ương : 

⇔ . Vậy a > b là đúng.

**b)** Bình ph­ương hai vế lên rồi so sánh.

**76.** *Cách 1* : Đặt A = , rõ ràng A > 0 và A2 = 2 ⇒ A = 

*Cách 2* : Đặt B =  ⇒ B =0.

**77**.

**78.** Viết . Vậy P = .

**79.** Từ giả thiết ta có : . Bình ph­ương hai vế của đẳng thức này ta đ­ợc : . Từ đó : x2 + y2 = 1.

**80.** Xét A2 để suy ra : 2 A2 4. Vậy : min A =  ⇔ x = 1 ; max A = 2 ⇔ x = 0.

**81.** Ta có : .

.

**82.** Xét tổng của hai số :  =

= .

**83.**  =

= .

**84.** Từ  ⇒ .

Vậy x = y = z.

**85.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 1 và ai ( i = 1, 2, 3, n ).

**86.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số a + b 0 và 2 0, ta có :

.

Dấu = xảy ra khi a = b.

**87.** Giả sử a b c > 0. Ta có b + c > a nên b + c + 2 > a hay 

Do đó : . Vậy ba đoạn thẳng  lập đư­ợc thành một tam giác.

**88. a)** Điều kiện : ab 0 ; b 0. Xét hai tr­ường hợp :

\* Tr­ờng hợp 1 : a 0 ; b > 0 : .

\* Tr­ờng hợp 2 : a 0 ; b < 0 : .

**b)** Điều kiện : . Với các điều kiện đó thì :

.

* Nếu 0 < x < 2 thì | x 2 | = -(x 2) và B = - .
* Nếu x > 2 thì | x 2 | = x 2 và B = 

**89.** Ta có : . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

. Vậy . Đẳng thức xảy ra khi :

.

**93.** Nhân 2 vế của pt với , ta đ­ược : ⇔ x5/2

**94.** Ta chứng minh bằng qui nạp toán học :

a) Với n = 1 ta có :  (\*) đúng.

b) Giả sử :  (1)

c) Ta chứng minh rằng (\*) đúng khi n = k + 1 , tức là :

 (2)

Với mọi số nguyên dư­ơng k ta có :  (3)

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức (1) và (3) ta đ­ợc bất đẳng thức (2). Vậy ∀ n ∈ **Z+**

 Ta có 

**95.** Biến đổi t­ơng đ­ơng : 

 (đúng).

**96.** Điều kiện : 

Xét trên hai khoảng 1 < x < 2 và x > 2. Kết quả : 

**105.** *Cách 1* : Tính A. *Cách 2* : Tính A2

*Cách 3* : Đặt  = y 0, ta có : 2x 1 = y2.



Với y 1 (tức là x 1), .

Với 0 y < 1 (tức là  x < 1), .

**108.** Nếu 2 x 4 thì A = 2. Nếu x 4 thì A = 2.

**109.** Biến đổi : . Bình ph­ương hai vế rồi rút gọn, ta đ­ợc :

. Lại bình ph­ương hai vế rồi rút gọn : (2 y)(x 2) = 0.

Đáp : x = 2 , y 0 , x 0 , y = 2.

**110.** Biến đổi tư­ơng đ­ương :

(1) ⇔ a2 + b2 + c2 + d2 + 2 a2 + c2 + 2ac + b2 + d2 + 2bd

⇔  ac + bd (2)

\* Nếu ac + bd < 0, (2) đ­ược chứng minh.

\* Nếu ac + bd 0, (2) t­ơng đ­ơng với :

(a2 + b2)(c2 + d2) a2c2 + b2d2 + 2abcd ⇔ a2c2 + a2d2 + b2c2 + b2d2 a2c2 + b2d2 + 2abcd

⇔ (ad bc)2 0 (3). Bất đẳng thức (3) đúng, vậy bất đẳng thức (1) đ­ợc chứng minh.

**111.** *Cách 1* : Theo bất đẳng thức Cauchy :

.

T­ơng tự : .

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức : 

*Cách 2* : Theo BĐT Bunhiacôpxki : (a2 + b2 + c2)(x2 + y2 + z2) (ax + by + cz)2. Ta có :

 ≥

 .

**112. a)** Ta nhìn tổng a + 1 d­ưới dạng một tích 1.(a + 1) và áp dụng bđt Cauchy : 



T­ơng tự : 

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức : .

Dấu = xảy ra ⇔ a + 1 = b + 1 = c + 1 ⇔ a = b = c = 0, trái với giả thiết a + b + c = 1.

Vậy : .

**b)** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki với hai bộ ba số :

 ⇒  3(a + b + b + c + c + a) = 6⇒

**113.** Xét tứ giác ABCD có AC ⊥ BD, O là giao điểm hai đ­ờng chéo.

OA = a ; OC = b ; OB = c ; OD = d với a, b, c, d > 0. Ta có :



AC = a + b ; BD = c + d. Cần chứng minh : AB.BC + AD.CD AC.BD.

Thật vậy ta có : AB.BC 2SABC ; AD.CD 2SADC. Suy ra :

Suy ra : AB.BC + AD.CD 2SABCD = AC.BD.

Vậy : .

Chú ý : Giải bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

(m2 + n2)(x2 + y2) (mx + ny)2 với m = a , n = c , x = c , y = b ta có :

(a2 + c2)(c2 + b2) (ac + cb)2 ⇒  ac + cb (1)

T­ơng tự :  ad + bd (2) . Cộng (1) và (2) suy ra đpcm.

**114.** *Lời giải sai* : .

Phân tích sai lầm : Sau khi chứng minh f(x) -  , chi­a chỉ ra tr­ường hợp xảy ra f(x) = - 

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi . Vô lí.

*Lời giải đúng* : Để tồn tại  phải có x 0. Do đó A = x +  0. min A = 0 ⇔ x = 0.

**115.** Ta có .

Theo bất đẳng thức Cauchy :  nên A 2 + a + b = .min A =  khi và chi khi .

**116.** Ta xét biểu thức phụ : A2 = (2x + 3y)2. Nhớ lại bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

(am + bn)2 (a2 + b2)(m2 + n2) (1)

Nếu áp dụng (1) với a = 2, b = 3, m = x, n = y ta có :

A2 = (2x + 3y)2 (22 + 32)(x2 + y2) = 13(x2 + y2).

Vói cách trên ta không chỉ ra đ­ợc hằng số mà A2 . Bây giờ, ta viết A2 d­ới dạng :

A2 =  rồi áp dụng (1) ta có :



Do A2 25 nên -5 A 5. min A = -5 ⇔ 

max A = 5 ⇔ 

**117.** Điều kiện x 2. Đặt  = y 0, ta có : y2 = 2 x.



**118.** Điều kiện x 1 ; x 1/5 ; x 2/3 ⇔ x 1.

Chuyển vế, rồi bình ph­ương hai vế : x 1 = 5x 1 + 3x 2 +  (3)

Rút gọn : 2 7x = . Cần có thêm điều kiện x 2/7.

Bình ph­ơng hai vế : 4 28x + 49x2 = 4(15x2 13x + 2) ⇔ 11x2 24x + 4 = 0

(11x 2)(x 2) = 0 ⇔ x1 = 2/11 ; x2 = 2.

Cả hai nghiệm đều không thỏa mãn điều kiện. Vậy phư­ơng trình đã cho vô nghiệm.

**119.** Điều kiện x 1. Ph­ương trình biến đổi thành :



\* Nếu x > 2 thì : , không thuộc khoảng đang xét.

\* Nếu 1 x 2 thì : . Vô số nghiệm 1 x 2

Kết luận : 1 x 2.

**120.** Điều kiện : x2 + 7x + 7 0. Đặt  = y 0 ⇒ x2 + 7x + 7 = y2.

Ph­ơng trình đã cho trở thành : 3y2 3 + 2y = 2 ⇔ 3y2 + 2y 5 = 0 ⇔ (y 1)(3y + 5) = 0

⇔ y = - 5/3 (loại) ; y = 1. Với y = 1 ta có  = 1 ⇒ x2 + 7x + 6 = 0 ⇔

⇔ (x + 1)(x + 6) = 0. Các giá trị x = - 1, x = - 6 thỏa mãn x2 + 7x + 7 0 là nghiệm của (1).

**121.** Vế trái : .

Vế phải : 4 2x x2 = 5 (x + 1)2 5. Vậy hai vế đều bằng 5, khi đó x = - 1. Với giá trị này cả hai bất đẳng thức này đều trở thành đẳng thức. Kết luận : x = - 1

**122. a)** Giả sử  = a (a : hữu tỉ) ⇒ 5 - 2 = a2 ⇒ . Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ. Vô lí. Vậy  là số vô tỉ.

**b)** Giải t­ơng tự câu a.

**123.** Đặt  = a,  = b, ta có a2 + b = 2. Sẽ chứng minh a + b 2. Cộng từng vế bất đẳng thức : .

**124.** Đặt các đoạn thẳng BH = a, HC = c trên một đ­ờng thẳng.

Kẻ HA ⊥ BC với AH = b. Dễ thấy AB.AC 2SABC = BC.AH.

**125.** Bình phư­ơng hai vế rồi rút gọn, ta đ­ợc bất đẳng thức tư­ơng

đư­ơng : (ad bc)2 0. *Chú ý* : Cũng có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

**126.** Giả sử a b c > 0. Theo đề bài : b + c > a. Suy ra : b + c + 2 > a ⇒

⇒ 

Vậy ba đoạn thẳng có độ dài  lập đ­ược thành một tam giác.

**127.** Ta có a, b 0. Theo bất đẳng thức Cauchy :



Cần chứng minh :  . Xét hiệu hai vế :

 -  =  = = 0

Xảy ra dấu đẳng thức : a = b =  hoặc a = b = 0.

**128.** Theo bất đẳng thức Cauchy : .

Do đó : . T­ương tự : 

Cộng từng vế : .

Xảy ra dấu đẳng thức : , trái với giả thiết a, b, c > 0.

Vậy dấu đẳng thức không xảy ra.

**129.** *Cách 1* : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Ta có :

.

Đặt x2 + y2 = m, ta đ­ợc : 12 m(2 - m) ⇒ (m 1)2 0 ⇒ m = 1 (đpcm).

*Cách 2* : Từ giả thiết : . Bình ph­ương hai vế :

x2(1 y2) = 1 2y + y2(1 x2) ⇒ x2 = 1 2y + y2

0 = (y - )2 ⇒ y =  ⇒ x2 + y2 = 1 .

**130.** Áp dụng | A | + | B | | A + B | . min A = 2 ⇔ 1 x 2 .

**131.** Xét A2 = 2 + 2. Do 0  1 ⇒ 2 2 + 2 4

⇒ 2 A2 4. min A =  với x = 1 , max A = 2 với x = 0.

**132.** Áp dụng bất đẳng thức :  (bài 23)



.

**133.** Tập xác định :  (1)

Xét hiệu : (- x2 + 4x + 12)(- x2 + 2x + 3) = 2x + 9. Do (1) nên 2x + 9 > 0 nên A > 0.

Xét : . Hiển nhiên A2  0 như­ng dấu = không xảy ra (vì A > 0). Ta biến đổi A2 d­ới dạng khác :

A2 = (x + 2)(6 x) + (x + 1)(3 x) - 2 =

= (x + 1)(6 x) + (6 x) + (x + 2)(3 x) (3 x) - 2

= (x + 1)(6 x) + (x + 2)(3 x) - 2 + 3

= .

A2 3. Do A > 0 nên min A =  với x = 0.

**134. a)** Điều kiện : x2 5.

\* Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

A2 = (2x + 1.)2 (22 + 11)(x2 + 5 x2) = 25 ⇒ A2 25.

.

Với x = 2 thì A = 5. Vậy max A = 5 với x = 2.

\* Tìm giá trị nhỏ nhất : Chú ý rằng tuy từ A2 25, ta có 5 x 5, nh­ưng không xảy ra

A2 = - 5. Do tập xác định của A, ta có x2 5 ⇒ -  x . Do đó : 2x - 2 và

 0. Suy ra :

A = 2x +  - 2. Min A = - 2 với x = -

**b)** Xét biểu thức phụ | A | và áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacôpxki và Cauchy :



. Do đó : - 1000 < A < 1000.

min A = - 1000 với x = - 10 ; max A = 1000 với x = 10.

**135.** *Cách 1* : A = x + y = 1.(x + y) = .

Theo bất đẳng thức Cauchy với 2 số d­ơng : .

Do đó .

 với 

*Cách 2* : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

.

Từ đó tìm đ­ợc giá trị nhỏ nhất của A.

**136.** A = (x + y)(x + z) = x2 + xz + xy + yz = x(x + y + z) + yz 

min A = 2 khi chẳng hạn y = z = 1 , x =  - 1.

**137.**  Theo bất đẳng thức Cauchy : .

T­ơng tự : . Suy ra 2A 2(x + y + z) = 2.

min A = 1 với x = y = z = .

**138.** Theo bài tập 24 : . Theo bất đẳng thức Cauchy :

.

min A =  .

**139. a)** .



**b)** Ta có : 

T­ơng tự : 

Suy ra : B 6(a2 + b2 + c2 + d2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) = 6(a + b + c + d)2 6



**140.** . min A = 18 với x = y = 2.

**141.** Không mất tính tổng quát, giả sử a + b c + d. Từ giả thiết suy ra :

.



Đặt a + b = x ; c + d = y với x y > 0, ta có :



 ; chẳng hạn khi



**142. a)** . Đáp số : x = 3.

**b)** Bình ph­ơng hai vế, đ­a về : (x2 + 8)(x2 8x + 8) = 0. Đáp số : x = 4 + 2.

**c)** Đáp số : x = 20.

**d)** . Vế phải lớn hơn vế trái. Vô nghiệm.

**e)** Chuyển vế : . Bình phư­ơng hai vế. Đáp số : x = 1.

**g)** Bình phư­ơng hai vế. Đáp số :  x 1

**h)** Đặt  = y. Đ­a về dạng  = 1. Chú ý đến bất đẳng thức :

. Tìm đ­ợc 2 y 3. Đáp số : 6 x 11.

**i)** Chuyển vế :, rồi bình ph­ương hai vế. Đáp : x = 0 (chú ý loại x = ‌)

**k)** Đáp số :  .

**l)** Điều kiện : x 1 hoặc x = - 1. Bình phư­ơng hai vế rồi rút gọn :

.

Bình ph­ương hai vế : 8(x + 1)2(x + 3)(x 1) = (x + 1)2(x 1)2 ⇔ (x + 1)2(x 1)(7x + 25) = 0;  loại. Nghiệm là : x = 1.

**m)** Vế trái lớn hơn x, vế phải không lớn hơn x. Phư­ơng trình vô nghiệm.

**n)** Điều kiện : x - 1. Bình ph­ương hai vế, xuất hiện điều kiện x - 1. Nghiệm là : x = - 1.

**o)** Do x 1 nên vế trái lớn hơn hoặc bằng 2, vế phải nhỏ hơn hoặc bằng 2. Suy ra hai vế bằng 2, khi đó x = 1, thỏa mãn ph­ương trình.

**p)** Đặt  (1). Ta có :

. Suy ra y z = 1.

Từ đó  (2). Từ (1) và (2) tính đ­ợc x. Đáp số : x = 2 (chú ý loại x = - 1).

**q)** Đặt 2x2 9x + 4 = a 0 ; 2x 1 b 0. Ph­ương trình là : . Bình ph­ương hai vế rồi rút gọn ta đ­ợc : b = 0 hoặc b = a. Đáp số : 

**144.** Ta có : .

Vậy :  =

 =  (đpcm).

**150.** Đ­a các biểu thức d­ới dấu căn về dạng các bình phư­ơng đúng. M = -2

**151.** Trục căn thức ở mẫu từng hạng tử. Kết quả : A =  - 1.

**152.** Ta có : .

P không phải là số hữu tỉ (chứng minh bằng phản chứng).

**153.** Ta hãy chứng minh : 

**154.** .

**155.** Ta có a + 1 = . Biến đổi đa thức trong ngoặc thành tổng các lũy thừa cơ số a + 1

A = [(a + 1)5 3(a + 1)4 15(a + 1)3 + 52(a + 1)2 14(a + 1)]2000

= (259 - 225 - 34 - 1)2000 = 1.

**156.** Biến đổi : .

**157.** .

Dấu = không xảy ra vì không thể có đồng thời : .

**168.** Tr­ớc hết ta chứng minh :  (\*) (a + b 0)

Áp dụng (\*) ta có : 



**\*** Có thể tính S2 rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

**180.** Ta phải có | A | . Dễ thấy A > 0. Ta xét biểu thức : . Ta có :

.

. Khi đó  ⇔

⇔ . Khi đó min A = 

**181.** Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta xét biểu thức : . Khi đó :



Giải (1) : 2x2 = (1 x)2 ⇔ | x | = | 1 x |. Do 0 < x < 1 nên x = 1 x ⇔

* x = .

Nh­ vậy min B = 2 ⇔ x =  - 1.

Bây giờ ta xét hiệu : 

Do đó min A = 2 + 3 khi và chỉ khi x =  - 1.

**182. a)** Điều kiện : x 1 , y 2. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm giảm một tổng :

. Ở đây ta muốn làm tăng một tổng. Ta dùng bất đẳng thức : 





Cách khác : Xét A2 rồi dùng bất đẳng thức Cauchy.

**b)** Điều kiện : x 1 , y 2. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm trội một tích : 

Ta xem các biểu thức  là các tích : 

Theo bất đẳng thức Cauchy : 





**183.** . Ta thấy 

Nên a < b.

**184. a)** min A = 5 - 2 với x = 0. max A =  với x = .

**b)** min B = 0 với x = 1 . max B =  với x = 1

**185.** Xét 1 x 0 thì A 0. Xét 0 x 1 thì .



**186.** A = | x y | 0, do đó A lớn nhất khi và chi khi A2 lớn nhất. Theo bđt Bunhiacôpxki :

**** hoặc 

**187. a)** *Tìm giá trị lớn nhất* : Từ giả thiết :





**b)** *Tìm giá trị nhỏ nhất* : (x + y)2 2(x2 + y2) = 2 ⇒ x + y . Do đó :

. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

= (x2 + y2) = 1



**188.** Đặt , ta có a, b 0, a + b = 1.

A = a3 + b3 = (a + b)(a2 ab + b2) = a2 ab + b2 = (a + b)2 3ab = 1 3ab.

Do ab 0 nên A 1. max A = 1 ⇔ a = 0 hoặc b = 0 ⇔ x = 0 hoặc x = 1, y = 0.

Ta có 

**189.** Điều kiện : 1 x 0 , 2 x 0 nên x 1. Ta có :



⇔ .

**190.** Ta có : 6 + 4x + 2x2 = 2(x2 + 2x + 1) + 4 = 2(x + 1)2 + 4 > 0 với mọi x. Vậy ph­ơng trình xác định với mọi giá trị của x. Đặt  = y 0, ph­ơng trình có dạng :

y2 - y - 12 = 0 ⇔ (y - 3)(y + 2) = 0 ⇔ 

Do đó  = 3 ⇔ x2 + 2x + 3 = 18 ⇔ (x 3)(x + 5) = 0 ⇔ x = 3 ; x = -5 .

**191.** Ta có : 

= . Do đó : .

Vậy : 

=  (đpcm).

**192.**  Dùng bất đẳng thức Cauchy  (a, b > 0 ; a 0).

**193.** Đặt x y = a ,  +  = b (1) thì a, b ∈ **Q** .

a) Nếu b = 0 thì x = y = 0, do đó  ,  ∈ **Q** .

b) Nếu b 0 thì **Q** (2).

Từ (1) và (2) : .

**199.** Nhận xét : . Do đó :



Do a 0 nên : . Suy ra :  , ∀x.

Vì vậy : (1) ⇔ 

.

**207. c)** Trư­ớc hết tính x theo a đ­ợc . Sau đó tính  đ­ược .

Đáp số : B = 1.

**d)** Ta có a2 + 1 = a2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c). T­ơng tự :

b2 + 1 = (b + a)(b + c) ; c2 + 1 = (c + a)(c + b). Đáp số : M = 0.

**208.** Gọi vế trái là A > 0. Ta có . Suy ra điều phải chứng minh.

**209.** Ta có : a + b = - 1 , ab = -  nên : a2 + b2 = (a + b)2 2ab = 1 + .

a4 + b4 = (a2 + b2)2 2a2b2 =  ; a3 + b3 = (a + b)3 3ab(a + b) = - 1 - 

Do đó : a7 + b7 = (a3 + b3)(a4 + b4) a3b3(a + b) = .

**210. a)** .

.

**b)** *Theo khai triển Newton* : (1 - )n = A - B ; (1 + )n = A + B với A, B ∈ N

Suy ra : A2 2B2 = (A + B)(A - B) = [(1 + )(1 - )]n = (- 1)n.

Nếu n chẵn thì A2 2b2 = 1 (1). Nếu n lẻ thì A2 2B2 = - 1 (2).

**Bây giờ ta xét an**. Có hai trư­ờng hợp :

**\*** *Nếu n chẵn thì* : an = ( - 1)n = (1 - )n = A - B = . Điều kiện

A2 2B2 = 1 đ­ợc thỏa mãn do (1).

**\*** *Nếu n lẻ thì* : an = ( - 1)n = - (1 - )n = B - A = . Điều kiện

2B2 A2 = 1 đ­ợc thỏa mãn do (2).

**211.** Thay a =  vào ph­ương trình đã cho : 2 + 2a + b + c = 0

⇔ (b + 2) = -(2a + c).

Do a, b, c hữu tỉ nên phải có b + 2 = 0 do đó 2a + c = 0. Thay b = - 2 , c = - 2a vào ph­ương trình đã cho :

x3 + ax2 2x 2a = 0 ⇔ x(x2 2) + a(x2 2) = 0 ⇔ (x2 2)(x + a) = 0.

Các nghiệm phư­ơng trình đã cho là:  và - a.

**212.** Đặt  .

**a)** *Chứng minh * : **Làm giảm mỗi số hạng của A** **:**

 .

Do đó 

.

**b)** *Chứng minh*  : **Làm trội mỗi số hạng của A :**



Do đó : .

**213.** Kí hiệu  có n dấu căn. Ta có :

****Hiển nhiên a100 >  > 2. Nh­ vậy 2 < a100 < 3, do đó [ a100 ] = 2.

**214. a)** *Cách 1* (tính trực tiếp) : a2 = (2 + )2 = 7 + 4.

Ta có  nên 6 < 4 < 7 ⇒ 13 < a2 < 14. Vậy [ a2 ] = 13.

*Cách 2* (tính gián tiếp) : Đặt x = (2 + )2 thì x = 7 + 4 .

Xét biểu thức y = (2 - )2 thì y = 7 - 4. Suy ra x + y = 14.

Dễ thấy 0 < 2 -  < 1 nên 0 < (2- )2 < 1, tức là 0 < y < 1. Do đó 13 < x < 14.

Vậy [ x ] = 13 tức là [ a2 ] = 13.

**b)** Đáp số : [ a3 ] = 51.

**215.** Đặt x y = a ;  (1) thì a và b là số hữu tỉ. Xét hai tr­ường hợp :

**a)** Nếu b 0 thì  là số hữu tỉ (2). Từ (1) và (2) Ta có : là số hữu tỉ ;  là số hữu tỉ.

**b)** Nếu b = 0 thì x = y = 0, hiển nhiên  là số hữu tỉ.

**216.** Ta có 

. Từ đó ta giải đ­ợc bài toán.

**217.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử a1 < a2 < . < a25. Suy ra : a1 1 , a2 2 , …

a25 25. Thế thì :  (1). Ta lại có :



 (2)

Từ (1) và (2) suy ra : , trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số a1 , a2 , , a25.

**218.** Điều kiện : 0 x 4. Đặt .

Ta có : ab = , a2 + b2 = 4. Ph­ương trình là : 

⇒ a2 - a2b + b2 + ab2 = (2 - b + a - ab)

⇒ (a2 + b2 2 + ab) ab(a b) = 2(a b)

⇒ (2 + ab) = (a b)(2 + ab) (chú ý : a2 + b2 = 4)

⇒ a b =  (do ab + 2 0)

Bình ph­ơng : a2 + b2 2ab = 2 ⇒ 2ab = 2 ⇒ ab = 1 ⇒  = 1. Tìm đ­ợc x = 3 .

**219.** Điều kiện : 0 < x 1 , a 0. Bình ph­ương hai vế rồi thu gọn : .

Với a 1, bình ph­ương hai vế, cuối cùng đ­ợc : x = .

Điều kiện x 1 thỏa mãn (theo bất đẳng thức Cauchy).

Kết luận : Nghiệm là x = . Với a 1.

**220.** Nếu x = 0 thì y = 0, z = 0. Tư­ơng tự đối với y và z. Nếu xyz 0, hiển nhiên x, y, z > 0

Từ hệ ph­ương trình đã cho ta có : .

T­ơng tự  . Suy ra x = y = z. Xảy ra dấu = ở các bất đẳng thức trên với x = y = z = 1. Kết luận : Hai nghiệm (0 ; 0 ; 0) , (1 ; 1 ; 1).

**221. a)** Đặt A = (8 + 3)7. Để chứng minh bài toán, chỉ cần tìm số B sao cho 0 < B <  và A + B là số tự nhiên.

Chọn B = (8 - 3)7. Dễ thấy B > 0 vì 8 > 3. Ta có 8 + 3 > 10 suy ra :



Theo khai triển Newton ta lại có : A = (8 + 3)7 = a + b với a, b ∈ N.

B = (8 - 3)7 = a - b. Suy ra A + B = 2a là số tự nhiên.

Do  và A + B là số tự nhiên nên A có bảy chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

*Chú ý* : 10- 7 = 0,0000001.

**b)** Giải t­ơng tự nh­ câu a.

**222.** Ta thấy với n là số chính phư­ơng thì  là số tự nhiên, nếu n khác số chính ph­ơng thì  là số vô tỉ, nên  không có dạng  . Do đó ứng với mỗi số n ∈ N\* có duy nhất một số nguyên an gần  nhất.

Ta thấy rằng, với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, thì an bằng 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, Ta sẽ chứng minh rằng an lần l­ợt nhận các giá trị : hai số 1, bốn số 2, sáu số 3 Nói cách khác ta sẽ chứng minh bất phư­ơng trình :

 có hai nghiệm tự nhiên.

 có bốn nghiệm tự nhiên.

 có sáu nghiệm tự nhiên.

Tổng quát :  có 2k nghiệm tự nhiên. Thật vậy, bất đẳng thức t­ơng đ­ơng với : k2 k +  < x < k2 + k + . Rõ ràng bất ph­ơng trình này có 2k nghiệm tự nhiên là : k2 k + 1 ; k2 k + 2 ; ; k2 + k. Do đó :

.

**223.** Giải t­ơng tự bài 24.

**a)** 1 < an < 2. Vậy [ an ] = 1. **b)** 2 an 3. Vậy [ an ] = 2.

**c)** Ta thấy : 442 = 1936 < 1996 < 2025 = 452, còn 462 = 2116.

a1 =  = 44 < a1 < 45.

Hãy chứng tỏ với n 2 thì 45 < an < 46.

Nh­ vậy với n = 1 thì [ an ] = 44, với n 2 thì [ an ] = 45.

**224.** Cần tìm số tự nhiên B sao cho B A < B + 1. Làm giảm và làm trội A để đ­ợc hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có : (4n + 1)2 < 16n2 + 8n + 3 < (4n + 2)2 ⇒ 4n + 1 <  < 4n + 2

⇒ 4n2 + 4n + 1 < 4n2 +  < 4n2 + 4n + 2 < 4n2 + 8n + 4

⇒ (2n + 1)2 < 4n2 +  < (2n + 2)2.

Lấy căn bậc hai : 2n + 1 < A < 2n + 2. Vậy [ A ] = 2n + 1.

**225.** Để chứng minh bài toán, ta chỉ ra số y thỏa mãn hai điều kiện : 0 < y < 0,1 **(1)**.

x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2 **(2)**.

Ta chọn y = . Ta có 0 <  < 0,3 nên 0 < y < 0,1. Điều kiện (1) đ­ợc chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Ta có :

.

Xét biểu thức tổng quát Sn = an + bn với a = 5 + 2 , b = 5 - 2.

Sn = (5 + 2)n = (5 - 2)n

A và b có tổng bằng 10, tích bằng 1 nên chúng là nghiệm của phư­ơng trình X2 -10X + 1 = 0, tức là : a2 = 10a 1 **(3)** ; b2 = 10b 1 **(4)**.

Nhân (3) với an , nhân (4) với bn : an+2 = 10an+1 an ; bn+2 = 10bn+1 bn.

Suy ra (an+2 + bn+2) = 10(an+1 + bn+1) (an + bn),

tức là Sn+2 = 10Sn+1 Sn , hay Sn+2 - Sn+1 (mod 10)

Do đó Sn+4  - Sn+2  Sn (mod 10) **(5)**

Ta có S0 = (5 + 2)0 + (5 - 2)0 = 1 + 1 = 2 ; S1 = (5 + 2) + (5 - 2) = 10.

Từ công thức (5) ta có S2 , S3 , , Sn là số tự nhiên, và S0 , S4 , S8 , , S100 có tận cùng bằng 2, tức là tổng x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Điều kiện (2) đ­ược chứng minh. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

**226.** Biến đổi .

 Phần nguyên của nó có chữ số tận cùng bằng 9.

(Giải t­ương tự bài 36)

**227.**  Ta có :



Theo cách chia nhóm nh­ trên, nhóm 1 có 3 số, nhóm 2 có 5 số, nhóm 3 có 7 số, nhóm 4 có 9 số. Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70

**228. a)** Xét 0 x 3. Viết A d­ới dạng : A = 4.. .(3 x). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm , , (3 x) ta đ­ợc : ..(3 x) .

Do đó A 4 (1)

**b)** Xét x > 3, khi đó A 0 (2). So sánh (1) và (2) ta đi đến kết luận :

.

**229. a)** Lập ph­ơng hai vế, áp dụng hằng đẳng thức (a + b)3 = a3 + b3 + 3ab(a + b), ta đ­ợc :

 ⇔ x = - 1 ; x = 7 (thỏa)

**b)** Điều kiện : x - 1 (1). Đặt . Khi đó x 2 = y2 ; x + 1 = z2

nên z2 y3 = 3. Ph­ương trình đã cho đư­ợc đ­a về hệ :



Rút z từ (2) : z = 3 y. Thay vào (3) : y3 y2 + 6y 6 = 0 ⇔ (y 1)(y2 + 6) = 0 ⇔ y = 1

Suy ra z = 2, thỏa mãn (4). Từ đó x = 3, thỏa mãn (1). Kết luận : x = 3.

**230. a)** Có, chẳng hạn : .

**b)** Không. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ d­ơng a, b mà . Bình ph­ơng hai vế :

.

Bình ph­ơng 2 vế : 4ab = 2 + (a + b)2 2(a + b) ⇒ 2(a + b)  = 2 + (a + b)2 4ab

Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ (vì a + b 0), mâu thuẩn.

**231. a)** Giả sử  là số hữu tỉ  (phân số tối giản). Suy ra 5 = . Hãy chứng minh rằng cả m lẫn n đều chia hết cho 5, trái giả thiết  là phân số tối giản.

**b)** Giả sử  là số hữu tỉ  (phân số tối giản). Suy ra :

Thay m = 2k (k ∈ Z) vào (1) : 8k3 = 6n3 + 12kn2 ⇒ 4k3 = 3n3 + 6kn2. Suy ra 3n3 chia hết cho 2 ⇒ n3 chia hết cho 2 ⇒ n chia hết cho 2. Nh­ vậy m và n cùng chia hết cho 2, trái với giả thiết  là phân số tối giản.

**232.** *Cách 1* : Đặt a = x3 , b = y3 , c = z3. Bất đẳng thức cần chứng minh  t­ơng đ­ơng với x3 + y3 + z3 3xyz 0. Ta có hằng đẳng thức :

x3 + y3 + z3 3xyz = (x + y + z)[(x y)2 + (y z)2 + (z x)2]. (bài tập sbt)

Do a, b, c 0 nên x, y, z 0, do đó x3 + y3 + z3 3xyz 0. Nh­ vậy : 

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi a = b = c.

*Cách 2* : Tr­ớc hết ta chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho bốn số không âm. Ta có :



Trong bất đẳng thức , đặt  ta đ­ợc :

.

Chia hai vế cho số d­ương  (tr­ường hợp một trong các số a, b, c bằng 0, bài toán đư­ợc chứng minh) : .

Xảy ra đẳng thức : a = b = c =  ⇔ a = b = c = 1

**233.** Từ giả thiết suy ra : . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số d­ương : . T­ơng tự :



Nhân từ bốn bất đẳng thức : .

**234.** Gọi . Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

 (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm :  (2)

Nhân từng vế (1) với (2) : 

**235.** Đặt  thì x3 + y3 = 6 (1). Xét hiệu b3 a3 , ta đ­ợc :

b3 a3 = 24 (x + y)3 = 24 (x3 + y3) 3xy(x + y)

Do (1), ta thay 24 bởi 4(x3 + b3), ta có :

b3 a3 = 4(x3 + y3) (x3 + y3) 3xy(x + y) = 3(x3 + y3) 3xy(x + y) =

= 3(x + y)(x2 xy + y2 xy) = 3(x + y)(x y)2 > 0 (vì x > y > 0).

Vậy b3 > a3 , do đó b > a.

**236. a)** Bất đẳng thức đúng với n = 1. Với n 2, theo khai triển Newton, ta có :



< 

Dễ dàng chứng minh : 

= 

Do đó 

**b)** Với n = 2, ta chứng minh  (1). Thật vậy, (1) ⇔ ⇔ 32 > 22.

Với n 3, ta chứng minh  (2). Thật vậy :

 (3)

Theo câu a ta có  , mà 3 n nên (3) đ­ợc chứng minh.

 Do đó (2) đ­ợc chứng minh.

**237.** Cách 1 : . min A = 2 với x = 0.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :



min A = 2 với x = 0.

**238.** Với x < 2 thì A 0 (1). Với 2 x 4, xét - A = x2(x 2). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :



- A 32 ⇒ A - 32. min A = - 32 với x = 4.

**239.** Điều kiện : x2 9.



max A =  với x = .

**240. a)** Tìm giá trị lớn nhất :

*Cách 1* : Với 0 x <  thì A = x(x2 6) 0.

Với x . Ta có  x 3 ⇒ 6 x2 9 ⇒ 0 x2 6 3.

Suy ra x(x2 6) 9. max A = 9 với x = 3.

*Cách 2* : A = x(x2 9) + 3x. Ta có x 0, x2 9 0, 3x 9, nên A 9.

max A = 9 với x = 3

**b)** Tìm giá trị nhỏ nhất :

*Cách 1* : A = x3 6x = x3 + (2)3 6x (2)3 =

= (x + 2)(x2 - 2x + 8) 6x - 16

= (x + 2)(x2 - 2x + 2) + (x + 2).6 6x - 16

= (x + 2)(x - )2 - 4 - 4.

min A = - 4 với x = .

*Cách 2* : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm :

x3 + 2 + 2 3. = 6x.

Suy ra x3 6x - 4. min A = - 4 với x = .

**241.** Gọi x là cạnh của hình vuông nhỏ, V là thể tích của hình hộp.

Cần tìm giá trị lớn nhất của V = x(3 2x)2.

Theo bất đẳng thức Cauchy với ba số d­ơng :

4V = 4x(3 2x)(3 2x)  = 8

max V = 2 ⇔ 4x = 3 2x ⇔ x = 

Thể tích lớn nhất của hình hộp là 2 dm3 khi cạnh hình vuông nhỏ bằng  dm.

**242. a)** Đáp số : 24 ; - 11. **b)** Đặt . Đáp số : 1 ; 2 ; 10.

**c)** Lập ph­ơng hai vế. Đáp số : 0 ; 

**d)** Đặt  = y. Giải hệ : x3 + 1 = 2y , y3 + 1 = 2x, đ­ợc (x y)(x2 + xy + y2 + 2) = 0

⇔ x = y. Đáp số : 1 ; .

**e)** Rút gọn vế trái đ­ợc : . Đáp số : x = 4.

**g)** Đặt . Ta có : a3 + b3 = 2, a3 b3 = 12 2x, do đó vế phải của ph­ương trình đã cho là . Ph­ương trình đã cho trở thành :  = .

Do a3 + b3 = 2 nên  ⇒ (a b)(a3 + b3) = (a + b)(a3 b3)

Do a + b 0 nên : (a b)(a2 ab + b2 = (a b)(a2 + ab + b2).

Từ a = b ta đ­ợc x = 6. Từ ab = 0 ta đ­ợc x = 7 ; x = 5.

**h)** Đặt . Ta có : a2 + b2 + ab = 1 (1) ; a3 b3 = 2 (2).

Từ (1) và (2) : a b = 2. Thay b = a 2 vào (1) ta đ­ợc a = 1. Đáp số : x = 0.

**i)** *Cách 1* : x = - 2 nghiệm đúng ph­ương trình. Với x + 2 0, chia hai vế cho .

Đặt . Giải hệ a3 + b3 = 2, a + b = - 1. Hệ này vô nghiệm.

*Cách 2* : Đặt  = y. Chuyển vế : . Lập phư­ơng hai vế ta đ­ược :

y3 1 + y3 + 1 + 3..(- y) = - y3 ⇔ y3 = y. .

Với y = 0, có nghiệm x = - 2. Với y 0, có y2 = . Lập ph­ơng : y6 = y6 1. Vô nghiệm.

*Cách 3* : Ta thấy x = - 2 nghiệm đúng ph­ương trình. Với x < - 2, x > - 2, ph­ơng trình vô nghiệm, xem bảng dư­ới đây :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  | Vế trái |
| x < - 2x > - x | < - 1> - 1 | < 0> 0 | < 1> 1 | < 0> 0 |

**k)** Đặt 1 + x = a , 1 x = b. Ta có : a + b = 2 (1),  = 3 (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy , ta có :



.

Phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là : a = b = 1. Do đó x = 0.

**l)** Đặt  thì m4 + n4 = a + b 2x.

Ph­ương trình đã cho trở thành : m + n = . Nâng lên lũy thừa bậc bốn hai vế rồi thu gọn : 2mn(2m2 + 3mn + 2n2) = 0.

Suy ra m = 0 hoặc n = 0, còn nếu m, n > 0 thì 2m2 + 3mn + 2n2 > 0.

Do đó x = a , x = b. Ta phải có x a , x b để các căn thức có nghĩa.

Giả sử a b thì nghiệm của ph­ương trình đã cho là x = a.

**243.** Điều kiện để biểu thức có nghĩa : a2 + b2 0 (a và b không đồng thời bằng 0).

Đặt , ta có :  =

.

Vậy :  (với a2 + b2 0).

**244.** Do A là tổng của hai biểu thức dư­ơng nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

= . Đẳng thức xảy ra khi : .

Ta có A 2, đẳng thức xảy ra khi x = 0. Vậy : min A = 2 ⇔ x = 0.

1. Vì 1 +  là nghiệm của ph­ương trình 3x3 + ax2 + bx + 12 = 0, nên
2. Ta có :3(1 + )3 + a(1 + )2 + b(1 + ) + 12 = 0.

Sau khi thực hiện các phép biến đổi, ta đ­ợc biểu thức thu gọn :

(4a + b + 42) + (2a + b + 18)  = 0.

Vì a, b ∈ **Z** nên p = 4a + b + 42 ∈ **Z** và q = 2a + b + 18 ∈ **Z**. Ta phải tìm các số nguyên a, b

 sao cho p + q = 0.

Nếu q 0 thì  = - , vô lí. Do đó q = 0 và từ p + q = 0 ta suy ra p = 0.

Vậy 1 +  là một nghiệm của phư­ơng trình 3x3 + ax2 + bx + 12 = 0 khi và chỉ khi :

 . Suy ra a = - 12 ; b = 6.

**246.** Giả sử  là số hữu tỉ  ( là phân số tối giản ). Suy ra : 3 = . Hãy chứng minh cả p và q cùng chia hết cho 3, trái với giả thiết  là phân số tối giản.

**247. a)** Ta có : .

Do đó : .

**b)** .

**248.** Áp dụng hằng đẳng thức (a + b)3 = a3 + b3 + 3ab(a + b), ta có :

⇔ a3 6a 40 = 0 ⇔ (a 4)(a2 + 4a + 10) = 0. Vì a2 + 4a + 10 > 0 ⇒ a = 4.

**249.** Giải t­ơng tự bài 21.

**250.** A = 2 + .

**251.** Áp dụng : (a + b)3 = a3 + b3 + 3ab(a + b).

Từ x =  . Suy ra x3 = 12 + 3.3x ⇔ x3 9x 12 = 0.

**252.** Sử dụng hằng đẳng thức (A B)3 = A3 B3 3AB(A B). Tính x3. Kết quả M = 0

**253. a)** x1 = - 2 ; x2 = 25.

**b)** Đặt , ta đ­ược :  ⇔ u = v = - 2 ⇒ x = 1.

**c)** Đặt : . Kết quả x = 7.

**254.** Đ­a biểu thức về dạng : . Áp dụng | A | + | B | = | A + B | min A = 2 ⇔ -1 x 0.

**255.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai lần.

**256.** Đặt 

**258.** Ta có :  = | x a | + | x b | | x a + b x | = b a (a < b).

Dấu đẳng thức xảy ra khi (x a)(x b) 0 ⇔ a x b. Vậy min P = b a ⇔ a x b.

**259.** Vì a + b > c ; b + c > a ; c + a > b. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số d­ương



Các vế của 3 bất dẳng thức trên đều d­ương. Nhân 3 bất đẳng thức này theo từng vế ta đ­ợc bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

a + b c = b + c a = c + a b ⇔ a = b = c (tam giác đều).

**260.** .

**261.** 2A = (a b)2 + (b c)2 + (c a)2.

Ta có : c a = - (a c) = - [(a b) + (b c)] = - ( + 1 +  - 1) = - 2.

Do đó : 2A = (+ 1)2 + ( - 1)2 + (-2)2 = 14. Suy ra A = 7.

**262.** Đ­a pt về dạng : .

**263.** Nếu 1 x 2 thì y = 2.

**264.** Đặt : .

**265.** Gọi các kích th­ước của hình chữ nhật là x, y. Với mọi x, y ta có : x2 + y2 2xy. Nh­ng x2 + y2 = (8)2 = 128, nên xy 64. Do đó : max xy = 64 ⇔ x = y = 8.

**266.** Với mọi a, b ta luôn có : a2 + b2  2ab. Nh­ưng a2 + b2 = c2 (định lí Pytago) nên : c2 2ab ⇔ 2c2  a2 +b2 + 2ab ⇔ 2c2  (a + b)2 ⇔ c a + b ⇔ c .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

**267.** Biến đổi ta đ­ược : 

**268.** 2 x - 1 ; 1 x 2.

**---------------Hết---------------**