# VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

## A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

**1. Định nghĩa và các phép toán**

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: 

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: 

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD. A′B′C′D′, ta có: 

+ **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: ; 

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:



+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý. Ta có:



+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** và

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (k ≠ 1), O tuỳ ý. Ta có:



**2. Sự đồng phẳng của ba vectơ**

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ , trong đó và không cùng phương. Khi đó: đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: 

• Cho ba vectơ  không đồng phẳng,  tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: 

**3. Tích vô hướng của hai vectơ**

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**



• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho . Khi đó: 

+ Với . Qui ước: 

+ 

**4. Các dạng toán thường gặp:**

**a) Chứng minh đẳng thức vec tơ.**

**b) Chứng minh ba vec tơ đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng, phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng.**

+ Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

- Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Nếu có m, n ∈ R:  thì đồng phẳng

+ Để phân tích một vectơ  theo ba vectơ  không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho: 

**c) Tính tích vô hướng cuả hai véc tơ trong không gian**

**d) Tính độ dài của đoạn thẳng, véctơ.**

+ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở . Vì vậy để tính độ dài của đoạn  ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng  so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.

- Phân tích 

- Khi đó 



**e) Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.**

Sử dụng các kết quả

*•*  là bốn điểm đồng phẳng 

*•*  là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm  bất kì ta có  trong đó .

## B – BÀI TẬP

**Câu 1:** Cho hình lăng trụ ,  là trung điểm của . Đặt , , . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta phân tích như sau:



.

**Câu 2:** Trong không gian cho điểm  và bốn điểm , , ,  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để , , ,  tạo thành hình bình hành là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Trước hết, điều kiện cần và đủ để  là hình bình hành là:

.

Với mọi điểm  bất kì khác , , , , ta có:



.

**Câu 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Đặt ; ; ; . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**



Gọi  là tâm của hình bình hành . Ta phân tích như sau:

 (do tính chất của đường trung tuyến)

.

**Câu 4:** Cho tứ diện *.* Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và *.* Đặt , , . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**



Ta phân tích:

 (tính chất đường trung tuyến)



.

**Câu 5:** Cho hình hộp  có tâm . Gọi  là tâm hình bình hành ***.*** Đặt ,, , . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**



Ta phân tích:

.

.

.

.

**Câu 6:** Cho hình hộp . Gọi  và  lần lượt là tâm của hình bình hành  và . Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** .

**B.** Bốn điểm , , ,  đồng phẳng.

**C.** .

**D.** Ba vectơ ; ;  không đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

**A đúng** do tính chất đường trung bình trong  và tính chất của hình bình hành .

**B đúng** do  nên bốn điểm , , ,  đồng phẳng.

**C đúng** do việc ta phân tích:



.

**D sai** do giá của ba vectơ ; ;  đều song song hoặc trùng với mặt phẳng . Do đó, theo định nghĩa sự đồng phẳng của các vectơ, ba vectơ trên đồng phẳng.

**Câu 7:** Cho tứ diện . Người ta định nghĩa “ là trọng tâm tứ diện  khi ”. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.**  là trung điểm của đoạn  (,  lần lượt là trung điểm  và ).

**B.**  là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của  và .

**C.**  là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của  và .

**D.** Chưa thể xác định được.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta gọi  và  lần lượt là trung điểm  và .

Từ giả thiết, ta biến đổi như sau:

 là trung điểm đoạn .

Bằng việc chứng minh tương tự, ta có thể chứng minh được phương án B và C đều là các phương án đúng, do đó **phương án D sai**.

**Câu 8:** Cho tứ diện  có  là trọng tâm tam giác . Đặt ; ; . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Gọi  là trung điểm .



Ta phân tích:



.

**Câu 9:** Cho hình hộp  có tâm . Đặt ; .  là điểm xác định bởi . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  là tâm hình bình hành . **B.**  là tâm hình bình hành .

**C.**  là trung điểm . **D.**  là trung điểm .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**



Ta phân tích:

.

 là trung điểm của .

**Câu 10:** Cho ba vectơ  không đồng phẳng. Xét các vectơ. Chọn khẳng định đúng?

**A.** Haivectơ  cùng phương. **B.** Haivectơ  cùng phương.

**C.** Haivectơ  cùng phương. **D.** Ba vectơ  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

Chọn **B.**

+ Nhận thấy:  nên haivectơ  cùng phương.

**Câu 11:** Trong mặt phẳng cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** Nếu  là hình bình hành thì .

**B.** Nếu  là hình thang thì 

**C.** Nếu  thì  là hình bình hành.

**D.** Nếu  thì  là hình thang.

***Hướng dẫn giải:***

Chọn **B.**

**Câu 12:** Cho hình hộp . Chọn khẳng định đúng?

**A.**  đồng phẳng. **B.**  đồng phẳng.

**C.**  đồng phẳng. **D.**  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

D

A1

B1

C1

D1

C

B

A

Chọn **C.**

 lần lượt là trung điểm của .

Ta có  đồng phẳng.

**Câu 13:** Cho ba vectơ  không đồng phẳng. Xét các vectơ . Chọn khẳng định đúng?

**A.** Ba vectơ  đồng phẳng. **B.** Haivectơ  cùng phương.

**C.** Haivectơ  cùng phương. **D.** Bavectơ  đôi một cùng phương.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có:  nên ba vectơ  đồng phẳng.

**Câu 14:** Cho hình hộp . Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A. .**  **B. .**  **C. .**  **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

D

A1

B1

C1

D1

C

B

A

**Chọn B.**

+ Ta có: . Nên .

**Câu 15:** Cho hình hộp  có tâm . Gọi  là tâm hình bình hành . Đặt ,, , . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

J

K

O

D

A’

B’

C’

D’

C

B

A

**Chọn A.**

+ Gọi  lần lượt là trung điểm của .

+Ta có: 

**Câu 16:** Cho hình lăng trụ tam giác . Đặt trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

A

B

C

B1

A1

C1

+ Dễ thấy: .

**Câu 17:** Cho hình hộp. Gọi  là tâm hình bình hành  và  là tâm hình bình hành. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  đồng phẳng. **B.**  đồng phẳng.

**C.**  đồng phẳng. **D. **đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

I

K

D

E

F

G

H

C

B

A

+  đồng phẳng.

+ Các bộ véctơ ở câu  không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng.

**Câu 18:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

**A.** Nếu giá của ba vectơ  cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.

**B.** Nếu trong ba vectơ  có một vectơ  thì ba vectơ đó đồng phẳng.

**C.** Nếu giá của ba vectơ  cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.

**D.** Nếu trong ba vectơ  có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

+ Nắm vững khái niệm ba véctơ đồng phẳng.

**Câu 19:** Cho hình hộp . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

O

D

A1

B1

C1

D1

C

B

A

**Chọn A.**

+ Gọi  là tâm của hình hộp .

+ Vận dụng công thức trung điểm để kiểm tra.

**Câu 20:** Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

**A.** Tứ giác  là hình bình hành nếu .

**B.** Tứ giác  là hình bình hành nếu .

**C.** Cho hình chóp . Nếu có  thì tứ giác  là hình bình hành.

**D.** Tứ giác  là hình bình hành nếu.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**



 là hình bình hành

**Câu 21:** Cho hình lập phương có cạnh bằng . Ta có  bằng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

  (Vì )

**Câu 22:** Trong không gian cho điểm  và bốn điểm không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để  tạo thành hình bình hành là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

 

**Câu 23:** Cho hình hộp ****. Gọi  và  lần lượt là tâm của hình bình hành  và . Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** Bốn điểm , , ,  đồng phẳng **B. **

**C.** Ba vectơ  không đồng phẳng. **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.** Đúng vì  cùng thuộc 

**B.** Đúng vì 

**C.** Sai vì 

 ba véctơ đồng phẳng.

**D.** Đúng vì theo câu C 

**Câu 24:** Cho tứ diện . Trên các cạnh  và  lần lượt lấy sao cho , . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

**A.** Các vectơ  đồng phẳng. **B.** Các vectơ  đồng phẳng.

**C.** Các vectơ  đồng phẳng. **D.** Các vectơ  đồng phẳng.

**Chọn A.**

**A.** Sai vì ****

** **  không đồng phẳng.

**B.** Đúng vì ****

****: đồng phẳng.

**C.** Đúng. Bằng cách biểu diễn  tương tự như trên ta có 

**D.** Đúng. Biểu diễn giống đáp án A ta có .

**Câu 25:** Cho tứ diện  có các cạnh đều bằng . Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.**  **B.** .

**C.**  **D.**  hay .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Vì  là tứ diện đều nên các tam giác  là các tam giác đều.

**A.** Đúng vì .

**B.** Đúng vì 

**C.** Sai vì 

**D.** Đúng vì 

**Câu 26:** Cho tứ diện . Đặt  gọi  là trọng tâm của tam giác. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Gọi  là trung điểm .





**Câu 27:** Cho hình hộp . Gọi  là trung điểm . Chọn đẳng thức đúng.

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

**A.** Sai vì 



**B.** Đúng vì 



**C.** Sai. theo câu B suy ra

**D.** Đúng vì .

**Câu 28:** Cho tứ diện  và điểm  thỏa mãn  ( là trọng tâm của tứ diện). Gọi  là giao điểm của  và mp . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Theo đề:  là giao điểm của  và mp  là trọng tâm tam giác .



Ta có: 



**Câu 29:** Cho tứ diện . Gọi lần lượt là trung điểm của . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

**A.** Các vectơ  đồng phẳng. **B.** Các vectơ  không đồng phẳng.

**C.** Các vectơ  đồng phẳng. **D.** Các vectơ  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.** Đúng vì 

**B.** Đúng vì từ  ta dựng véctơ bằng véctơ  thì  không nằm trong mặt phẳng .

**C.** Sai. Tương tự đáp án B thì  không nằm trong mặt phẳng .

**D.** Đúng vì 

**Câu 30:** Cho tứ diện. Người ta định nghĩa “ là trọng tâm tứ diện  khi ”. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

**A.**  là trung điểm của đoạn  ( lần lượt là trung điểm  và )

**B.**  là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của  và 

**C.**  là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của  và 

**D.** Chưa thể xác định được.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có:

 là trung điểm  nên đáp án A đúng

Tương tự cho đáp án B và C cũng đúng.

**Câu 31:** Cho hình lập phương . Gọi  là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Theo quy tắc hình hộp: 

Mà  nên .

**Câu 32:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

**A.** Từ  ta suy ra 

**B.** Nếu  thì  là trung điểm đoạn.

**C.** Vì  nên bốn điểm  đồng phẳng

**D.** Từ  ta suy ra .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có: 

Suy ra:  hay bốn điểm  đồng phẳng.

**Câu 33:** Cho tứ diện. Gọi  lần lượt là trung điểm của  và  là trung điểm của. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

 lần lượt là trung điểm của  theo quy tắc trung điểm :



Suy ra:  hay .

**Câu 34:** Cho hình lập phương  có cạnh bằng . Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có :

 (vô lí)

**Câu 35:** Cho hình hộp  với tâm . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

**A. ** **B. **

**C. **  **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

**Ta có : (**vô lí)

**Câu 36:** Cho ba vectơ  không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

**A.** Các vectơ  đồng phẳng.

**B.** Các vectơ  đồng phẳng.

**C.** Các vectơ  đồng phẳng.

**D.** Các vectơ  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Các vectơ  đồng phẳng

Mà : 

 (hệ vô nghiệm)

Vậy không tồn tại hai số 

**Câu 37:** Cho hình chóp  có đáy là hình bình hành tâm  Gọi  là điểm thỏa mãn: . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A. ** không thẳng hàng. **B.** 

**C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**





**Câu 38:** Cho lăng trụ tam giác  có . Hãy phân tích (biểu thị) vectơ  qua các vectơ .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có: .

**Câu 39:** Cho hình tứ diện  có trọng tâm . Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

**A. ** **B. **

**C. ** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

 là trọng tâm tứ diện 

**.**

**Câu 40:** Cho tứ diện . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A.**  **B.**  **C. **  **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

 (quy tắc trung điểm) 

Mà  (vì  là trung điểm ) .

**Câu 41:** Cho ba vectơ . Điều kiện nào sau đây khẳng định  đồng phẳng?

**A.** Tồn tại ba số thực  thỏa mãn  và .

**B.** Tồn tại ba số thực  thỏa mãn  và .

**C.** Tồn tại ba số thực  sao cho .

**D.** Giá của  đồng qui.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Theo giả thuyết   tồn tại ít nhất một số khác .

Giả sử . Từ .

 đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba véctơ).

**Câu 42:** Cho lăng trụ tam giác  có . Hãy phân tích (biểu thị) vectơ  qua các vectơ .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

 (qt hình bình hành)

**Câu 43:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **đúng**?

**A.** Nếu  thì  là trung điểm của đoạn .

**B.** Từ  ta suy ra 

**C.** Vì  nên bốn điểm  cùng thuộc một mặt phẳng.

**D.** Từ  ta suy ra 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.**  Sai vì   là trung điểm .



**B.** Sai vì  .



**C.** Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

**D.** Sai vì  (nhân 2 vế cho ).

**Câu 44:** Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.** Ba véctơ  đồng phẳng nếu có hai trong ba véctơ đó cùng phương.

**B.** Ba véctơ  đồng phẳng nếu có một trong ba véctơ đó bằng véctơ .

**C.** véctơ  luôn luôn đồng phẳng với hai véctơ  và .

**D.** Cho hình hộp  ba véctơ  đồng phẳng

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.** Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

**B.** Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

**C.** Sai

**D.** Đúng vì  3 vectơ đồng phẳng.

**Câu 45:** Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương  có cạnh . Ta có  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**



**Câu 46:** Cho hình chóp . Gọi  là giao điểm của  và . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** Nếu  thì  là hình thang.

**B.** Nếu  là hình bình hành thì .

**C.** Nếu  là hình thang thì .

**D.** Nếu  thì  là hình bình hành.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.** Đúng vì  .

Vì  và  thẳng hàng nên đặt 

.

Mà  không cùng phương nên  và  

**B.** Đúng. Hs tự biến đổi bằng cách chêm điểm  vào vế trái.

**C.** Sai. Vì nếu  là hình thang cân có 2 đáy là  thì sẽ sai.

**D.** Đúng. Tương tự đáp án A với  là trung điểm 2 đường chéo.

**Câu 47:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

**A.** Từ hệ thức  ta suy ra ba véctơ  đồng phẳng.

**B.** Vì  nên  là trung điểm của đoạn 

**C.** Vì  là trung điểm của đoạn  nên từ một điẻm  bất kì ta có 

**D.** Vì  nên bốn điểm  cùng thuộc một mặt phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

A Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

**B.** Đúng

**C.** Đúng vì 

Mà  (vì  là trung điểm ) .

**D.** Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

**Câu 48:** Cho hình hộp  có tâm . Đặt ;. là điểm xác định bởi . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A. **là trung điểm  **B. ** là tâm hình bình hành 

**C. ** là tâm hình bình hành  **D. **là trung điểm 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

**A.**  là trung điểm   (quy tắc trung điểm).

 (quy tắc hình hộp).

**Câu 49:** Cho hai điểm phân biệt  và một điểm  bất kỳ không thuộc đường thẳng . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** Điểm **** thuộc đường thẳng  khi và chỉ khi .

**B.** Điểm **** thuộc đường thẳng  khi và chỉ khi .

**C.** Điểm **** thuộc đường thẳng  khi và chỉ khi .

**D.** Điểm **** thuộc đường thẳng  khi và chỉ khi .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

**A.** Sai vì  ( là trung điểm )   thẳng hàng.

**B.** Sai vì  và   thẳng hàng: vô lý

**C.**   thẳng hàng.

**D.** Sai vì  thẳng hàng: vô lý.

**Câu 50:** Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và  của tứ diện . Gọi  là trung điểm đoạn  và  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: .

**A. .** **B. **. **C. **. **D. .**

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn C.**

Ta có , 

nên . Vậy 

**Câu 51:** Cho hình hộp . Chọn đẳng thức **sai?**

**A. **. **B. **.

**C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có :  nên D sai.

Do và  nên . A đúng

Do  nên

 nên B đúng.

Do  nên C đúng.

**Câu 52:** Cho tứ diện. Gọi  là trung điểm của  và . Chọn khẳng định đúng?

**A. **. **B. .**

**C. . D. **.

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn B.**

Ta có :  và 

nên . Vậy 

**Câu 53:** Cho hình hộp .  là điểm trên  sao cho. Lấy  trên đoạn  sao cho . Với giá trị nào của  thì.

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn A.**



**Câu 54:** Cho hình hộp . Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn C.**

Ta có  nên 

**Câu 55:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Vì  là trung điểm đoạn  nên từ  bất kì ta có: .

**B.** Vì  nên bốn điểm  đồng phẳng.

**C.** Vì  nên  là trung điểm đoạn.

**D.** Từ hệ thức  ta suy ra ba vectơ  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn B.**

Do  đúng với mọi điểm  nên câu B sai.

**Câu 56:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Ba véctơ  đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá thuộc một mặt phẳng

**B.** Ba tia  vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

**C.** Cho hai véctơ không cùng phương  và . Khi đó ba véctơ  đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số  sao cho , ngoài ra cặp số  là duy nhất.

**D.** Nếu có  và một trong ba số  khác  thì ba véctơ  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn A.**

Ba véctơ  đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá song song hoặc thuộc một mặt phẳng. Câu A sai

**Câu 57:** Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và  của tứ diện. Gọi  là trung điểm đoạn  và  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn C.**

Ta chứng minh được  nên 

**Câu 58:** Cho ba vectơ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

**A.** Nếu  không đồng phẳng thì từ  ta suy ra .

**B.** Nếu có , trong đó  thì  đồng phẳng.

**C.** Với ba số thực m, n, p thỏa mãn  ta có  thì  đồng phẳng.

**D.** Nếu giá của đồng qui thì  đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:*** :

**Chọn D.**

Câu D sai. Ví dụ phản chứng 3 cạnh của hình chóp tam giác đồng qui tại 1 đỉnh nhưng chúng không đồng phẳng.

**Câu 59:** Cho hình lăng trụ,  là trung điểm của. Đặt ,, . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. ** **B. **. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:* :**

**Chọn C.**

Ta có 



**Câu 60:** Cho hình lăng trụ tam giác . Đặt . Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào đúng.

**A. **. **B. **. **C.** . **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có: .

**Câu 61:** Cho tứ diện  và  là trọng tâm tam giác . Đẳng thức đúng là.

**A. **. **B. **.

**C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Vì  là trọng tâm tam giác  nên .

**Câu 62:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

**A.** Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

**B.** Ba véctơ  đồng phẳng thì có  với  là các số duy nhất.

**C.** Ba véctơ không đồng phẳng khi có  với  là véctơ bất kì.

**D.** Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với một mặt phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Câu A sai vì ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.

Câu B sai vì thiếu điều kiện 2 véctơ  không cùng phương.

Câu C sai vì  với  là véctơ bất kì không phải là điều kiện để 3 véctơ  đồng phẳng.

**Câu 63:** Cho hình hộp . Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Với  ta có: .

**Câu 64:** Cho hình chóp  Lấy các điểm  lần lượt thuộc các tia  sao cho , trong đó  là các số thay đổi. Tìm mối liên hệ giữa để mặt phẳng  đi qua trọng tâm của tam giác .

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Nếu  thì  nên .

Suy ra  đi qua trọng tâm của tam giác => là đáp án đúng.

**Câu 65:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Đặt . Khẳng định nào sau đây đúng.

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Gọi  là tâm hình bình hành . Ta có:=>

**Câu 66:** Cho hình tứ diện  có trọng tâm . Mệnh đề nào sau đây **sai**.

**A. **. **B. **.

**C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Theo giả thuyết trên thì với  là một điểm bất kỳ ta luôn có: .

Ta thay điểm  bởi điểm  thì ta có:



Do vậy  là sai.

**Câu 67:** Cho hình hộp  với tâm . Chọn đẳng thức **sai.**

**A. **. **B. **.

**C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có  mà  nên  sai.

**Câu 68:** Cho tứ diện . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Đặt ,,. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A. **. **B. **.

**C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có .

**Câu 69:** Cho hình hộp . Chọn khẳng định đúng.

**A. ** đồng phẳng. **B. ** đồng phẳng.

**C. ** đồng phẳng. **D. ** đồng phẳng.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có 3 véctơ  đồng phẳng vì chúng có giá cùng nằm trên mặt phẳng 

**Câu 70:** Cho tứ diện  có  là trọng tâm tam giác  Đặt    Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có: 



Vì  là trọng tâm của tam giác  nên 

**Câu 71:** Cho hình chóp  Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** Nếu  là hình bình hành thì .

**B.** Nếu  thì  là hình bình hành.

**C.** Nếu  là hình thang thì .

**D.** Nếu  thì  là hình thang.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Đáp án **C** sai do nếu  là hình thang có 2 đáy lần lượt là  và  thì ta có 

**Câu 72:** Cho tứ diện . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và  Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A. ** **B.** . **C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Ta có: 

Mà  và  lần lượt là trung điểm của  và  nên 

Do đó .

**Câu 73:** Cho tứ diện . Đặt  gọi  là trung điểm của  Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  **B.** 

**C.** . **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có: 



**Câu 74:** Cho tứ diện . Gọi  là trọng tâm tam giác  Tìm giá trị của  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: 

**A.** . **B.**  **C. ** **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Chứng minh tương tự câu 61 ta có .

**Câu 75:** Cho tứ diện . Gọi  là các điểm thỏa nãm  còn  là các điểm xác định bởi . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** P, Q, R thẳng hàng **B.** P, Q, R không đồng phẳng

**C.** P, Q, R không thẳng hàng **D.** Cả A, B, C đều sai

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có 



Từ  ta có 

Lấy  theo vế ta có





Tương tự 

Mặt khác  nên 

Vậy  thẳng hàng.

**Câu 76:** Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và ,  là trung điểm của .

a) Giả sử thì giá trị của a là?

**A.** 2 **B.** 1 **C.  D. **

b) Cho các đẵng thức sau, đẵng thức nào đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

c) Xác định vị trí của  để  nhỏ nhất.

**A.** Trung điểm AB **B.** Trùng với G **C.** Trung điểm AC **D.** Trung điểm CD

***Hướng dẫn giải:***

a) .

b) 

.

c) Ta có  nên  nhỏ nhất khi .

**Câu 77:** Cho hình hộp . Xác định vị trí các điểm  lần lượt trên  và  sao cho . Tính tỉ số bằng?

**A.  B.  C. 1 D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

.

Giả sử .

Dễ dàng có các biểu diễn  và . Từ đó suy ra 

Để  thì 

Từ  và  ta có: 



.

Vậy các điểm  được xác định bởi .

Ta cũng có .

**Câu 78:** Cho hình hộp  có các cạnh đều bằng  và các góc .

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng  với ;  với .

**A.** ; **B.** ;

**C.** ; **D.** ;

b) Tính diện tích các tứ giác  và .

**A.** ; **B.** ;

**C.** ; **D.** ;

c) Tính góc giữa đường thẳng  với các đường thẳng .

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

***Hướng dẫn giải:***

a) Đặt 

Ta có  nên



.

Để ý rằng , .

Từ đó 

Ta có , từ đó tính được .

b) 

 nên .

Dễ dàng tính được 

, .

Tính được 

Vậy .

c) ĐS:.

**Câu 79:** Cho tam giác , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**



.

**Câu 6.** Cho tứ diện . Lấy các điểm  lần lượt thuộc  sao cho .

Hãy xác định  để  đồng phẳng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

***Cách 1.***

Ta có 

.

Lại có  do đó .

Vậy Nếu  đồng phẳng thì 

 hay .

***Cách 2.*** Đặt  thì không khó khăn ta có các biểu diễn

, , 

Các điểm  đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ  đồng phẳng 



Do các vec tơ  không đồng phẳng nên điều này tương đương với



**Câu 80:** Cho hình chóp  có , . Gọi  là mặt phẳng đi qua  và các trung điểm của .

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Gọi  lần lượt là trung điểm của . Thiết diện là tam giác .

Theo bài tập 5 thì 

Ta có 



. Tính tương tự, ta có

.

Vậy 

.

**Câu 81:** Cho hình chóp , mặt phẳng  cắt các tia (  là trọng tâm tam giác ) lần lượt tại các điểm .Ta có . Hỏi k bằng bao nhiêu?

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Do  là trọng tâm của  nên 



Mặt khác  đồng phẳng nên

.

**Chú ý:** Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu  là điểm thuộc miền trong tam giác  thì  trong đó  lần lượt là diện tích các tam giác . Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp , mặt phẳng  cắt các tia ( là điểm thuộc miền trong tam giác ) lần lượt tại các điểm .

Chứng minh: . ( Với  lần lượt là diện tích các tam giác  và  là diện tích tam giác ).

**Câu 82:** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Một mặt phẳng  cắt các cạnh  lần lượt tại .Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

Gọi  là tâm của hình bình hành  thì 

Do  đồng phẳng nên đẳng thức trên .

**Câu 83:** Cho hình chóp  có . Một mặt phẳng  luôn đi qua trọng tâm của tam giác , cắt các cạnh  lần lượt tại . Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Gọi  là trọng tâm của tam giác . Ta có 

.

Mà  đồng phẳng nên 

Theo BĐT Cauchy schwarz:

Ta có 

.

Đẳng thức xảy ra khi

 kết hợp với  ta được .

Vậy GTNN của  là .

**Câu 84:** Cho tứ diện ,  là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng  cắt các mặt  lần lượt tại . Mặt phẳng  đi qua  và song song với  lần lượt cắt  tại các điểm .Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh  là trọng tâm của tam giác .

**A.**  là trọng tâm của tam giác .

**B.**  là trực tâm của tam giác .

**C.**  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**D.**  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Vì  nằm trong tứ diện  nên

tồn tại  sao cho 

Gọi  là mặt phẳng đi qua  và song song với mặt phẳng .

Ta có .

Do đó 

Trong , chiếu các vec tơ lên đường thẳng  theo phương  ta được:



Từ  suy ra 

Tương tự ta có 



Mặt khác chiếu các vec tơ trong  lên mặt phẳng theo phương  tì thu được . Vậy từ  ta có , hay  là trọng tâm của tam giác .

**Câu 85:** Cho tứ diện  có 

Gọi  là diện tích toàn phần ( tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của .

**A.  B.  C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

Do tứ diện  có  nên . Gọi  là diện tích và  là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì , nên bất đẳng thức cần chứng minh .

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm  bất kì và  là trọng tâm của tam giác  thì 

Cho  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  ta được .

**Câu 86:** Cho hình hộp  và các điểm  xác định bởi

.

Hãy tính  theo  để ba điểm  thẳng hàng.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Đặt .

Từ giả thiết ta có :





Từ đó ta có



.



Ba điểm  thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại  sao cho .

Thay các vec tơ  vào  và lưu ý  không đồng phẳng ta tính được .

**Câu 87:** Cho hình hộp . Một đường thẳng  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  sao cho . Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

 Đặt .

Vì  nên 

, 

Ta có 



Do 

. Vậy .

**Câu 88:** Giả sử  là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh  cỏa tứ diện . Gọi  là giao điểm của ba mặt phẳng  và  là giao điểm của ba mặt phẳng .

Ta được  thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Goi .

Trong  có  trong  có .

Đặt  và 

Ta có .

Do  nên 

. Vì  không cùng phương nên ta có .

Hoàn toàn tương tự ta có :

.

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm  và  ta được :



Suy ra 

Vậy  thẳng hàng và .