**CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ LỚP 11**

|  |  |
| --- | --- |
| ⯎    **Dạng ➀** | ***Chứng minh dãy số có giới hạn là 0*** |
| **⯎ *Phương pháp:***  **🔿**Cách 1: Áp dụng định nghĩa.  **🔿**Cách 2: Sử dụng các định lí sau:  Nếu k là số thực dương thì .  Với hai dãy số  và , nếu  với mọi n và  thì .  Nếu  thì . | |

**🗵. Ví dụ minh họa:**

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ➊  Chứng minh các dãy số  sau đây có giới hạn là 0.  a).  b).  c).  d). |

**🞔 Lời giải**

a). Với mỗi số dương  tùy ý, cho trước, ta có . Suy ra với mỗi số dương cho trước, thì với mọi số tự nhiên  ta đều có . Vậy .

b). Ta có thì .Áp dụng định lí “Nếu k là một số thực dương cho trước thì ” ta được . Từ đó suy ra .

c). Ta có thì .Áp dụng định lí “Nếu k là một số thực dương cho trước thì ” ta được . Từ đó suy ra .

d). Ta có . Vì . Từ đó suy ra .

|  |  |
| --- | --- |
| ⯎    **Dạng ➁** | ***Dùng định nghĩa chứng minh dãy số***  ***có giới hạn L.*** |
| **⯎ *Phương pháp:***  Chứng minh . | | |

**🗵. Ví dụ minh họa:**

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ➊  Chứng minh:  a).  b).  c). . |

**🞔 Lời giải**

a). gọi .  ta có .

Vì  nên  suy ra .

b). Gọi .  ta có  .

Vì  nên . Do đó .

c). Gọi .  ta có    . Vì  nên . Do đó .

|  |  |
| --- | --- |
| ⯎    **Dạng ➂** | ***Tìm giới hạn của dãy***  ***có giới hạn hữu hạn:*** |
| **⯎ *Phương pháp:***  **🔿DẠNG 1:**  **là một phân thức hữu tỉ dạng**  **( trong đó**  **là hai đa thức của n).**  Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho  với  là lũy thừa có số mũ lớn nhất của  và ( hoặc rút  là lũy thừa có số mũ lớn nhất của  và  ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.  **🔿DẠNG 2:**  **là một phân thức hữu tỉ dạng**  **( trong đó**  **là các biểu thức chứa căn của n).**  **🔿DẠNG 3:**  **là một phân thức hữu tỉ dạng**  **( trong đó**  **là các biểu thức chứa hàm mũ** **,…. Chia cả tử và mẫu cho**  **với a là cơ số lớn nhất ).**  **🔿DẠNG 4 : Nhân lượng liên hợp:**  PHƯƠNG PHÁP : Sử dụng các công thức nhân lượng liên hợp sau:    .  .        .    **🔿DẠNG 5 : TÍNH GIỚI HẠN DỰA VÀO ĐỊNH LÍ KẸP:**  PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào định lí: Cho ba dãy số  và . Nếu  và  thì .  **🔿DẠNG 6:**  **được xác định bởi một công thức truy hồi.**  Phương pháp:  Tìm công thức tổng quát của  theo n, sau đó tìm .  Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (có nghĩa chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc dãy số giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.  **🔿DẠNG 7: DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC:** | | |

**🗵. Ví dụ minh họa:**

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ➊  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d).  e).  f). |

**🞔 Lời giải**

a). Ta thấy là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của  cho  được:

. Ta có  và  nên .

b). Dễ dàng thấy là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của  cho  được:

. Ta có  ,  và . Do đó .

c). Có , ,  và  . Từ đó .. . Vì , ,  và . Nên .

d). Bước đầu tiên qui đồng mẫu .

Ta có  ,  và . Từ đó . Vì    và . Do đó .

e). . Ta có ,   , và .

Từ đó , mà  , . Do đó .

f). . Mà  ,  .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ➋  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d). |

**🞔 Lời giải**

a). . Vì có   và . Nên .

b).  . Vì có   và .

Từ đó có .

c). Ta có  . Vì có     và . Từ đó suy ra .

d). Ta có 

. Vì có   và . Nên .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ➌  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d).  e).  f). |

**🞔 Lời giải**

a).Ta có . Ta có  và . Nên .

b). Ta có . Ta có  và . Do đó .

c). Ta có 

. Ta có  và .

Do đó .

d). Ta có . Vì ,  và . Do đó .

e). Ta có : , mà  và . Do đó .

f). Ta có  . Vì  và  nên .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❹  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d).  e). .. f). |

**🞔 Lời giải**

a). Ta có . Và có  và .

Do đó  , vì   và . Nên .

b).  . Ta có  và . Từ đó suy ra , vì   và . Nên .

c). . Ta có . Do đó , ta có . Nên 

d). 



.

Ta có . Do đó . Vì   và . Nên .

e). 

 Tính 

 Tính 



 (1)

Có 

Nên 

.

Từ đó suy ra .

f). 

 Tính  .

 Tính 

Do đó .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❺  **Tìm các giới hạn sau:**  a).  b).  c).  d). |

**🞔 Lời giải**

a). Ta có  và

.

Do đó .

b). 

Ta có 



và    .

Do đó .

c). .

Tính 





Và  .

Do đó .

d). 



 Tính 

.

Tính 



 (1)

Có 

Do đó .

 Tính 

.

Từ đó suy ra .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❻  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d).  e).  f).  g).  h). |

**🞔 Lời giải**

a). Ta có . Từ đó .

Nên .

b). Ta có  . Từ đó  , có  . Do đó .

c).  ta có . Do đó  .

Nên .

d). .

Ta có dãy số là một cấp số cộng với  công sai  và số hạng tổng quát , nên tổng của dãy số trên là . Từ đó có  và  từ đó suy ra .

e). . Ta có tổng  (được chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Nên  vì  do đó .

f). Ta có  (Chứng minh dựa vào nguyên lý quy nạp). Do đó .

g). Ta có ( chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Do đó 

. Vì  nên .

h). Ta có .

Do đó    có  nên .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❼  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d). . |

**🞔 Lời giải**

a). Ta có  . Từ đó ta có:

 .

Do đó . Mà  do đó .

b). Ta có:





…………………

.

Cộng các bất đẳng thức trên, vế theo vế ta được .

Mà  và . Từ đó suy ra .

c). Rõ ràng  do đó. Có 

.

Do đó ta có  thì . Mà  và  nên . Từ đó suy ra .

d). Dễ dàng chứng minh .Áp dụng với  được :

 (1) và

(2).

Từ (1) và (2) suy ra  . Mà  và  do đó .

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❽  Cho dãy số  xác định như sau:  Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số ? |

**🞔 Lời giải**

Ta có và 

Do đó:   ...



Suy ra: 

Vậy 

 (Cô si)

Mặt khác . Vậy 

|  |
| --- |
| 🞜      **Ví dụ** ❻  **Tìm giới hạn của dãy**  **biết:**  a).  b).  c).  d).  e).  f). . |

**🞔 Lời giải**

a). Ta có . Có  nên  và . Từ đó suy ra .

b). Ta có . Vì  nên  và . Từ đó suy ra .

c). Ta có . Vì ,  và  nên  và có . Từ đó suy ra .

d). Ta có . Vì  nên  ngoài ra . Từ đó có .

e). Ta có . Vì  mà  nên  do đó  (1). Ngoài ra  (2). Từ (1) và (2) suy ra .

f). Ta có 

. Ta có  và  do đó  (1). Ngoài ra có  (2).

Từ (1) và (2) suy ra .